ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2024

Ασκήσεις

1. Έστω $a(n,k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1,2,\ldots,n\}$ με k στοιχεία τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους.

(α) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων $(r_1, r_2, \ldots, r_{k+1})$ του $n+1$ για τις οποίες $r_i \geq 2$ για $1 < i \leq k$.

(β) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a(n,k)x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(γ) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το $a(n,k)$.

2. Για $n, r, k \in \mathbb{N}$ με $n, r \geq 1$ συμβολίζουμε με $f(n,r,k)$ το πλήθος των n-άδων $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^n$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$.

(α) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{k \geq 0} f(n,r,k)x^k$.

(β) Για πόσες n-άδες $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^n$ είναι το $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ άρτιος αριθμός;

3. Για ποιες τυπικές δυναμοσειρές $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $(F(x))^2 = G(x)$; Θεωρήστε γνωστό το γεγονός ότι η εξίσωση $z^2 = a$ έχει λύση στο $\mathbb{C}$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$.

4. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} (x + x^2 - x^3)^k \in \mathbb{C}[[x]]$.

(α) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(β) Δείξτε ότι οι συντελεστές της $F(x)$ είναι θετικοί ακέραιοι.

(γ) Υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $(F(x))^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(0) = 1$ και $F(x)^{-1} = (1 - x^2)F(x)$ και υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $F(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. Έστω G το γράφημα που προκύπτει από το πλήρες απλό γράφημα K_4 με τέσσερις κορυφές, διαγράφοντας μια από τις ακμές του.

(α) Καταγράψτε τον πίνακα γειτνίασης του G για κάποια γραμμική διάταξη των κορυφών της επιλογής σας και υπολογίστε τις ιδιοτιμές του.

(β) Αν $\alpha = (1+\sqrt{17})/2$ και $w_\ell(G)$ είναι το πλήθος όλων των περιπάτων μήκους ℓ στο G, δείξτε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{\ell\to\infty} w_\ell(G)/\alpha^\ell$ και ότι είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

7. Δίνεται γράφημα G στο οποίο το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους ℓ είναι ίσο με $6^\ell + 3^\ell + 2^\ell + 4\cdot(-2)^\ell + 4$ για κάθε $\ell \in \{0,1,2,\ldots\}$.

(α) Πόσες κορυφές έχει το G; Πόσες θηλιές έχει;

(β) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα γειτνίασης του G;

(γ) Πόσοι κλειστοί περίπατοι μήκους ℓ υπάρχουν στο γράφημα που προκύπτει από το G προσθέτοντας μια θηλιά σε κάθε κορυφή;

(δ) Δείξτε ότι το πλήθος των ακμών του G είναι μικρότερο του 39.

(ε) Δώστε παράδειγμα γραφήματος με τις ιδιότητες της υπόθεσης.

8. Θεωρούμε το απλό γράφημα $\diamondsuit_n$ με κορυφές $1,-1,2,-2,\ldots,n,-n$ στο οποίο δύο διακεκριμένες κορυφές a και b είναι γειτονικές αν και μόνο αν $a+b\neq 0$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα γειτνίασης του $\diamondsuit_n$ και το πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους ℓ στο γράφημα αυτό για κάθε n.

9. Έστω G_n το απλό γράφημα με κορυφές $1,2,\ldots,n,1',2',\ldots,n'$ και ακμές τα $n(n-1)$ ζεύγη $\{i,j'\}$ με $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ και $i\neq j$.

(α) Αν A,B,C,D είναι τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας διάστασης με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, ο A είναι αντιστρέψιμος και $AC=CA$, δείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-CB).$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), ή με άλλο τρόπο, υπολογίστε τις τις ιδιοτιμές του πίνακα γειτνίασης του G_n για κάθε n.

10. Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του γραφήματος της Άσκησης 8.

11. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Πίνακα–Δένδρου, ή με άλλο τρόπο, υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του γραφήματος που προκύπτει προσθέτοντας μια ακμή με διαφορετικά άκρα στο πλήρες απλό γράφημα με n κορυφές.

12. Θεωρούμε το απλό γράφημα C_n στο σύνολο κορυφών $\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$ με ακμές τις $\{v_i,v_{i+1}\}$ για $1\le i\le n-1$ και $\{v_0,v_i\}$ για $1\le i\le n$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Πίνακα–Δένδρου, ή με άλλο τρόπο, δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ίσα:

(α) το πλήθος των παραγόντων δένδρων του C_n,

(β) ο αριθμός Fibonacci F_{2n}, όπου $F_1 = F_2 = 1$ και $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ για $m \ge 3$,

(γ) το άθροισμα $\sum r_1 r_2 \cdots r_k$, όταν αυτό διατρέχει όλες τις συνθέσεις $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n με τυχαίο πλήθος μερών.

13. Θεωρούμε το κατευθυνόμενο γράφημα $\mathcal{D}$ στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ακμές, από τις οποίες a_i έχουν αρχή v_i και πέρας v_{i+1} για $1 \le i \le n$ (όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι θετικοί ακέραιοι και $v_{n+1} = v_1$).

(α) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων προσανατολισμένων δένδρων του $\mathcal{D}$ με ρίζα v_i για $1 \le i \le n$. Για ποιες τιμές των $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι το $\mathcal{D}$ ισορροπημένο;

Έστω ότι το $\mathcal{D}$ είναι ισορροπημένο και έστω $d = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. Εκφράστε τις απαντήσεις σας στα ακόλουθα ερωτήματα ως συναρτήσεις των n, d και ℓ.

(β) Ποιο είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους ℓ του $\mathcal{D}$;

(γ) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές των πινάκων $A(\mathcal{D})$ και $L(\mathcal{D})$; Ποιο είναι το γινόμενο των μη μηδενικών ιδιοτιμών του $L(\mathcal{D})$;

(δ) Ποιο είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων Euler του $\mathcal{D}$;

14. Χρωματίζουμε κάθε ακμή ενός τετραέδρου T με ένα από n χρώματα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με μια άρτια μετάθεση του συνόλου των κορυφών του T. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

15. Δέκα όμοιες μπάλλες είναι τοποθετημένες σε σχηματισμό μπιλιάρδου (μία βρίσκεται πάνω από άλλες δύο, που βρίσκονται πάνω από άλλες τρεις, που βρίσκονται πάνω από άλλες τέσσερις). Χρωματίζουμε κάθε μπάλλα με ένα από n χρώματα και θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια στροφή γύρω από το κέντρο του σχηματισμού.

(α) Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

(β) Πόσοι από αυτούς έχουν τρεις πράσινες, τρεις μπλε και τέσσερις κόκκινες μπάλες;

16. Μια πεπερασμένη ομάδα G δρα επί πεπερασμένου συνόλου X. Για $g \in G$, έστω $\mathrm{fix}(g)$ το πλήθος των $x \in X$ με $g \cdot x = x$.

(α) Δείξτε ότι η G δρα επί του συνόλου $X \times X$ αν θέσουμε $g \cdot (x, x') = (g \cdot x, g \cdot x')$ για $x, x' \in X$.

(β) Υποθέτοντας ότι $|X| \geq 2$ και ότι η δράση της G επί του X έχει μία μόνο τροχιά, δείξτε ότι

$$\sum_{g \in G} (\mathrm{fix}(g))^2 \;=\; 2|G|$$

αν και μόνο αν ισχύει η εξής συνθήκη: για όλα τα $a, a', x, x' \in X$ με $a \neq a'$ και $x \neq x'$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $g \cdot x = a$ και $g \cdot x' = a'$.

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=0}^{n} k f(n,k) \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 f(n,k),$$

όπου $f(n,k)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με ακριβώς k σταθερά σημεία.

17. Με πόσους τρόπους μπορεί κανείς να επιλέξει μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματίσει κάθε έναν από τους ακεραίους $1, 2, \ldots, n$ άσπρο, πράσινο ή κόκκινο, έτσι ώστε το ελάχιστο στοιχείο κάθε κύκλου της w να είναι άσπρο; Εκφράστε την απάντησή σας ως μια όσο το δυνατόν πιο απλή συνάρτηση του n.

18. Για ακεραίους n, k με $0 \leq k \leq n$ ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$p_{n,k}(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} p(n,k,j) x^j,$$

όπου $p(n,k,j)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ με $w(1) = k+1$ και $\mathrm{des}(w) = j$. Δείξτε ότι

$$\sum_{m \geq 0} m^k (m+1)^{n-k} x^m \;=\; \frac{p_{n,k}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

19. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{exc}(w)$, όπου $\mathrm{exc}(w)$ είναι το πλήθος των υπερβάσεων της μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$.

20. Βρείτε (με απόδειξη) όλες τις διαμερίσεις λ για τις οποίες $f^\lambda = 5$.