Εισαγωγή στις άλγεβρες von Neumann

Δημήτρης Ανδρέου

Σεμινάριο Συναρτησιακής Ανάλυσης και Αλγεβρών Τελεστών

2021

Τοπολογίες στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

- Η τοπολογία της νόρμας:

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| : \ \|\xi\| = 1\}$$

- Η ισχυρή τοπολογία (SOT): ορίζεται από τις ημινόρμες

$$p_\xi(T) = \|T\xi\|.$$

- Η ασθενής τοπολογία (WOT): ορίζεται από τις ημινόρμες

$$p_{\xi,\eta}(T) = |\langle T\xi|\eta\rangle|.$$

Με άλλα λόγια, η WOT είναι η $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{H})_\sim)$-τοπολογία, όπου

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})_\sim = \mathrm{span}\{\omega_{\xi,\eta} : \ \xi, \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})^*,$$

$$\omega_{\xi,\eta}(T) = \langle T\xi|\eta\rangle.$$

Οι $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \textit{WOT})$ και $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \textit{SOT})$ έχουν τον ίδιο δυϊκό.

Πρόταση

Για ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\omega\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Το ω είναι WOT-συνεχές.
- Το ω είναι SOT-συνεχές.
- $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\sim}$.

Πόρισμα

Για κάθε κυρτό υποσύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύει $\overline{\mathcal{S}}^{\textit{SOT}} = \overline{\mathcal{S}}^{\textit{WOT}}$.

Η υπερασθενής τοπολογία

Ορισμός

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ την $\|\cdot\|$-κλειστή του $\mathcal{B}(\mathcal{H})_\sim$ στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$.
Η $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{B}(\mathcal{H})_*)$-τοπολογία ονομάζεται υπερασθενής τοπολογία (σ-*weak* ή *ultraweak*).

Ένα συναρτησοειδές $\omega\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθίες $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, $(\eta_k)_{k=1}^\infty$ στον $\mathcal{H}$ με $\sum_{k=1}^\infty \|\xi_k\|^2 + \|\eta_k\|^2 < \infty$ έτσι ώστε

$$\omega(T) = \sum_{k=1}^\infty \langle T\xi_k | \eta_k \rangle.$$

Πρόταση

- $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_* \iff \omega|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})_1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_\sim$.
- Η *WOT* και η υπερασθενής τοπολογία συμπίπτουν στην κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$.

Θεώρημα

Η απεικόνιση $\Phi\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H})_*)^*$ με

$$\Phi(T)(\omega) = \omega(T)$$

είναι ισομετρικός γραμμικός ισομορφισμός.

Προφανώς, η Φ είναι ομοιομορφισμός για την υπερασθενή τοπολογία του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ και την w*-τοπολογία του δυϊκού $(\mathcal{B}(\mathcal{H})_*)^*$.

Πόρισμα

Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ είναι *WOT*-συμπαγής.

Για ένα (υπερασθενώς κλειστό) γραμμικό υπόχωρο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ορίζουμε:

$$\mathcal{S}_\sim = \text{ WOT-συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή του } \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S}_* = \text{ υπερασθενώς συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή του } \mathcal{S}$$

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένας υπερασθενώς κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

- $\mathcal{S}_\sim = \{\omega|_{\mathcal{S}} : \ \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_\sim\}$.
- $\mathcal{S}_* = \{\omega|_{\mathcal{S}} : \ \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*\} = \{\omega \in \mathcal{S}^* : \ \omega|_{\mathcal{S}_1} \in \mathcal{S}_\sim\}$.
- $\overline{\mathcal{S}_\sim} = \mathcal{S}_*$, δηλαδή ο $\mathcal{S}_\sim$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}_*$ ως προς την νόρμα του $\mathcal{S}^*$.
- $\mathcal{S} \simeq (\mathcal{S}_*)^*$, με $\langle T, \omega \rangle = \omega(T)$.
- Ένα κυρτό υποσύνολο $K \subseteq \mathcal{S}$ είναι υπερασθενώς κλειστό αν και μόνο αν το $K \cap \mathcal{S}_1$ είναι *WOT*-κλειστό ή ισοδύναμα *SOT*-κλειστό.

Επειδή $(\mathcal{S}_*)^* = \mathcal{S}$, λέμε ότι ο $\mathcal{S}_*$ είναι ένας προδυϊκός του $\mathcal{S}$.

Θεώρημα (von Neumann)

Έστω $\mathcal{A}$ μια $*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\overline{\mathcal{A}}^{SOT} = \overline{\mathcal{A}}^{WOT} = \mathcal{A}''.$$

Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι *SOT*-κλειστή αν και μόνο αν είναι ***WOT***-κλειστή αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Σε αυτή την περίπτωση η $\mathcal{A}$ καλείται *άλγεβρα von Neumann*.

Επειδή η υπερασθενής τοπολογία είναι ισχυρότερη της WOT, έπεται το εξής:

Πόρισμα

Κάθε άλγεβρα *von Neumann* είναι υπερασθενώς κλειστή και άρα δυϊκός χώρος *Banach*.

Το δώρο του Kaplansky στην ανθρωπότητα

Θεώρημα (Kaplansky)

Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια άλγεβρα *von Neumann* και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ μια *SOT*-πυκνή $*$-υπάλγεβρα. Τότε:

- Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{A}_1$ είναι *SOT*-πυκνή στην $\mathcal{M}_1$.
- Τα αυτοσυζυγή (αντ. τα θετικά) στοιχεία της $\mathcal{A}_1$ είναι *SOT*-πυκνά στα αυτοσυζυγή (αντ. στα θετικά) στοιχεία της $\mathcal{M}_1$.
- Αν επιπλέον η $\mathcal{A}$ είναι C^*-άλγεβρα και $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$, τότε τα ορθομοναδιαία στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι *SOT*-πυκνά στα ορθομοναδιαία στοιχεία της $\mathcal{M}$.

Συνέπειες του θεωρήματος Kaplansky

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια $*$-υπάλγεβρα με $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα *von Neumann*.

(ii) Η $\mathcal{M}$ είναι υπερασθενώς κλειστή.

(iii) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{M}_1$ είναι υπερασθενώς συμπαγής.

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ δύο χώροι *Hilbert*, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια άλγεβρα *von Neumann* και $\phi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ένας *WOT*-συνεχής $*$-ομομορφισμός με $\phi(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{K}}$. Τότε, η $\phi(\mathcal{M})$ είναι άλγεβρα *von Neumann*.

Θεώρημα (Sakai)

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Η $\mathcal{A}$ είναι $*$-ισόμορφη με κάποια άλγεβρα *von Neumann* $\mathcal{M}$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι ο δυϊκός F^* κάποιου χώρου *Banach* F.

Σε αυτή την περίπτωση, ο ισομορφισμός $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}$ είναι αμφισυνεχής ως προς την $\sigma(\mathcal{A}, F)$-τοπολογία και την υπερασθενή τοπολογία της $\mathcal{M}$.

Θεώρημα (Dixmier)

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με $\mathcal{A} = F^*$ για κάποιο χώρο *Banach* F. Τότε, ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι $\sigma(\mathcal{A}, F)$-συνεχές αν και μόνο αν $\phi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \phi(x_\alpha)$ για κάθε άνω φραγμένο αύξον δίκτυο $(x_\alpha) \subseteq \mathcal{A}^+$.

Πόρισμα

- Μια C^*-άλγεβρα που είναι δυϊκός χώρος *Banach*, έχει μοναδικό προδυϊκό.
- Κάθε $*$-ισομορφισμός αλγεβρών *von Neumann* είναι υπερασθενώς αμφισυνεχής.

Η πολική αναπαράσταση

Ένας $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται μερική ισομετρία αν ο περιορισμός του V στον $(\ker V)^{\perp} = \overline{V^*(\mathcal{H})}$ είναι ισομετρία.

$$V \text{ μερική ισομετρία} \iff V^*V \text{ προβολή} \iff VV^* \text{ προβολή}.$$

Θεώρημα

Για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ υπάρχει μοναδική μερική ισομετρία $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τέτοια ώστε

$$T = V(T^*T)^{1/2}$$

και

$$\ker T = \ker V.$$

Μάλιστα, ισχύει ότι $V^*T = (T^*T)^{1/2}$.

Γενικά μια C*-άλγεβρα μπορεί να μην περιέχει μη μηδενικές προβολές.
Για παράδειγμα, αν μια $f \in C_0(\mathbb{R})$ είναι προβολή, δηλαδή $f = \overline{f} = f^2$, τότε $f = 0$.

Αντιθέτως οι άλγεβρες von Neumann περιέχουν πληθώρα προβολών.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια άλγεβρα *von Neumann*. Τότε, για κάθε $T \in \mathcal{M}$, η προβολή του $\mathcal{H}$ επί του $\overline{T(\mathcal{H})}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια άλγεβρα *von Neumann* και $T \in \mathcal{M}$ με πολική αναπαράσταση $T = V(T^*T)^{1/2}$. Τότε, η μερική ισομετρία V ανήκει στην $\mathcal{M}$. Ειδικότερα, η $\mathcal{M}$ περιέχει τις προβολές V^*V και VV^*.

Φασματικά μέτρα

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και K ένας συμπαγής χώρος Hausdorff.
Μια απεικόνιση E από την σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του K με τιμές στο σύνολο των προβολών του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται φασματικό μέτρο, αν

- $E(\varnothing) = 0$, $E(K) = I_{\mathcal{H}}$.
- $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1)E(A_2)$ για κάθε Borel $A_1, A_2 \subseteq K$.
- Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, η συνάρτηση $\mu_{\xi,\eta}(A) = \langle E(A)\xi|\eta\rangle$ είναι κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel στον K.

Για κάθε $f \in B_\infty(K)$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ώστε

$$\langle T\xi|\eta\rangle = \int_K f(x)\mathrm{d}\mu_{\xi,\eta}(x) \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Γράφουμε δε

$$T = \int_K f(x)\mathrm{d}E(x).$$

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι, για μια μετρήσιμη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A, ισχύει

$$E(A) = \int_K \chi_A(x)\mathrm{d}E(x).$$

Το φασματικό θεώρημα

Θεώρημα

Για κάθε φυσιολογικό τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(TT^* = T^*T)$ υπάρχει ένα μοναδικό φασματικό μέτρο E για το ζεύγος $(\sigma(T), \mathcal{H})$, τέτοιο ώστε

$$T = \int_{\sigma(T)} x \mathrm{d}E(x).$$

Μάλιστα, ισχύει $\{T\}' = \{E(A) : \ A \subseteq \sigma(T) \textit{ Borel}\}'$.

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια άλγεβρα *von Neumann* και $T \in \mathcal{M}$ φυσιολογικός τελεστής. Αν E είναι το φασματικό μέτρο που αντιστοιχεί στον T, τότε $E(A) \in \mathcal{M}$ για κάθε *Borel* $A \subseteq \sigma(T)$. Ειδικότερα, η $\mathcal{M}$ είναι ίση με την $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών της.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{M}$ μια άλγεβρα *von Neumann*. Για κάθε θετικό τελεστή $T \in \mathcal{M}$ με $\|T\| \leq 1$ υπάρχει μια ακολουθία προβολών $(P_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$, ώστε

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} P_n.$$

Ειδικότερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα $(\mathcal{M}^+)_1$ του θετικού κώνου είναι η κλειστή κυρτή θήκη των προβολών της $\mathcal{M}$.

Ορισμός

Δύο προβολές $P, Q \in \mathcal{M}$ λέγονται ισοδύναμες (κατά *Murray-von Neumann*) και γράφουμε $P \sim Q$ αν υπάρχει $V \in \mathcal{M}$, ώστε $P = V^*V$ και $Q = VV^*$.

Ορισμός

Μια προβολή P λέγεται:

- κεντρική αν $P \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$,
- αβελιανή αν η $P\mathcal{M}P$ είναι αβελιανή,
- πεπερασμένη αν $P \sim Q \leq P \implies P = Q$.

Μια άλγεβρα *von Neumann* $\mathcal{M}$ λέγεται:

- τύπου I αν κάθε κεντρική προβολή $\neq 0$ έχει αβελιανή υποπροβολή $\neq 0$.
- τύπου II αν δεν έχει αβελιανές προβολές $\neq 0$ και κάθε κεντρική προβολή $\neq 0$ έχει πεπερασμένη υποπροβολή $\neq 0$.
- τύπου III αν δεν έχει μη μηδενικές πεπερασμένες προβολές.

Ειδικότερα, μια τύπου II άλγεβρα $\mathcal{M}$ λέγεται τύπου II_1 (αντ. τύπου II_∞) αν η ταυτοτική προβολή $I_{\mathcal{H}}$ είναι πεπερασμένη (αντ. μη πεπερασμένη).

Θεώρημα

Κάθε άλγεβρα *von Neumann* $\mathcal{M}$ γράφεται μοναδικά ως ευθύ άθροισμα

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_I \oplus \mathcal{M}_{II_1} \oplus \mathcal{M}_{II_\infty} \oplus \mathcal{M}_{III}$$

όπου όπου η $\mathcal{M}_\alpha$ είναι τύπου α, για $\alpha \in \{I, II_1, II_\infty, III\}$.

Πόρισμα

Αν η $\mathcal{M}$ είναι *factor*, δηλαδή $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$, τότε η $\mathcal{M}$ είναι είτε τύπου I ή τύπου II_1 ή τύπου II_∞ ή τύπου III.

Θεώρημα

Κάθε άλγεβρα *von Neumann* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, όπου $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert*, είναι ευθύ ολοκλήρωμα (γενικευμένο ευθύ άθροισμα...) $\mathcal{M} \simeq \int_\Gamma^\oplus \mathcal{M}(\gamma) d\mu(\gamma)$ όπου κάθε $\mathcal{M}(\gamma)$ είναι *factor*.

- Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι factor τύπου I (δεν υπάρχουν άλλοι).
- Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann είναι τύπου I.
- Μια άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ είναι τύπου I αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με κάποια άλγεβρα von Neumann με αβελιανό μεταθέτη.
- Κάθε άλγεβρα $\mathcal{M}$ τύπου I αναπαρίσταται ως ευθύ άθροισμα τανυστικών γινομένων
$$\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha} \overline{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\alpha})$$
όπου $\mathcal{A}_{\alpha}$ αβελιανή.
- Η $vN(G)$ μιας άπειρης αριθμήσιμης ομάδας G είναι factor αν και μόνο αν η G είναι ICC.
Σε αυτή την περίπτωση η $vN(G)$ είναι τύπου II_1 και η $vN(G)\overline{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι factor τύπου II_{∞}.
- Χρησιμοποιώντας την θεωρία Tomita-Takesaki ο Connes ταξινόμησε τους factros τύπου III σε μια οικογένεια III_{λ}, $\lambda \in [0,1]$. Από αυτούς, οι τύπου III_1 είναι αυτοί που εμφανίζονται συνήθως στην φυσική, αλλά απέχουν περισσότερο από τους τύπου II.