Εισαγωγή στις C*-άλγεβρες III

Δημήτρης Ανδρέου

Σεμινάριο Συναρτησιακής Ανάλυσης και Αλγεβρών Τελεστών

2021

Θεώρημα (GNS)

Για κάθε θετικό γραμμικό συναρτησοειδές ϕ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ υπάρχει μια (μοναδική ως προς ορθομοναδιαία ισοδυναμία) αναπαράσταση $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ με κυκλικό διάνυσμα $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$, ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Μάλιστα, $\|\xi_\phi\|^2 = \|\phi\|$ και συνεπώς $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \iff \|\xi_\phi\| = 1$.

Θεώρημα

Για κάθε φυσιολογικό στοιχείο a μιας (μη μηδενικής) C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, υπάρχει ένα $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, ώστε $\|a\| = |\psi(a)|$.

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση $\pi_\mathcal{A} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, δηλαδή το ευθύ άθροισμα των αναπαραστάσεων *GNS* $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)_{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$, είναι πιστή και άρα ισομετρία.

$$\mathcal{H}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}}_{n \text{ φορές}}$$

$$M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \{[T_{ij}] : \ T_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ 1 \leq i,j \leq n\}$$

$$[T_{ij}] + [\lambda S_{ij}] = [T_{ij} + \lambda S_{ij}], \quad [T_{ij}][S_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} T_{ik} S_{kj}\right], \quad [T_{ij}]^* = [T_{ji}^*]$$

Η $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ είναι *-άλγεβρα και η απεικόνιση $\Phi \colon M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathcal{B}\left(\mathcal{H}^{(n)}\right)$, με

$$\Phi([T_{ij}]) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} T_{1j}\xi_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} T_{nj}\xi_n \end{bmatrix}$$

είναι *-ισομορφισμός.
Ορίζοντας $\|[T_{ij}]\|_n = \|\Phi([T_{ij}])\|$ έχουμε την μοναδική C*-νόρμα στην $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.
Η πληρότητα της νόρμας προκύπτει από τις ανισότητες:

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} \|T_{ij}\| \leq \|[T_{ij}]\|_n \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \|T_{ij}\|^2\right)^{1/2} \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} \|T_{ij}\|.$$

Άλγεβρες πινάκων

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Ο χώρος $M_n(\mathcal{A})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από την $\mathcal{A}$ είναι *-άλγεβρα με τις συνήθεις πράξεις πινάκων

$$[a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = [a_{ij} + \lambda b_{ij}], \quad [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right], \quad [a_{ij}]^* = [a_{ji}^*]$$

Η $\pi_n\colon M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ με

$$\pi_n\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi(a_{11}) & \dots & \pi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi(a_{n1}) & \dots & \pi(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

είναι *-μονομορφισμός και η νόρμα $\|[a_{ij}]\|_n = \|[\pi(a_{ij})]\|_n$ είναι η μοναδική C*-νόρμα στην $M_n(\mathcal{A})$.

Ενδιαφέρουσες κλάσεις απεικονίσεων

Έστω $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ δυο C*-αλγεβρών και

$$\phi_n\colon M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}),\ \phi_n([a_{ij}]) = [\phi(a_{ij})].$$

Η ϕ λέγεται

- n-θετική αν η ϕ_n είναι θετική
- πλήρως θετική αν είναι n-θετική για κάθε $n \geq 1$
- πλήρως φραγμένη αν $\|\phi\|_{cb} := \sup_{n\geq 1} \|\phi_n\| < \infty$
- πλήρης συστολή αν $\|\phi\|_{cb} \leq 1$
- πλήρης ισομετρία αν η ϕ_n είναι ισομετρία για κάθε $n \geq 1$.

Παραδείγματα και μη...

- Κάθε *-ομομορφισμός $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση και πλήρης συστολή, διότι για κάθε $n \geq 1$ η $\phi_n\colon M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ είναι *-ομομορφισμός.
- Για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$ η $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ \phi(a) = xay$ είναι πλήρως φραγμένη. Αν επιπλέον $y = x^*$, τότε η ϕ είναι πλήρως θετική.
- Για κάθε φραγμένο τελεστή $V\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ η απεικόνιση $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, $T \mapsto VTV^*$ είναι πλήρως θετική.
- Η αναστροφή πινάκων $\mathbf{t}\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}),\ \mathbf{t}([a_{ij}]) = [a_{ji}]$ είναι θετική, αλλά όχι πλήρως θετική.

$$\mathbf{t}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο τελευταίος πίνακας έχει ορίζουσα -1 και άρα δεν είναι θετικός.

Πρόταση

Έστω $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση.

- Αν η ϕ είναι n-θετική, τότε είναι και k-θετική για κάθε $k \leq n$.
- $k \leq n \implies \|\phi_k\| \leq \|\phi_n\|$.
- Αν $\|\phi\| < \infty$, τότε $\|\phi_n\| \leq n\|\phi\|$ για κάθε $n \geq 1$.

Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Για την απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με

$$\langle \phi(T)e_n | e_m \rangle = \langle e_m | T^* e_n \rangle$$

ισχύει

$$\|\phi_n\| = n \qquad \forall n \geq 1.$$

Θεώρημα

Για κάθε θετική απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και κάθε προσεγγιστική μονάδα (u_λ) της $\mathcal{A}$ ισχύει

$$\|\phi\| = \lim_\lambda \|\phi(u_\lambda)\| < \infty.$$

Αν η ϕ είναι επιπλέον πλήρως θετική, τότε $\|\phi\| = \|\phi\|_{cb}$.

Πρόταση

Έστω $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ένα γραμμικό συναρτησοειδές μιας C^*-άλγεβρας.

- $\|f\|_{cb} = \|f\|$.
- Αν το f είναι θετικό, τότε είναι και πλήρως θετικό.

Θεώρημα

Κάθε φραγμένη γραμμική απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{A} \to C(X)$ είναι πλήρως φραγμένη και μάλιστα $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$. Αν επιπλέον η ϕ είναι θετική, τότε είναι και πλήρως θετική.

Θεώρημα (Stinespring)

Κάθε θετική απεικόνιση $\phi\colon C(X) \to \mathcal{B}$ είναι πλήρως θετική.

Σχόλιο: Δεν αρκεί μια απεικόνιση με μεταθετικό πεδίο ορισμού να είναι φραγμένη ώστε να είναι αυτομάτως πλήρως φραγμένη.

Θεώρημα (Choi)

Για μια γραμμική απεικόνιση $\phi\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η ϕ είναι πλήρως θετική.

(ii) Η ϕ είναι n-θετική.

(iii) Ο πίνακας $(\phi(E_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathcal{B})$ είναι θετικός, όπου E_{ij} ο $n \times n$ μιγαδικός πίνακας που έχει 1 στην (i,j)-θέση και μηδέν παντού αλλού.

- Για κάθε φραγμένο τελεστή $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ η απεικόνιση $\rho\colon \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\rho(T) = V^*TV$ είναι πλήρως θετική.
- Κάθε $*$-ομομορφισμός $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση.
- Συνεπώς, επειδή η σύνθεση πλήρως θετικών απεικονίσεων είναι πλήρως θετική, η $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\phi(a) = V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.

Μάλιστα, όλες οι πλήρως θετικές απεικονίσεις προκύπτουν όπως παραπάνω!

Θεώρημα (Stinespring)

Έστω $\mathcal{A}$ μοναδιαία C^*-άλγεβρα και $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν ένας χώρος *Hilbert* $\mathcal{K}$, ένας μοναδιαίος $*$-ομομορφισμός $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ και ένας φραγμένος τελεστής $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ με $\|\phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})\| = \|V\|^2$, ούτως ώστε

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Αν $\phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}}$, τότε ο V είναι ισομετρία ($V^*V = I_{\mathcal{H}}$), επομένως $\mathcal{H} \simeq V\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ και $\phi(a) = P_{\mathcal{H}}\pi(a)|_{\mathcal{H}}$.

Παρατήρηση: Το παραπάνω γενικεύει το θεώρημα GNS για states. Πράγματι, αν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ οπότε και $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$, τότε

$$\phi(a) = \phi(a)1 \cdot 1 = V^*\pi(a)V1 \cdot 1 = \langle \pi(a)V1 | V1 \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Τοπολογίες στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Ασθενής τοπολογία τελεστή (WOT): η τοπικά κυρτή τοπολογία στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ορίζεται από τις ημινόρμες

$$p_{\xi,\eta}(T) = |\langle T\xi|\eta\rangle|, \quad \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

$$T_i \xrightarrow{WOT} T \iff \langle T_i\xi|\eta\rangle \to \langle T\xi|\eta\rangle, \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Ισχυρή τοπολογία τελεστή (SOT): η τοπικά κυρτή τοπολογία στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ορίζεται από τις ημινόρμες

$$p_{\xi}(T) = \|T\xi\|, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

$$T_i \xrightarrow{SOT} T \iff T_i\xi \to T\xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Παρατηρείστε ότι η SOT είναι ισχυρότερη από την WOT, ενώ και οι δύο είναι ασθενέστερες από την τοπολογία της νόρμας.

Μεταθέτες

Ο μεταθέτης ενός συνόλου $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \; TA = AT, \; \forall A \in \mathcal{S}\}.$$

- Ο $\mathcal{S}'$ είνα πάντα WOT-κλειστή άλγεβρα με μονάδα. Πράγματι, αν $(T_i) \subseteq \mathcal{S}'$ και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $T_i \xrightarrow{WOT} T$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{S}$

$$\langle TA\xi|\eta\rangle = \lim_i \langle T_i A\xi|\eta\rangle = \lim_i \langle AT_i\xi|\eta\rangle = \lim_i \langle T_i\xi|A^*\eta\rangle = \langle T\xi|A^*\eta\rangle = \langle AT\xi|\eta\rangle.$$

- Ειδικότερα, αν το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές, ο $\mathcal{S}'$ είναι C*-άλγεβρα.
- Για κάθε $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύει $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$. Επομένως,

$$\overline{\mathcal{S}}^{SOT} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{WOT} \subseteq \mathcal{S}''$$

Οι $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathit{WOT})$ και $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathit{SOT})$ έχουν τον ίδιο δυϊκό.

Πρόταση

Για ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\omega \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Το ω είναι *WOT*-συνεχές.
- Το ω είναι *SOT*-συνεχές.
- $\omega(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle T\xi_i | \eta_i \rangle$ για κάποια $\xi_i, \eta_i \in \mathcal{H}$.

Πόρισμα

Για κάθε κυρτό υποσύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύει

$$\overline{\mathcal{S}}^{SOT} = \overline{\mathcal{S}}^{WOT}.$$

Άλγεβρες von Neumann

Θεώρημα (δεύτερου μεταθέτη του von Neumann)

Έστω $\mathcal{A}$ μια *-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\overline{\mathcal{A}}^{SOT} = \overline{\mathcal{A}}^{WOT} = \mathcal{A}''.$$

Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι *SOT*-κλειστή αν και μόνο αν είναι *WOT*-κλειστή αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Σε αυτή την περίπτωση η $\mathcal{A}$ καλείται *άλγεβρα von Neumann*.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{SOT}$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $X \in \mathcal{A}''$ και $\xi \in \mathcal{H}$, ισχύει $X\xi \in \overline{\mathcal{A}\xi}$.

Έστω, $X \in \mathcal{A}''$, $\xi \in \mathcal{H}$ και $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{A}\xi}$. Έστω P η ορθή προβολή του $\mathcal{H}$ επί του $\mathcal{K}$. Προφανώς $T\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ για κάθε $T \in \mathcal{A}$. Επομένως, $TP\eta = PTP\eta$ για κάθε $T \in \mathcal{A}$ και κάθε $\eta \in \mathcal{H}$ και άρα $TP = PTP$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής, έπεται ότι $PT = PTP = TP$ για κάθε $T \in \mathcal{A}$. Επομένως $P \in \mathcal{A}'$. Άρα, $XP = PX$. Συνεπώς, $X\xi \in \overline{\mathcal{A}\xi}$.

Θέτουμε

$$\mathcal{A}^{(n)} = \left\{ \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & T \end{bmatrix} : \ T \in \mathcal{A} \right\} \subseteq M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(n)}).$$

Η $\mathcal{A}^{(n)}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(n)})$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή $I_{\mathcal{H}^{(n)}}$.

Επιπλέον, για κάθε $X \in \mathcal{A}''$ έχουμε $X^{(n)} = \begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix} \in (\mathcal{A}^{(n)})''$.

Εφαρμόζοντας τον Ισχυρισμό για την $\mathcal{A}^{(n)}$ στην θέση της $\mathcal{A}$, έπεται ότι για κάθε $\xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{H}^{(n)}$ ισχύει

$$X^{(n)}\xi^{(n)} = (X\xi_1, \dots, X\xi_n) \in \overline{\mathcal{A}^{(n)}\xi^{(n)}}.$$

Επομένως, για κάθε $X \in \mathcal{A}''$ και κάθε n-άδα $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$, υπάρχει μια ακολουθία $(T_k) \in \mathcal{A}$, ώστε

$$T_k \xi_j \xrightarrow[k \to \infty]{} X\xi_j \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, n.$$

Έπεται ότι $X \in \overline{\mathcal{A}}^{SOT}$, διότι τα σύνολα της μορφής

$$W = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ \|T\xi_j - X\xi_j\| < \varepsilon, \ \forall j = 1, \ldots, n\}, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}, \ \varepsilon > 0$$

είναι μια βάση περιοχών του X για την SOT. $\square$