Εισαγωγή στις C*-άλγεβρες

Δημήτρης Ανδρέου

Σεμινάριο Συναρτησιακής Ανάλυσης και Αλγεβρών Τελεστών

2021

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ των φραγμένων τελεστών $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι πλήρης (χώρος Banach) με την νόρμα τελεστή

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| : \ \xi \in \mathcal{H}, \ \|\xi\| = 1\}$$

Επιπλέον, ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι άλγεβρα ως προς την σύνθεση τελεστών και

$$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Ακόμη, για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ υπάρχει (μοναδικός) $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (συζυγής) με την ιδιότητα:

$$\langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|T^*\eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Τέλος, ισχύει η C*-ιδιότητα:

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

C*-άλγεβρες

Ορισμός

Μια *άλγεβρα Banach* είναι μια μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μια πλήρη υποπολλαπλασιαστική νόρμα:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Μια *C*-άλγεβρα* είναι μια άλγεβρα *Banach* $\mathcal{A}$ με μια ενέλιξη $*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$:

$$(a+\lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*, \ (ab)^* = b^* a^*, \ a^{**} = a, \quad \text{για κάθε } ab, \in \mathcal{A}, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

που ικανοποιεί την *C*-ιδιότητα*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ένας *-ομομορφισμός $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ *C**-αλγεβρών είναι μια γραμμική απεικόνιση με $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ και $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.

Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι $\|a^*\| = \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, τότε $\|\mathbf{1}\| = 1$ και $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

Παραδείγματα

- $\mathbb{C}$
- $M_n(\mathbb{C})$: $n \times n$ πίνακες με τις συνήθεις πράξεις πινάκων, $[a_{ij}]^* = [\overline{a_{ji}}]$, $\|A\| = \sup\{\|A\xi\|_2 : \ \xi \in \ell^2, \ \|\xi\|_2 = 1\}$
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- $C(K)$: οι συνεχείς συναρτήσεις $f : K \to \mathbb{C}$, όπου K συμπαγής Hausdorff με τις κατά σημείο πράξεις, $f^*(x) = \overline{f(x)}$ και την νόρμα supremum.
- $C_0(X)$, όπου X τοπικά συμπαγής Hausdorff. Οι συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο, δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subseteq X$, ώστε $|f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in X \setminus K$. Με τις ίδιες πράξεις και νόρμα όπως στον $C(K)$.
- $\ell^\infty(S)$: οι φραγμένες συναρτήσεις ενός συνόλου S.

Μοναδοποίηση

Σε κάθε C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ χωρίς μονάδα μπορούμε να επισυνάψουμε μια:

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$$

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu),$$
$$(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$$
$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\| : \ b \in \mathcal{A}, \ \|b\| = 1\}.$$

Η $\widetilde{\mathcal{A}}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα $(0, 1)$ και η $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με το κλειστό ιδεώδες $\{(a, 0) : \ a \in \mathcal{A}\}$ της $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Φάσμα και φασματική ακτίνα

Ορισμός

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια μοναδιαία C^*-άλγεβρα και $Inv(\mathcal{A})$ το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων της, το φάσμα ενός στοιχείου $a \in \mathcal{A}$ είναι

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda \mathbf{1} - a \notin Inv(\mathcal{A})\}.$$

Αν η $\mathcal{A}$ είναι μη μοναδιαία, το φάσμα του $a \in \mathcal{A}$ ορίζεται ως

$$\sigma(a) = \sigma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(a).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, έπεται $0 \in \sigma(a)$.
Η φασματική ακτίνα του $a \in \mathcal{A}$ ορίζεται ως

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Θεώρημα

Για κάθε $p \in \mathbb{C}[z]$ και κάθε $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

Θεώρημα (Gelfand)

Το φάσμα $\sigma(a)$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του δίσκου με κέντρο 0 και ακτίνα $\|a\|$. Ειδικότερα, $r(a) \leq \|a\|$.

Παρατήρηση

- Αν $\mathcal{A} = C(K)$ όπου K συμπαγής *Hausdorff*, τότε $r(f) = \|f\|_\infty$, διότι $\sigma(f) = f(K)$.
- Αν $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ και

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε $\|a\| = 1$ ενώ $r(a) = 0$, διότι το φάσμα ενός πίνακα συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοτιμών του.

Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται:

- αυτοσυζυγές αν $a^* = a$
- φυσιολογικό αν $aa^* = a^*a$
- προβολή αν $a = a^* = a^2$
- ορθομοναδιαίο αν $aa^* = a^*a = \mathbf{1}$ στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα.

Πρόταση

1. $a^* = a \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$
2. $aa^* = a^*a = \mathbf{1} \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$
3. $a = b^*b \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{B}$ μια C^*-υπάλγεβρα μιας μοναδιαίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα της $\mathcal{A}$. Τότε

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b) \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Θεώρημα (Beurling)

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Λήμμα

Αν $aa^* = a^*a$, τότε $r(a) = \|a\|$.

Αν $a^*a = aa^*$, τότε $\|a\|^4 = \|a^*a\|^2 = \|(a^*a)^*(a^*a)\| = \|(a^2)^*a^2\| = \|a^2\|^2$. Επομένως $\|a\|^2 = \|a^2\|$ και επαγωγικά $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$ για κάθε n. Συνεπώς $r(a) = \lim \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$. □

Πρόταση

Σε μια *-άλγεβρα $\mathcal{A}$ υπάρχει το πολύ μια νόρμα $\|\cdot\|$ ώστε η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ να είναι C^*-άλγεβρα.

Πράγματι, $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a)$ διότι το a^*a είναι αυτοσυζυγές (άρα και φυσιολογικό). □

*-ομομορφισμοί

Κάθε *-ομομορφισμός $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C*-αλγεβρών επεκτείνεται μοναδικά σε ένα *-ομομορφισμό $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ με $\widetilde{\phi}(a, \lambda) = (\phi(a), \lambda)$.
Επίσης, $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a) \cup \{0\}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Αν επιπλέον, οι $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ έχουν μονάδα και $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Άρα, $r(\phi(a)) \leq r(a)$.

Θεώρημα

Κάθε *-ομομορφισμός $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C*-αλγεβρών είναι συστολή, δηλαδή $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Πράγματι,
$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. □

Χαρακτήρες

Καλούμε χαρακτήρες μιας άλγεβρας $\mathcal{A}$ τα στοιχεία του συνόλου

$$\Omega(\mathcal{A}) = \{\chi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \ \chi \neq 0, \ \text{ομομορφισμός}\}.$$

Θεώρημα

Αν η $\mathcal{A}$ είναι C^*-άλγεβρα και $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$, τότε $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ $\forall a \in \mathcal{A}$ και $\|\chi\| \leq 1$. Μάλιστα, αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε $\|\chi\| = \chi(\mathbf{1}) = 1$.

Μια μη αβελιανή C*-άλγεβρα μπορεί να μην έχει χαρακτήρες, π.χ. η $M_2(\mathbb{C})$. Ωστόσο, κάθε αβελιανή (μη μηδενική) C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ έχει πάντα χαρακτήρες και μάλιστα για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$, ώστε $|\chi(a)| = \|a\|$.

Αβελιανές C*-άλγεβρες

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή C^*-άλγεβρα.

- Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε το $\Omega(\mathcal{A})$ ταυτίζεται με το σύνολο των μεγιστικών ιδεωδών της $\mathcal{A}$ μέσω της αντιστοιχίας $\chi \mapsto \ker \chi$ και για κάθε $a \in \mathcal{A}$
$$\sigma(a) = \{\chi(a) : \ \chi \in \Omega(\mathcal{A})\}.$$
- Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$
$$\sigma(a) = \{\chi(a) : \ \chi \in \Omega(\mathcal{A})\} \cup \{0\}.$$

Και στις δύο περιπτώσεις, για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$,ώστε $|\chi(a)| = \|a\|$ και ειδικότερα $\Omega(\mathcal{A}) \neq \varnothing$.

Έστω $\mathcal{A}$ αβελιανή C*-άλγεβρα. Το $\Omega(\mathcal{A})$, ως υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{A}^*$, εφοδιάζεται με την σχετική ασθενή* τοπολογία, δηλ. την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης:

$$\chi_i \to \chi \iff \chi_i(a) \to \chi(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $\Omega(\mathcal{A})$ καλείται φάσμα της $\mathcal{A}$ και είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Ειδικότερα, αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε το $\Omega(\mathcal{A})$ είναι συμπαγές.

- Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ορίζεται η συνάρτηση (μετασχηματισμός Gelfand του a):

$$\widehat{a} \colon \Omega(\mathcal{A}) \to \mathbb{C},$$

$$\widehat{a}(\chi) = \chi(a).$$

- Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, έχουμε $\widehat{a} \in C_0(\Omega(\mathcal{A}))$.
  Πράγματι, η τοπολογία του $\Omega(\mathcal{A})$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει τις συναρτήσεις $\widehat{a}$, $a \in \mathcal{A}$ συνεχείς. Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$, το $\{\chi \in \Omega(\mathcal{A}) : |\chi(a)| \geq \varepsilon\}$ είναι ασθενώς* κλειστό στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{A}^*$ και άρα ασθενώς* συμπαγές (θεώρημα Αλάογλου).

Αναπαράσταση Gelfand

Θεώρημα (Gelfand)

Έστω $\mathcal{A}$ αβελιανή C^*-άλγεβρα. Η απεικόνιση

$$\mathcal{A} \to C_0(\Omega(\mathcal{A})),\ a \mapsto \widehat{a}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός και μάλιστα

$$\|\widehat{a}\|_\infty = r(a) = \|a\|, \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Αν η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία, τότε $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(\mathcal{A}))$, ενώ αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(\mathcal{A})) \cup \{0\}$.

Εφαρμογές στην μη αβελιανή περίπτωση

Έστω $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό στοιχείο μιας C*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ με μονάδα (ενδεχομένως μη αβελιανής). Η μικρότερη C*-υπάλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που περιέχει το a και την μονάδα είναι αβελιανή. Άρα, $C^*(\mathbf{1}, a) \simeq C(\Omega)$ για κάποιο συμπαγή χώρο Ω.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός)

Έστω $\mathcal{A}$ μοναδιαία C^*-άλγεβρα, $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό, δηλ. $aa^* = a^*a$ και $z \colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$, $z(\lambda) = \lambda$. Τότε, υπάρχει μοναδικός μοναδιαίος *-ομομορφισμός $\Phi_a \colon C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$, ώστε $\Phi_a(z) = a$. Μάλιστα, ο Φ_a είναι ισομετρία και $Im(\Phi_a) = C^*(\mathbf{1}, a)$.

- Για $f \in C(\sigma(a))$ γράφουμε $f(a) := \Phi_a(f)$.

Θεώρημα (Φασματικής απεικόνισης)

Έστω μοναδιαίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$ με $aa^* = a^*a$. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ και $g \in C(\sigma(f(a)))$,

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

και

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Θετικότητα

Ορισμός

Ένα στοιχείο a μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται **θετικό** αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $a \geq 0$. Επίσης, θέτουμε $\mathcal{A}^+ = \{a \in \mathcal{A} : \ a \geq 0\}$ και για δυο αυτοσυζυγή στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ γράφουμε $a \leq b$ αν $b - a \in \mathcal{A}^+$.

- Για ένα τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff X, $f \in C_0(X)$: $f \geq 0$ αν και μόνο αν $f(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, επειδή $\sigma(f) = \overline{f(X)}$ και τα αυτοσυζυγή στοιχεία της $C_0(X)$ είναι οι συναρτήσεις με πραγματικές τιμές.
- Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T \geq 0 \iff \langle T\xi | \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathcal{H}$.
- Κάθε $*$-ομομορφισμός $\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ διατηρεί την διάταξη:

$$a \geq 0 \implies \phi(a) \geq 0,$$

διότι $\phi(a^*) = a^*$ και $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)) \cup \{0\}$.

Λήμμα

Έστω $\mathcal{A}$ μοναδιαία C^*-άλγεβρα, $a = a^* \in \mathcal{A}$ και $\|a\| \le t$. Τότε:

$$a \ge 0 \iff \|a - t\mathbf{1}\| \le t.$$

Ιδέα: Αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό του λήμματος για την περίπτωση $(\mathcal{A}, \|\cdot\|) = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ περνώντας στην $C^*(\mathbf{1}, a) \simeq C(\sigma(a))$.

Πρόταση

Το $\mathcal{A}^+$ είναι κλειστός κώνος, δηλαδή κλειστό υποσύνολο της $\mathcal{A}$ και

$$a, b \in \mathcal{A}^+,\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies a + b,\ \lambda a \in \mathcal{A}^+.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία (γιατί;). Για $a, b \in \mathcal{A}^+$, έχουμε $\|a - \|a\|\mathbf{1}\| \le \|a\|$ και $\|b - \|b\|\mathbf{1}\| \le \|b\|$ άρα

$$\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\mathbf{1}\| \le \|a - \|a\|\mathbf{1}\| + \|b - \|b\|\mathbf{1}\| \le \|a\| + \|b\|.$$

Συνεπώς, $a + b \in \mathcal{A}^+$. Η συνεπαγωγή $a \in \mathcal{A}^+,\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lambda a \in \mathcal{A}^+$ προκύπτει από τον ορισμό της θετικότητας. $\square$

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα.

- $\forall a \in \mathcal{A}^+,\ \exists ! b \in \mathcal{A}^+,\ a = b^2$. Συμβολίζουμε το συγκεκριμένο b με $a^{1/2}$.
- Αν $b \in \mathcal{A}$, $b = b^*$, τότε $b^2 \geq 0$.
- Αν $a = a^*$ και θέσουμε $|a| = (a^2)^{1/2}$, $a^+ = \frac{1}{2}(|a| + a)$, $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$, τότε $a^+, a^- \in \mathcal{A}^+$ με $a = a^+ - a^-$ και $a^+a^- = 0$. Ειδικότερα, $\mathcal{A} = \mathrm{span}\mathcal{A}^+$.
- $\mathcal{A}^+ = \{a^*a : \ a \in \mathcal{A}\}$.
- Αν $a, b, c \in \mathcal{A}$ και a, b αυτοσυζυγή, τότε $a \leq b \implies c^*ac \leq c^*bc$.
- $0 \leq a \leq b \implies \|a\| \leq \|b\|$.
- $0 \leq a \leq b \implies a^{1/2} \leq b^{1/2}$.
- Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και a, b θετικά και αντιστρέψιμα, τότε $a \leq b \implies 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.
- Η συνεπαγωγή $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$ ισχύει μόνο για αβελιανές C^*-άλγεβρες.