Εισαγωγή στις C*-άλγεβρες II

Δημήτρης Ανδρέου

Σεμινάριο Συναρτησιακής Ανάλυσης και Αλγεβρών Τελεστών

2021

Επανάληψη

- C*-άλγεβρα = *-άλγεβρα Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, *)$ με την C*-ιδιότητα.

$$(a+\lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*,\ (ab)^* = b^* a^*,\ a^{**} = a$$

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \|a^* a\| = \|a\|^2$$

- (Gelfand) Το $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - a \notin Inv(\mathcal{A})\}$ είναι μη κενό και συμπαγές.
- (Beurling) $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\|$.
- Αν $aa^* = a^* a$, τότε $r(a) = \|a\|$.
- Η αλγεβρική δομή καθορίζει μοναδικά την τοπολογική (μοναδικότητα C*-νόρμας).
- Οι *-ομομορφισμοί μεταξύ C*-αλγεβρών είναι συστολές.
- $\Omega(\mathcal{A}) = \{\chi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C} :\ \chi \neq 0,$ ομομορφισμός$\}$.
  Για αβελιανή $\mathcal{A}$, το $\Omega(\mathcal{A})$ είναι μη κενό ($\forall a \in \mathcal{A}, \exists \chi \in \Omega(\mathcal{A}),\ \|a\| = |\chi(a)|$) και τοπικά συμπαγής χώρος με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.
- (Gelfand) $\mathcal{A}$ αβελιανή C*-άλγεβρα $\Rightarrow \mathcal{A} \simeq C_0(\Omega(\mathcal{A})),\ a \mapsto \widehat{a},\ \widehat{a}(\chi) = \chi(a)$.

Επανάληψη

- (Συνεχής συναρτησιακός λογισμός) Αν $aa^* = a^*a$, τότε

$$\exists!\ \Phi_a : C(\sigma(a)) \xrightarrow{\simeq} C^*(\mathbf{1}, a),\ 1 \mapsto \mathbf{1},\ p(z)|_{\sigma(a)} \mapsto p(a).$$

- Θετικά στοιχεία της $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^+ = \{a \in \mathcal{A} :\ \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+,\ a = a^*\}.$$

- Το $\mathcal{A}^+$ είναι κλειστός κώνος με $\mathcal{A} = \mathrm{span}\mathcal{A}^+$.
- $\mathcal{A}^+ = \{b^2 :\ b \in \mathcal{A}^+\} = \{a^*a :\ a \in \mathcal{A}\}$.
- Μάλιστα, κάθε $a \in \mathcal{A}^+$ γράφεται $a = b^2$ για μοναδικό $b \in \mathcal{A}^+$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $b = a^{1/2}$.

Διάταξη & προσεγγιστικές μονάδες

Για δυο αυτοσυζυγή στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$, γράφουμε $a \leq b$ αν $b - a \in \mathcal{A}^+$.

Ορισμός

Ένα δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ του $\mathcal{A}^+$ με $\|u_\lambda\| \leq 1$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ θα λέγεται προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$ αν

- $\lambda \leq \mu \Rightarrow u_\lambda \leq u_\mu$ και
- $\lim_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda a - a\| = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$.

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει προφανώς $\lim_{\lambda \in \Lambda} \|a u_\lambda - a\| = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και $\Lambda = \{a \in \mathcal{A}^+ : \ \|a\| < 1\}$. Το $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο και το δίκτυο $u_a = a$ για $a \in \Lambda$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα για την $\mathcal{A}$.

Ιδεώδη & προσεγγιστικές μονάδες

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{J}$ ένα κλειστό ιδεώδες της C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Τότε:

- Το $\mathcal{J}$ περιέχει ένα αύξον δίκτυο (u_λ) από θετικά στοιχεία νόρμας ≤ 1, τέτοιο ώστε $\lim_\lambda a u_\lambda = a$ για κάθε $a \in \mathcal{J}$.
- Το $\mathcal{J}$ είναι αυτομάτως αυτοσυζυγές και άρα C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$.
- Για κάθε προσεγγιστική μονάδα $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ του $\mathcal{J}$ και κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\|a + \mathcal{J}\| := \inf_{b \in \mathcal{J}} \|a + b\| = \lim_\lambda \|a - a u_\lambda\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|.$$

Πηλίκα & *-ομομορφισμοί

Πρόταση

Για κάθε κλειστό ιδεώδες $\mathcal{J}$ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ η άλγεβρα πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ είναι C^*-άλγεβρα ως προς τις συνήθεις πράξεις και την νόρμα πηλίκο:

$$(a+\mathcal{J})+(b+\mathcal{J})=(a+b)+\mathcal{J}, \quad (a+\mathcal{J})(b+\mathcal{J})=(ab)+\mathcal{J},$$

$$(a+\mathcal{J})^*=a^*+\mathcal{J}, \quad \|a+\mathcal{J}\|=\inf_{b\in\mathcal{J}}\|a+b\|.$$

Θεώρημα

Έστω $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ *-ομομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών.

- Αν ο ϕ είναι 1-1, τότε είναι αυτομάτως ισομετρία.
- Η εικόνα $\phi(\mathcal{A})$ είναι C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}$.

Ιδέα: Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι αν ο ϕ είναι 1-1, τότε $\|a^*a\|=\|\phi(a^*a)\|$. Αρκεί να περιορίσουμε τον ϕ στην $C^*(\mathbf{1},a)\simeq C(K)$ κλπ...
Για τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}/\ker\phi\simeq\phi(\mathcal{A})$, $a+\ker\phi\mapsto\phi(a)$.

Θετικά συναρτησοειδή

- Μια γραμμική απεικόνιση $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C*-αλγεβρών λέγεται θετική αν $\phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+$, δηλ. $\phi(a^*a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.
- Κάθε *-ομομορφισμός είναι θετική απεικόνιση.
- Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ λέγεται θετικό αν είναι θετική απεικόνιση.
- Τα θετικά γραμμικά συναρτησοειδή νόρμας 1 ονομάζονται καταστάσεις (states) της $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{\phi \in \mathcal{A}^* : \ \phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathbb{R}^+, \ \|\phi\| = 1\}.$$

- Οι χαρακτήρες (αν υπάρχουν) είναι states, $\Omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Παραδείγματα

(1) Το $tr : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ (\lambda_{ij}) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ii}$ είναι θετικό, αλλά όχι ομομορφισμός για $n > 1$ ($\Omega(M_n(\mathbb{C})) = \varnothing$ για $n > 1$). Επειδή $\|tr\| = n$, το $\frac{1}{n} tr$ είναι state.

(2) $\psi\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C},\ \psi(T) = \sum_{k=1} \langle T\xi_k | \xi_k \rangle$ όπου $\sum_{k=1} \|\xi_k\|^2 = 1$.

(3) $\delta_t\colon C(K) \to \mathbb{C}$ με $\delta_t(f) = f(t)$ όπου $t \in K$.

(4) $\phi\colon C(K) \to \mathbb{C}$, $\phi(f) = \int_K f(x) d\mu(x)$ όπου μ μέτρο πιθανότητας στον K.

(5) Για μια C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, ένα *-ομομορφισμό $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και ένα $\xi \in \mathcal{H}$ με $\|\xi\| = 1$, το $\psi(a) = \langle \rho(a)\xi | \xi \rangle$, $a \in \mathcal{A}$, είναι state.

Παρατήρηση: Τα παραδείγματα (1) έως και (4) είναι ειδικές περιπτώσεις του (5).

Ας δούμε το παράδειγμα (4): θέτοντας $\mathcal{H} = L^2(K, \mu)$, $\xi = 1$ και $\rho\colon C(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $(\rho(f)h)(x) = (f \cdot h)(x) = f(x)h(x),\ x \in K$, έχουμε

$$\phi(f) = \int_K f(x) d\mu(x) = \langle f \cdot 1 | 1 \rangle_{L^2} = \langle \rho(f)\xi | \xi \rangle.$$

Παρατηρείστε ότι ο $L^2(K, \mu)$ είναι η πλήρωση του $C(K)/N$ όπου $N = \{f \in C(K) : \phi(\bar{f} f) = \int |f|^2 d\mu = 0\}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle [f] | [g] \rangle = \int \bar{g} f d\mu = \phi(\bar{g} f)$.

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές. Η απεικόνιση

$$\sigma_\psi\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C},\ (a,b) \mapsto \psi(b^* a)$$

είναι μια θετική sesquilinear μορφή, δηλ. γραμμική στην 1η και αντιγραμμική στην 2η μεταβλητή και $\sigma_\psi(a,a) \geq 0$. Επομένως, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\psi(b^* a) = \overline{\psi(a^* b)},$$

$$|\psi(b^* a)| \leq \psi(a^* a)^{1/2} \psi(b^* b)^{1/2} \qquad \text{(ανισότητα Caushy-Schwarz).}$$

Ειδικότερα, η συνάρτηση

$$p_\psi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+,\ p_\psi(a) = \sigma_\psi(a,a)^{1/2} = \psi(a^* a)^{1/2}$$

είναι ημινόρμα.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές.

- Το ψ είναι αυτομάτως φραγμένο.
- $|\psi(a)|^2 \leq \|\psi\| \psi(a^* a)$ και $\psi(a^*) = \overline{\psi(a)}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Χαρακτηρισμός των θετικών συναρτησοειδών

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και $\psi \in \mathcal{A}^*$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Το ψ είναι θετικό.
- Για κάθε προσεγγιστική μονάδα $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$, $\|\psi\| = \lim_\lambda \psi(u_\lambda)$.
- Για κάποια προσεγγιστική μονάδα $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$, $\|\psi\| = \lim_\lambda \psi(u_\lambda)$.

Ειδικότερα, αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε το ψ είναι θετικό $\iff \psi(\mathbf{1}) = \|\psi\|$.

Πόρισμα

Για κάθε ζεύγος θετικών γραμμικών συναρτησοειδών ψ, ϕ μιας C^*-άλγεβρας, ισχύει $\|\psi + \phi\| = \|\psi\| + \|\phi\|$. Ειδικότερα, το $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ είναι κυρτό.

Θεώρημα

Για κάθε φυσιολογικό στοιχείο a μιας (μη μηδενικής) C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, υπάρχει ένα $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, ώστε $\|a\| = |\psi(a)|$.

Αναπαραστάσεις

Μια αναπαράσταση μιας C*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{H}, \rho)$ όπου ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ένας *-ομομορφισμός. Η $(\mathcal{H}, \rho)$ λέγεται πιστή αν είναι 1-1.

Ένα διάνυσμα $\xi \in \mathcal{H}$ λέγεται κυκλικό για την $(\mathcal{H}, \rho)$ αν ο υπόχωρος $\rho(\mathcal{A})\xi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.

Το ευθύ άθροισμα μιας οικογένειας $(\mathcal{H}_j, \rho_j)_{j\in J}$ αναπαραστάσεων της $\mathcal{A}$ είναι η αναπαράσταση $(\mathcal{H}, \rho)$ με

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j = \left\{ (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathcal{H}_j : \sum_j \|x_j\|^2_{\mathcal{H}_j} < \infty \right\},$$

$$\langle (x_j)_j | (y_j)_j \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_j \langle x_j | y_j \rangle_{\mathcal{H}_j}$$

και $\rho(a)((x_j)_j) = (\rho_j(a)x_j)_j$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Αναπαράσταση Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Θεώρημα (GNS)

Για κάθε θετικό γραμμικό συναρτησοειδές ϕ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ υπάρχει μια (μοναδική ως προς ορθομοναδιαία ισοδυναμία) αναπαράσταση $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ με κυκλικό διάνυσμα $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$, ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Μάλιστα, $\|\xi_\phi\|^2 = \|\phi\|$ και συνεπώς $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \iff \|\xi_\phi\| = 1$.

Έστω $(\mathcal{H}, \pi)$ και $(\mathcal{K}, \rho)$ δύο αναπαραστάσεις της $\mathcal{A}$ με κυκλικά διανύσματα $\xi \in \mathcal{H}$ και $\eta \in \mathcal{K}$ αντίστοιχα. Οι $(\mathcal{H}, \pi)$ και $(\mathcal{K}, \rho)$ λέγονται ορθομοναδιαία ισοδύναμες αν υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U \colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ με $\rho(a) = U\pi(a)U^*$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Τα δε ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $\exists$ ορθομοναδιαίος $U \colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ με $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, $\forall a \in \mathcal{A}$ και $U\xi = \eta$.
- $\langle \pi(a)\xi | \xi \rangle = \langle \rho(a)\eta | \eta \rangle$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Η μοναδική ως προς ορθομοναδιαία ισοδυναμία τριάδα $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ ονομάζεται αναπαράσταση GNS του ϕ.

Κατασκευή του $\mathcal{H}_\phi$

Έστω ϕ ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές μιας C*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ και

$$\mathcal{N}_\phi = \{a \in \mathcal{A} : \ \phi(a^*a) = 0\}.$$

Από την ανισότητα $|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$\mathcal{N}_\phi = \{a \in \mathcal{A} : \ \phi(ba) = 0 \ \forall b \in \mathcal{A}\}$$

και άρα το $\mathcal{N}_\phi$ είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες της $\mathcal{A}$.
Η απεικόνιση

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : (\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi) \times (\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi) \to \mathbb{C}, \ \langle a + \mathcal{N}_\phi | b + \mathcal{N}_\phi\rangle = \phi(b^*a),$$

είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ και η αντίστοιχη νόρμα δίνεται από

$$\|a + \mathcal{N}_\phi\| = \sqrt{\phi(a^*a)}.$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}_\phi$ την Hilbert-πλήρωση του $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$.

Κατασκευή της π_ϕ

Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $\pi_0(a) \colon \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \to \mathcal{H}_\phi$,

$$\pi_0(a)(b + \mathcal{N}_\phi) = ab + \mathcal{N}_\phi, \qquad b + \mathcal{N}_\phi \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi.$$

Παρατήρηση: Για κάθε $b \in \mathcal{A}$, το $\phi_b \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $\phi_b(x) = \phi(b^*xb)$, $x \in \mathcal{A}$, είναι θετικό και $\|\phi_b\| = \phi(b^*b)$.

Πράγματι, $\phi_b(a^*a) = \phi(b^*a^*ab) = \phi((ab)^*(ab)) \geq 0$ και $\|\phi_b\| = \lim_\lambda \phi_b(u_\lambda) =$ $= \lim_\lambda \phi(b^*u_\lambda b) = \phi(b^*b)$. $\square$

Ισχυρισμός: Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, $\|\pi_0(a)\| \leq \|a\|$ και άρα ο $\pi_0(a)$ επεκτείνεται μοναδικά σε ένα φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$.

$$\|\pi_0(a)(b + \mathcal{N}_\phi)\|^2 = \|ab + \mathcal{N}_\phi\|^2 = \langle ab + \mathcal{N}_\phi | ab + \mathcal{N}_\phi \rangle$$

$$= \phi((ab)^*(ab)) = \phi_b(a^*a) \leq \|\phi_b\| \|a^*a\| = \phi(b^*b)\|a\|^2$$

$$= \|b + \mathcal{N}_\phi\|^2 \|a\|^2$$

$\square$

Τέλος, η απεικόνιση $\pi_\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ είναι *-ομομορφισμός (αναπαράσταση).

Κατασκευή του ξ_ϕ

Βήμα 1: Υπάρχει ένα μοναδικό $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ ώστε $\phi(a) = \langle a + \mathcal{N}_\phi | \xi_\phi \rangle$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Η απεικόνιση $\psi_0 \colon \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \to \mathbb{C}$, $a + \mathcal{N}_\phi \mapsto \phi(a)$ είναι καλά ορισμένη γραμμική και $|\psi_0(a + \mathcal{N}_\phi)| = |\phi(a)| \le \phi(a^*a)^{1/2} = \|a + \mathcal{N}_\phi\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$. Επομένως υπάρχει $\psi \in \mathcal{H}_\phi^*$ που επεκτείνει το ψ_0. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$, ώστε $\psi(\eta) = \langle \eta | \xi_\phi \rangle$ για κάθε $\eta \in \mathcal{H}_\phi$. Άρα, το ξ_ϕ είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{H}_\phi$ με $\phi(a) = \langle a + \mathcal{N}_\phi | \xi_\phi \rangle$. $\square$

Βήμα 2: $\pi_\phi(a)\xi_\phi = a + \mathcal{N}_\phi$ και άρα το ξ_ϕ είναι κυκλικό για την $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$.

Για $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\langle b + \mathcal{N}_\phi | \pi_\phi(a)\xi_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a^*)(b + \mathcal{N}_\phi) | \xi_\phi \rangle = \langle a^*b + \mathcal{N}_\phi | \xi_\phi \rangle$$

$$= \phi(a^*b) = \langle b + \mathcal{N}_\phi | a + \mathcal{N}_\phi \rangle$$

και αφού ο $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}_\phi$ έπεται ότι $\pi_\phi(a)\xi_\phi = a + \mathcal{N}_\phi$. $\square$

Βήμα 3: $\|\xi_\phi\|^2 = \|\phi\|$.

$$\|\phi\| = \lim_\lambda \phi(u_\lambda) = \lim_\lambda \langle u_\lambda + \mathcal{N}_\phi | \xi_\phi \rangle = \lim_\lambda \langle \pi_\phi(u_\lambda)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle = \langle \xi_\phi | \xi_\phi \rangle = \|\xi_\phi\|^2. \quad \square$$

Καθολική αναπαράσταση

Το ευθύ άθροισμα $(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \pi_{\mathcal{A}})$ της οικογένειας των GNS αναπαραστάσεων $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)_{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$ λέγεται καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{H}_\phi, \quad \pi_{\mathcal{A}}(a)((x_\phi)_\phi) = (\pi_\phi(a)x_\phi)_\phi, \quad (x_\phi)_{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \ a \in \mathcal{A}.$$

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση $\pi_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι πιστή και άρα ισομετρία.

Έστω, λοιπόν, $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Υπάρχει $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$.

$$\|a\|^2 = \phi(a^*a) = \langle \pi_\phi(a^*a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a)^* \pi_\phi(a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle$$

$$= \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi | \pi_\phi(a)\xi_\phi \rangle = \|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|^2.$$

Επομένως, $\pi_\phi(a)\xi_\phi \neq 0$. Θεωρούμε την οικογένεια $(x_\psi)_{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$ με $x_\phi = \xi_\phi$ και $x_\psi = 0$ για κάθε $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \setminus \{\phi\}$. Τότε, $\pi_{\mathcal{A}}(a)((x_\psi)_\psi) \neq 0$ άρα $\pi_{\mathcal{A}}(a) \neq 0$. □

Άλγεβρες πινάκων

- Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα. Ο χώρος $M_n(\mathcal{A})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από την $\mathcal{A}$ είναι *-άλγεβρα με τις συνήθεις πράξεις πινάκων

$$[a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = [a_{ij} + \lambda b_{ij}], \quad [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right], \quad [a_{ij}]^* = [a_{ji}^*]$$

- Η απεικόνιση $\Phi\colon M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(n)})$, με

$$\Phi([T_{ij}])\,(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\sum_{j=1} T_{1j}\xi_1, \ldots, \sum_{j=1} T_{nj}\xi_n\right)$$

  είναι *-ισομορφισμός. Επομένως, θέτοντας $\|[T_{ij}]\| = \|\Phi([T_{ij}])\|$ έχουμε την μοναδική C*-νόρμα στην $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

- Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Η $\pi_n\colon M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $[a_{ij}] \mapsto [\pi(a_{ij})]$ είναι *-μονομορφισμός και η νόρμα $\|[a_{ij}]\| = \|[\pi(a_{ij})]\|$ είναι η μοναδική C*-νόρμα στην $M_n(\mathcal{A})$.