Παραδείγματα Αλγεβρών Τελεστών

Μιχάλης Ανούσης

Οκτώβριος 2021

τοπολογικές ομάδες

Ορισμός

Μια ομάδα G λέγεται τοπολογική ομάδα αν είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία τ.ω. οι

$$(x, y) \mapsto xy$$

και

$$x \mapsto x^{-1}$$

να είναι συνεχείς.

τοπολογικές ομάδες

Παραδείγματα

- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}_n, +)$
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$
- $(\mathbb{T}, \cdot)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- $S_n = \{\phi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n,\ 1-1 \text{ και επί}\}$, όπου $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$, με πράξη την σύνθεση
- $D_n =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1}$
- $S_\infty = \{\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ 1-1 \text{ και επί} : \exists\, k_\phi \text{ τ.ω.} \phi(n) = n, \forall n \geq k_\phi\}$
- $D_\infty =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1}$

τοπολογικές ομάδες

Παραδείγματα

Οι παρακάτω είναι ομάδες πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας}, \ \det A \neq 0\}$
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n, \mathbb{R}), \ \det A = 1\}$
- $O(n, \mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n, \mathbb{R}), \ A^t A = I\}$
- $GL(n, \mathbb{C}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας}, \ \det A \neq 0\}$
- $U(n) = \{A : A \in GL(n, \mathbb{C}), \ A^* A = I\}$
- $SU(n) = \{A : A \in U(n), \ \det A = I\}$

τοπολογικές ομάδες

Παραδείγματα

- $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- $H_d = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : k, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$
- $SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$
- F_n η ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες

τοπολογικές ομάδες

Πρόταση

G τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε η G έχει ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο. Το μέτρο αυτό είναι μοναδικό up to a scalar και λέγεται μέτρο Haar. Συμβολίζεται με $d\mu$.

Αν η G είναι συμπαγής θεωρούμε το μέτρο Haar με την κανονικοποίηση που ικανοποιεί $\mu(G) = 1$.

αναπαραστάσεις

H χώρος Hilbert, $U(B(H))$ η ομάδα των unitary τελεστών.

Ορισμός

H χώρος Hilbert και G τοπολογική ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to U(B(H))$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \quad \forall x \in G$.
3. Για κάθε $v \in H$ η απεικόνιση $x \mapsto \pi(x)v$ είναι συνεχής.

αναπαραστάσεις

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος V του H λέγεται αναλλοίωτος αν

$$\pi(x)v \in V, \ \forall v \in V, \ \forall x \in G$$

Πρόταση

V αναλλοίωτος, τότε $V^{\perp}$ αναλλοίωτος.

Απόδειξη

$w \in V^{\perp}$, $x \in G$, τότε $\forall v \in V$,

$$\langle \pi(x)w, v \rangle = \langle w, \pi(x)^{*}v \rangle = \left\langle w, \pi(x)^{-1}v \right\rangle = 0.$$

αναπαραστάσεις

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Η π λέγεται irreducible αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο H και ο $\{0\}$.

αναπαραστάσεις

Ορισμός

G ομάδα (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός $\pi_V(x)$ του $\pi(x)$ στον V, ορίζει ένα στοιχείο του $U(B(V))$. Η $g \to \pi_V(x)$ είναι μια αναπαράσταση $G \to U(B(V))$ και λέγεται υποαναπαράσταση της π.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Η απεικόνιση $x \to (\pi_1 \oplus \pi_2)(x) : G \to B(H_1 \oplus H_2)$ που ορίζεται $(\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(v_1 + v_2) = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2$ λέγεται ευθύ άθροισμα των π_1, π_2.

αναπαραστάσεις

Ορισμός

$(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2)$ αναπαραστάσεις της G. Λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει $U : H_1 \to H_2$ ισομετρία επί, τέτοια ώστε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

$\forall x \in G$.

Η ισοδυναμία αναπαραστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός

$\hat{G}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των unitary irreducible αναπαραστάσεων της G.

αναπαραστάσεις

Παραδείγματα

- Η τετριμμένη, $H = \mathbb{C}$, $G \to \mathbb{T}$, $\pi(x) = 1, \;\forall x \in G$.
- $L^2(G)$ ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Η αναπαράσταση λ που ορίζεται

$$\lambda(y)f(x) = f(y^{-1}x)$$

λέγεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.

αναπαραστάσεις

Παραδείγματα

- $\mathbb{R}$, στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε
  Για $\lambda \in \mathbb{R}$
  $$\pi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$$
  $\hat{\mathbb{R}} = \{\pi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{T}$, στο $\mathbb{C}$:
  Αν $x \in \mathbb{T}$, $x = 2\pi i t$ για $t \in [0, 1)$.
  Θεωρούμε $n \in \mathbb{Z}$.
  Θέτουμε για $x \in \mathbb{T}$, $x = 2\pi i t$
  $$\pi_n(x) = e^{2\pi i n t}$$
  $\hat{\mathbb{T}} = \{\pi_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

αναπαραστάσεις

Παράδειγμα

- $\mathbb{Z}_n$

  $\mathbb{Z}_n$, ορίζουμε για $k = 0, 1, 2, ...n-1$

  $\pi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

$$\pi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}}$$

$$\widehat{\mathbb{Z}_n} = \{\pi_k : k = 0, 1, 2, ...n-1\}$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \oplus \pi_k$$

αναπαραστάσεις

Παραδείγματα

G πεπερασμένη, S πεπερασμένο σύνολο στο οποίο δρα η G. $\mathbb{C}(S)$ δ.χ. πάνω στο $\mathbb{C}$ με βάση $(e_s)_{s\in S}$. Ορίζουμε

$$\left\langle \sum \lambda_s e_s, \sum \mu_s e_s \right\rangle = \sum \lambda_s \overline{\mu_s}.$$

$$\pi(x)e_s = e_{xs}.$$

αναπαραστάσεις

Παραδείγματα

- $D_4 =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^4 = 1, aba = b^{-1}$

$$\pi_0(a) = \pi_0(b) = 1$$

$$\pi_1(a) = -1, \pi_1(b) = 1$$

$$\pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1$$

$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = -1$$

$$\pi_4(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{D_4} = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$$

αναπαραστάσεις

Παραδείγματα

- V_n: ομογενή πολυώνυμα βαθμού n δύο μιγαδικών μεταβλητών. Αν $\phi_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}$, τα ϕ_k για $k = 0, 1, \ldots, n$ αποτελούν βάση του V_n.

  Ορίζουμε

$$\left\langle \sum a_k \phi_k, \sum b_k \phi_k \right\rangle = \sum k!(n-k)! a_k \overline{b_k}.$$

$SU(2)$, στο V_n: Αν $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(\pi_n(x)f)(z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2).$$

$$\widehat{SU(2)} = \{\pi_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Άλγεβρα ομάδας

$L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ με την κατά σημείο πρόσθεση, γινόμενο την συνέλιξη

$$f * g(x) = \int_{y \in G} f(xy^{-1})g(y)d\mu(y)$$

και ενέλιξη $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.
Η $L^1(G)$ με την πράξη και την ενέλιξη λέγεται άλγεβρα της ομάδας G.

Άλγεβρα ομάδας

Πρόταση

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Τότε η $f \mapsto \pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)d\mu(x)$ ικανοποιεί

1. $\pi : L^1(G) \to B(H)$ *είναι γραμμική.*
2. $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$
3. $\pi(f^*) = \pi(f)^*$
4. $\overline{\pi(L^1(G))H} = H$

Αντίστροφα: Αν $\phi : L^1(G) \to B(H)$ ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, τότε υπάρχει μια unitary αναπαράσταση π της G τ.ω. $\phi(f) = \pi(f)$.

Προβλήματα Θεωρίας Αναπαραστάσεων

1. Να υπολογιστεί το $\hat{G}$.
2. Να μελετηθεί η λ.
3. Για $f \in L^1(G)$ να βρεθεί η f απο τα $\pi(f), \pi \in \hat{G}$.

συμπαγείς ομάδες

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε

$$\lambda = \sum_{\pi \in \hat{G}} \oplus \pi^{d_\pi}$$

Schur

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.:

1. *$A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ για κάθε $x \in G$, τότε $A = \lambda I$.*
2. *π irreducible.*

Απόδειξη ($\dim H < \infty$). Αν π irreducible και $A\pi(x) = \pi(x)A$ για κάθε $x \in G$, τότε αν λ είναι ιδιοτιμή του A, ο χώρος των ιδιοδιανυσμάτων για την λ είναι αναλλοίωτος, άρα ίσος με H. 'Αρα $A = \lambda I$.
Αν π οχι irreducible η προβολή σε έναν αναλλοίωτο υπόχωρο ικανοποιεί $A\pi(x) = \pi(x)A$. $\square$

Schur

Πόρισμα

G αβελιανή, (π, H) irreducible, τότε $\dim H = 1$.

Απόδειξη Αν $x \in G$, τότε $\pi(x)$ μετατίθεται με τα $\pi(y)$, $y \in G$ άρα $\pi(x)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Αν $\dim H > 1$, τότε κάθε υπόχωρος είναι αναλλοίωτος, και η π δεν είναι irreducible. $\square$

Schur

$$S \subseteq B(H),\ S' = \{X \in B(H) : AX = XA, \quad \forall A \in S\}$$

Παρατήρηση

$\{\pi(x) : x \in G\}'$ *είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα και*

$$\{\pi(x) : x \in G\}' = \mathbb{C}I \Leftrightarrow \pi \textit{ irreducible}.$$

Schur

$\mathcal{A}$ C^*-αλγεβρα, (π, H) αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Η (π, H) λέγεται irreducible αν το σύνολο $\{\pi(A) : A \in \mathcal{A}\}$ δεν έχει κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο.

Πρόταση

$\mathcal{A}$ C^*-αλγεβρα, (π, H) αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Τότε τα ε.ε.ι.:

1. *$X \in B(H)$, $A\pi(X) = \pi(X)A$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε $X = \lambda I$.*
2. *π irreducible.*

Το (1) λέει ότι $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$.

von Neumann άλγεβρες

Ορισμός

Μια $*$-υπάλγεβρα με μονάδα του $B(H)$, που είναι wot κλειστή λέγεται άλγεβρα von Neumann.

Θεώρημα (von Neumann)

$\mathcal{A}$ $*$-υπάλγεβρα με μονάδα του $\mathrm{B}(\mathrm{H})$. Τα ε.ε.ι.

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$
2. *$\mathcal{A}$ wot κλειστή*

von Neumann άλγεβρες

G τοπολογική ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G.
Τότε τα

$$\{\pi(x) : x \in G\}'$$

$$\{\pi(x) : x \in G\}''$$

είναι von Neumann άλγεβρες.

το κέντρο

$\mathcal{A}$ άλγεβρα von Neumann, p προβολή στο κέντρο (δηλαδή $pa = ap$ γιά κάθε $a \in \mathcal{A}$).
Έχουμε για $a \in \mathcal{A}$

$$a = (p + p^{\perp})a(p + p^{\perp}) =$$

$$pap + pap^{\perp} + p^{\perp}ap + p^{\perp}ap^{\perp} = pap + p^{\perp}ap^{\perp}.$$

Άρα

$$\mathcal{A} = p\mathcal{A}p \oplus p^{\perp}\mathcal{A}p^{\perp},$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in p\mathcal{A}p, y \in p^{\perp}\mathcal{A}p^{\perp} \right\}$$

το κέντρο

Ορισμός

Μια άλγεβρα von Neumann λέγεται factor αν το κέντρο της είναι το $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$

vN(G)

G τοπολογική ομάδα, λ η αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.

Ορισμός

Η von Neumann άλγεβρα της G είναι η wot κλειστή θήκη του συνόλου των γραμμικών συνδυασμών των $\lambda(x)$, $x \in G$.

Παραδείγματα

- Η vN$(\mathbb{R})$ είναι η $L^\infty(\mathbb{R})$.
- Η vN$(\mathbb{T})$ είναι η $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.
- Η vN$(\mathbb{Z})$ είναι η $L^\infty(\mathbb{T})$.

vN(G)

G διακριτή, λ η αριστερή κανονική αναπαράσταση.
Η $\{e_x : x \in G\}$ είναι βάση του $\ell^2(G)$.
Έχουμε

$$\langle \lambda(x)e_y, e_z \rangle = \langle e_{xy}, e_z \rangle = \delta_{xy,z}1$$

Το

$$\langle \lambda(x)e_y, e_z \rangle$$

εξαρτάται μόνον απο το zy^{-1}.

vN(G)

Παράδειγμα

$G = \mathbb{Z}_5$

$$\lambda(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

vN(G)

Παράδειγμα

$G = \mathbb{Z}$

$$\lambda(1) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

vN(G)

Παράδειγμα

$$a = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

το κέντρο

G διακριτή.
$\{e_y : y \in G\}$ η βάση του $\ell^2(G)$.
Για $x \in G$

$$\lambda(x)e_y = e_{xy}$$
$$\rho(x)e_y = e_{yx^{-1}}.$$

$c \in \mathrm{vN}(G)$
Τότε
$ce_e = \sum_{y\in G} c_y e_y$ άρα $(c_y) \in \ell^2$.

το κέντρο

Αν c μετατίθεται με κάθε $b \in \mathrm{vN}(G)$, τότε:

$$ce_e = \lambda(x)c\lambda(x)^{-1}e_e = \lambda(x)c\rho(x)e_e = \lambda(x)\rho(x)ce_e$$
$$= \lambda(x)\rho(x)\left(\sum_{y\in G} c_y e_y\right) = \left(\sum_{y\in G} c_y e_{xyx^{-1}}\right) = \left(\sum_{y\in G} c_{x^{-1}yx} e_y\right)$$

Έχουμε $ce_e = \sum_{y\in G} c_y e_y$ και άρα

$$c_{x^{-1}yx} = c_y$$

για κάθε $x \in G$.

Επειδή $(c_x) \in \ell^2$, αν η κλάση του y είναι άπειρη, $c_y = 0$.

το κέντρο

Αν η κλάση του y για κάθε $y \in G, y \neq e$ είναι άπειρη, τότε $c_y = 0$ για κάθε $y \in G, y \neq e$ και επειδή c είναι στο κέντρο της $vn(G)$ έχουμε

$$ce_y = c\lambda(y)e_e = \lambda(y)ce_e = \lambda(y)c_e e_e = c_e\lambda(y)c_e = c_e e_y$$

και άρα $c = c_e I$.

Θεώρημα

Μιά διακριτή ομάδα G, λέγεται icc (infinite conjugacy class) αν η κλάση συζυγίας κάθε στοιχείου $y \in G, y \neq e$ είναι άπειρη.

Θεώρημα

Αν G είναι icc τότε η vN(G) είναι factor.

Παραδείγματα

- free group
- $S_\infty = \{\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ 1-1 \text{ και επί} : \exists\, k_\phi \text{ τ.ω.} \phi(n) = n, \forall n \geq k_\phi\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}$

Ερώτηση

Είναι οι
$vN(F_2)$ *και* $vN(F_3)$ *ισόμορφες;*