Η ανισότητα Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss

Αλέξανδρος Εσκενάζης
(κοινή εργασία με τον Γ. Μοσχίδη)

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σεμινάριο Συναρτησιακής Ανάλυσης και Αλγεβρών Τελεστών

22 Μαΐου 2020

Η ανισότητα Brunn–Minkowski

Η ανισότητα Brunn–Minkowski

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski είναι η ακόλουθη. Για κάθε συμπαγή σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\left|\lambda A + (1-\lambda)B\right|^{\frac{1}{n}} \geq \lambda |A|^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)|B|^{\frac{1}{n}},$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue και ο γραμμικός συνδυασμός συνόλων κατά Minkowski ορίζεται ως

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \left\{\lambda a + (1-\lambda)b : \ a \in A, b \in B\right\}.$$

Η ανισότητα Brunn–Minkowski

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski είναι η ακόλουθη. Για κάθε συμπαγή σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\left|\lambda A + (1-\lambda)B\right|^{\frac{1}{n}} \geq \lambda |A|^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)|B|^{\frac{1}{n}},$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue και ο γραμμικός συνδυασμός συνόλων κατά Minkowski ορίζεται ως

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \left\{\lambda a + (1-\lambda)b : \ a \in A, b \in B\right\}.$$

Αυτή η ανισότητα εκφράζει την 'βέλτιστη κυρτότητα' του μέτρου Lebesgue και γίνεται ισότητα αν τα A και B είναι κυρτά και ομοιοθετικά.

Η ανισότητα Brunn–Minkowski

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski είναι η ακόλουθη. Για κάθε συμπαγή σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\left|\lambda A + (1-\lambda)B\right|^{\frac{1}{n}} \geq \lambda |A|^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)|B|^{\frac{1}{n}},$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue και ο γραμμικός συνδυασμός συνόλων κατά Minkowski ορίζεται ως

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \left\{\lambda a + (1-\lambda)b : \; a \in A, b \in B\right\}.$$

Αυτή η ανισότητα εκφράζει την 'βέλτιστη κυρτότητα' του μέτρου Lebesgue και γίνεται ισότητα αν τα A και B είναι κυρτά και ομοιοθετικά.

Επιλέγοντας ως B μια Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας ε και παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$, συνάγουμε την κλασική ισοπεριμετρική ανισότητα: μεταξύ όλων των μετρήσιμων συνόλων δοσμένου όγκου, οι Ευκλείδειες μπάλες έχουν ελάχιστη επιφάνεια.

Η ανισότητα Brunn–Minkowski (συνέχεια)

Η σύγχρονη θεωρία Brunn–Minkowski ασχολείται με ανισότητες που συγκρίνουν το *μέγεθος* του *αθροίσματος* συνόλων με το *μέγεθος* των επιμέρους *προσθετέων*, όπου το *μέγεθος* και το *άθροισμα* μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά απ'ότι στην κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski.

Η ανισότητα Brunn–Minkowski (συνέχεια)

Η σύγχρονη θεωρία Brunn–Minkowski ασχολείται με ανισότητες που συγκρίνουν το *μέγεθος* του *αθροίσματος* συνόλων με το *μέγεθος* των επιμέρους *προσθετέων*, όπου το *μέγεθος* και το *άθροισμα* μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά απ'ότι στην κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski.

Σε αυτή την ομιλία, κάνουμε τις εξής συμβάσεις:

• Το *άθροισμα* θα είναι το σύνηθες άθροισμα Minkowski μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

• Το *μέγεθος* ενός τέτοιου συνόλου A θα μετριέται με το μέτρο Gauss,

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|x|^2/2} \, \mathrm{d}x,$$

όπου $|x|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος x.

Η ανισότητα του Ehrhard

Η ανισότητα του Ehrhard

Η σημαντικότερη ανισότητα τέτοιου τύπου για το μέτρο Gauss είναι η ανισότητα του Ehrhard (1983), σύμφωνα με την οποία για κάθε Borel σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\Phi^{-1}\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda \Phi^{-1}\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\big(\gamma_n(B)\big),$$

όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη της Gaussian συνάρτησης κατανομής $\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x])$.

Η ανισότητα του Ehrhard

Η σημαντικότερη ανισότητα τέτοιου τύπου για το μέτρο Gauss είναι η ανισότητα του Ehrhard (1983), σύμφωνα με την οποία για κάθε Borel σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\Phi^{-1}\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda\Phi^{-1}\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\big(\gamma_n(B)\big),$$

όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη της Gaussian συνάρτησης κατανομής $\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x])$.

Η αρχική απόδειξη του Ehrhard απαιτούσε την κυρτότητα των συνόλων A, B. Η παραπάνω γενίκευση οφείλεται στον Borell (2003).

Η ανισότητα του Ehrhard

Η σημαντικότερη ανισότητα τέτοιου τύπου για το μέτρο Gauss είναι η ανισότητα του Ehrhard (1983), σύμφωνα με την οποία για κάθε Borel σύνολα A, B στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\Phi^{-1}\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda \Phi^{-1}\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\big(\gamma_n(B)\big),$$

όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη της Gaussian συνάρτησης κατανομής $\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x])$.

Η αρχική απόδειξη του Ehrhard απαιτούσε την κυρτότητα των συνόλων A, B. Η παραπάνω γενίκευση οφείλεται στον Borell (2003).

Από την ανισότητα Ehrhard έπεται επίσης η ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο Gauss: μεταξύ όλων των μετρήσιμων συνόλων δοσμένου μέτρου Gauss, ημίχωροι της μορφής $\{x \in \mathbb{R}^n : \; x_1 < s\}$ έχουν ελάχιστη Gaussian επιφάνεια.

Η ανισότητα του Ehrhard (συνέχεια)

Όπως και η ανισότητα Brunn–Minkowski για το μέτρο Lebesgue, έτσι και η ανισότητα Ehrhard εκφράζει την βέλτιστη κυρτότητα του μέτρου Gauss σε όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη έννοια.

Η ανισότητα του Ehrhard (συνέχεια)

Όπως και η ανισότητα Brunn–Minkowski για το μέτρο Lebesgue, έτσι και η ανισότητα Ehrhard εκφράζει την βέλτιστη κυρτότητα του μέτρου Gauss σε όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη έννοια.
Έστω $\zeta_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ με $0 < \gamma_n(A), \gamma_n(B) < 1$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\zeta_n\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda\zeta_n\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\zeta_n\big(\gamma_n(B)\big)$$

Η ανισότητα του Ehrhard (συνέχεια)

Όπως και η ανισότητα Brunn–Minkowski για το μέτρο Lebesgue, έτσι και η ανισότητα Ehrhard εκφράζει την βέλτιστη κυρτότητα του μέτρου Gauss σε όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη έννοια. Έστω $\zeta_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ με $0 < \gamma_n(A), \gamma_n(B) < 1$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\zeta_n\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda\zeta_n\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\zeta_n\big(\gamma_n(B)\big)$$

Τότε, διαλέγοντας $A = \{x :\ x_1 < a\}$ και $B = \{x :\ x_1 < b\}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\zeta_n \circ \Phi$ είναι κοίλη. Έτσι, η $\zeta_n = \Phi^{-1}$ είναι βέλτιστη.

Η ανισότητα του Ehrhard (συνέχεια)

Όπως και η ανισότητα Brunn–Minkowski για το μέτρο Lebesgue, έτσι και η ανισότητα Ehrhard εκφράζει την βέλτιστη κυρτότητα του μέτρου Gauss σε όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την ακόλουθη έννοια. Έστω $\zeta_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ με $0 < \gamma_n(A), \gamma_n(B) < 1$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\zeta_n\big(\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)\big) \geq \lambda\zeta_n\big(\gamma_n(A)\big) + (1-\lambda)\zeta_n\big(\gamma_n(B)\big)$$

Τότε, διαλέγοντας $A = \{x : \ x_1 < a\}$ και $B = \{x : \ x_1 < b\}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\zeta_n \circ \Phi$ είναι κοίλη. Έτσι, η $\zeta_n = \Phi^{-1}$ είναι βέλτιστη. Ειδικότερα, η ανισότητα του Ehrhard γίνεται ισότητα όταν τα A και B είναι παράλληλοι ημίχωροι όπως παραπάνω.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Το 2010, οι Gardner και Zvavitch δημοσίευσαν μια εργασία που μελετούσε συστηματικά ανισοτήτες τύπου Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss, η οποία έκλεινε με το εξής πρόβλημα.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Το 2010, οι Gardner και Zvavitch δημοσίευσαν μια εργασία που μελετούσε συστηματικά ανισοτήτες τύπου Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss, η οποία έκλεινε με το εξής πρόβλημα.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch, 2010)

Αληθεύει ότι για κάθε κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 και κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big(\lambda K + (1-\lambda)L\big)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda\gamma_n(K)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{1}{n}} \ ;$$

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Το 2010, οι Gardner και Zvavitch δημοσίευσαν μια εργασία που μελετούσε συστηματικά ανισοτήτες τύπου Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss, η οποία έκλεινε με το εξής πρόβλημα.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch, 2010)

Αληθεύει ότι για κάθε κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 και κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big(\lambda K + (1-\lambda)L\big)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda\gamma_n(K)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{1}{n}} \ ;$$

- Η δύναμη $\frac{1}{n}$ είναι η καλύτερη δυνατή.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Το 2010, οι Gardner και Zvavitch δημοσίευσαν μια εργασία που μελετούσε συστηματικά ανισοτήτες τύπου Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss, η οποία έκλεινε με το εξής πρόβλημα.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch, 2010)

Αληθεύει ότι για κάθε κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 και κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big(\lambda K + (1-\lambda)L\big)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda\gamma_n(K)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{1}{n}} \ ;$$

- Η δύναμη $\frac{1}{n}$ είναι η καλύτερη δυνατή.
- Διαλέγοντας $K = [-1,1]^n$, $L = \{x\}$ και $x \to \infty$, συμπεραίνουμε πως η παραπάνω ανισότητα Brunn–Minkowski δεν μπορεί να ισχύει για όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

• Το 2013, οι Nayar και Tkocz έδειξαν πως η απάντηση είναι όχι ακόμη και για $n = 2$ αλλά το παρακάτω πρόβλημα παρέμεινε ανοικτό.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

• Το 2013, οι Nayar και Tkocz έδειξαν πως η απάντηση είναι όχι ακόμη και για $n = 2$ αλλά το παρακάτω πρόβλημα παρέμεινε ανοικτό.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch 2.0)

Ισχύει η ανισότητα Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss αν τα κυρτά σύνολα K και L είναι **συμμετρικά**;

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

• Το 2013, οι Nayar και Tkocz έδειξαν πως η απάντηση είναι όχι ακόμη και για $n = 2$ αλλά το παρακάτω πρόβλημα παρέμεινε ανοικτό.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch 2.0)

Ισχύει η ανισότητα Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss αν τα κυρτά σύνολα K και L είναι **συμμετρικά**;

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Ναι.

Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

• Το 2013, οι Nayar και Tkocz έδειξαν πως η απάντηση είναι όχι ακόμη και για $n = 2$ αλλά το παρακάτω πρόβλημα παρέμεινε ανοικτό.

Ερώτηση (Gardner–Zvavitch 2.0)

Ισχύει η ανισότητα Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss αν τα κυρτά σύνολα K και L είναι **συμμετρικά**;

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Ναι.

Παρατήρηση. Είναι ήδη γνωστό από την δουλειά των Gardner και Zvavitch ότι η ανισότητα Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss δεν έπεται από την ανισότητα του Ehrhard, ούτε το αντίστροφο.

Ο ρόλος της συμμετρίας στην θεωρία Brunn–Minkowski

Ο ρόλος της συμμετρίας στην θεωρία Brunn–Minkowski

Είναι γνωστό ότι το μέτρο Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο, δηλαδή

$$\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq \gamma_n(A)^{\lambda}\gamma_n(B)^{1-\lambda}$$

για κάθε Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch ισχυροποιεί την λογαριθμική κοιλότητα του γ_n για συμμετρικά κυρτά σύνολα.

Ο ρόλος της συμμετρίας στην θεωρία Brunn–Minkowski

Είναι γνωστό ότι το μέτρο Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο, δηλαδή

$$\gamma_n\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq \gamma_n(A)^{\lambda}\gamma_n(B)^{1-\lambda}$$

για κάθε Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch ισχυροποιεί την λογαριθμική κοιλότητα του γ_n για συμμετρικά κυρτά σύνολα.

Ένα άλλο παράδειγμα όπου η συμμετρία ισχυροποιεί την λογαριθμική κοιλότητα του μέτρου Gauss είναι η σημαντική B-ανισότητα των Cordero, Fradelizi και Maurey (2004): για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε $a, b > 0$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big(a^{\lambda}b^{1-\lambda}K\big) \geq \gamma_n(aK)^{\lambda}\gamma_n(bK)^{1-\lambda}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε κυρτό σύνολο K και $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big((\lambda a + (1-\lambda)b)K\big) \geq \gamma_n(aK)^{\lambda}\gamma_n(bK)^{1-\lambda},$$

αλλά η συμμετρία είναι απαραίτητη εαν θέλουμε να αντικαταστήσουμε τον αριθμητικό μέσο από τον γεωμετρικό μέσο.

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

• (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

• (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.

• (Colesanti–Livshyts–Marsiglietti, 2017) Τα K και L είναι μικρές διαταραχές της Ευκλείδειας μπάλας.

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

- (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.
- (Colesanti–Livshyts–Marsiglietti, 2017) Τα K και L είναι μικρές διαταραχές της Ευκλείδειας μπάλας.
- (Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch, 2017) Τα K και L είναι ιδεώδη.

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

• (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.
• (Colesanti–Livshyts–Marsiglietti, 2017) Τα K και L είναι μικρές διαταραχές της Ευκλείδειας μπάλας.
• (Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch, 2017) Τα K και L είναι ιδεώδη.
• (Ritoré–Yepes Nicolás, 2018) Τα K και L είναι ασθενώς unconditional.

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

• (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.
• (Colesanti–Livshyts–Marsiglietti, 2017) Τα K και L είναι μικρές διαταραχές της Ευκλείδειας μπάλας.
• (Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch, 2017) Τα K και L είναι ιδεώδη.
• (Ritoré–Yepes Nicolás, 2018) Τα K και L είναι ασθενώς unconditional.
• Στην διάσταση $n = 2$ η γενική ανισότητα έπεται συνδυάζοντας αποτελέσματα των Böröczky–Lutwak–Yang–Zhang (2012), Σαρόγλου (2016) και Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch (2017).

Αποτελέσματα για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch

Οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Brunn–Minkowski στον χώρο Gauss ήταν γνωστές:

• (Gardner–Zvavitch, 2010) Τα K και L είναι ομοιοθετικά παραλληλεπίπεδα που περιέχουν το 0 ή πολλαπλάσια του ίδιου συμμετρικού κυρτού συνόλου.
• (Colesanti–Livshyts–Marsiglietti, 2017) Τα K και L είναι μικρές διαταραχές της Ευκλείδειας μπάλας.
• (Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch, 2017) Τα K και L είναι ιδεώδη.
• (Ritoré–Yepes Nicolás, 2018) Τα K και L είναι ασθενώς unconditional.
• Στην διάσταση $n = 2$ η γενική ανισότητα έπεται συνδυάζοντας αποτελέσματα των Böröczky–Lutwak–Yang–Zhang (2012), Σαρόγλου (2016) και Livshyts–Marsiglietti–Nayar–Zvavitch (2017).
• (Böröczky–Καλαντζόπουλος, 2020) Τα K και L είναι συμμετρικά ως προς n υπερεπίπεδα.

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch

Το 2018, οι Kolesnikov και Livshyts χρησιμοποίησαν μια διαφορετική τεχνική για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (ουσιαστικά βασιζόμενοι σε προηγούμενη δουλειά των Kolesnikov και E. Milman). Η βασική ιδέα είναι να αποδείξουν την ανισότητα Brunn–Minkowski τοπικά, δηλαδή όταν το L είναι μια μικρή διαταραχή του K.

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch

Το 2018, οι Kolesnikov και Livshyts χρησιμοποίησαν μια διαφορετική τεχνική για το πρόβλημα των Gardner–Zvavitch (ουσιαστικά βασιζόμενοι σε προηγούμενη δουλειά των Kolesnikov και E. Milman). Η βασική ιδέα είναι να αποδείξουν την ανισότητα Brunn–Minkowski τοπικά, δηλαδή όταν το L είναι μια μικρή διαταραχή του K.

Ο γεννήτορας της ημιομάδας Ornstein–Uhlenbeck είναι ο ελλειπτικός διαφορικός τελεστής $\mathscr{L}$ του οποίου η δράση σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathscr{L}u(x) = \Delta u(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u(x)$$

και για συναρτήσεις $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{L}u \cdot v \, \mathrm{d}\gamma_n.$$

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

Θα συμβολίζουμε με $\|A\|_{\mathrm{HS}}$ την Hilbert–Schmidt ενός πίνακα A, που ορίζεται ως $\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

Θα συμβολίζουμε με $\|A\|_{\mathrm{HS}}$ την Hilbert–Schmidt ενός πίνακα A, που ορίζεται ως $\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

Οι Kolesnikov–Livshyts απέδειξαν την παρακάτω local-to-global πρόταση.

Πρόταση (Kolesnikov–Livshyts, 2018)

Έστω $\delta \in [0,1]$ τέτοιο ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε διαφορίσιμη άρτια συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L} u = 1$ στο K ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathscr{F}(u) := \frac{1}{\gamma_n(K)} \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\gamma_n \geq \frac{\delta}{n}.$$

Τότε για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$,

$$\gamma_n\big(\lambda K + (1-\lambda)L\big)^{\frac{\delta}{n}} \geq \lambda \gamma_n(K)^{\frac{\delta}{n}} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{\delta}{n}}.$$

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

Το κύριο αποτέλεσμα τους ήταν ότι για κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το 0 και *κάθε* διαφορίσιμη συνάρτηση με $\mathscr{L}u = 1$ στο K, έχουμε $\mathscr{F}(u) \geq \frac{1}{2n}$. Έτσι, έπεται η Gaussian ανισότητα Brunn–Minkowski με εκθέτη $\frac{1}{2n}$ για κυρτά σύνολα που περιέχουν το 0.

Το τοπικό πρόβλημα Gardner–Zvavitch (συνέχεια)

Το κύριο αποτέλεσμα τους ήταν ότι για κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το 0 και *κάθε* διαφορίσιμη συνάρτηση με $\mathscr{L}u = 1$ στο K, έχουμε $\mathscr{F}(u) \geq \frac{1}{2n}$. Έτσι, έπεται η Gaussian ανισότητα Brunn–Minkowski με εκθέτη $\frac{1}{2n}$ για κυρτά σύνολα που περιέχουν το 0.

Θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο κάτω φράγμα στην συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε διαφορίσιμη άρτια συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L}u = 1$ στο K ικανοποιεί την ανισότητα

$$\frac{1}{\gamma_n(K)} \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\gamma_n \geq \frac{1}{n}.$$

Υπενθύμιση: συναρτήσεις στήριξης

Υπενθύμιση: συναρτήσεις στήριξης

Αν το K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στο $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση στήριξης $h_K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται ως

$$h_K(\theta) = \sup_{x \in K} \langle x, \theta \rangle.$$

Υπενθύμιση: συναρτήσεις στήριξης

Αν το K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στο $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση στήριξης $h_K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται ως

$$h_K(\theta) = \sup_{x \in K} \langle x, \theta \rangle.$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό πως αν τα K, L είναι συμμετρικά κυρτά σύνολα και $\alpha, \beta > 0$, τότε

$$h_{\alpha K + \beta L} \equiv \alpha h_K + \beta h_L.$$

Η local-to-global πρόταση

Η local-to-global πρόταση

Έστω $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στο $\mathbb{R}^n$ και K, L δύο λεία, γνησίως κυρτά συμμετρικά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$. Αν $K_\lambda = (1-\lambda)K + \lambda L$, θέλουμε να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $M(\lambda) := \mu(K_\lambda)^{\frac{\delta}{n}}$ είναι κοίλη στο $[0,1]$, δηλαδή αν

$$M''(\lambda)M(\lambda) \leq \frac{n-\delta}{n} M'(\lambda)^2.$$

H local-to-global πρόταση

Έστω $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στο $\mathbb{R}^n$ και K, L δύο λεία, γνησίως κυρτά συμμετρικά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$. Αν $K_\lambda = (1-\lambda)K + \lambda L$, θέλουμε να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $M(\lambda) := \mu(K_\lambda)^{\frac{\delta}{n}}$ είναι κοίλη στο $[0,1]$, δηλαδή αν

$$M''(\lambda)M(\lambda) \leq \frac{n-\delta}{n} M'(\lambda)^2.$$

Απλή παρατήρηση. Από την συμμετρία του προβλήματος, είναι ισοδύναμο να εξετάσουμε την περίπτωση $\lambda = 0$, δηλαδή

$$M''(0)M(0) \leq \frac{n-\delta}{n} M'(0)^2.$$

Η local-to-global πρόταση

Έστω $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στο $\mathbb{R}^n$ και K, L δύο λεία, γνησίως κυρτά συμμετρικά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$. Αν $K_\lambda = (1-\lambda)K + \lambda L$, θέλουμε να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $M(\lambda) := \mu(K_\lambda)^{\frac{\delta}{n}}$ είναι κοίλη στο $[0,1]$, δηλαδή αν

$$M''(\lambda)M(\lambda) \leq \frac{n-\delta}{n} M'(\lambda)^2.$$

Απλή παρατήρηση. Από την συμμετρία του προβλήματος, είναι ισοδύναμο να εξετάσουμε την περίπτωση $\lambda = 0$, δηλαδή

$$M''(0)M(0) \leq \frac{n-\delta}{n} M'(0)^2.$$

Παρατηρήστε ότι αν καλέσουμε $\psi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ την συνάρτηση $\psi(\theta) = h_L(\theta) - h_K(\theta)$, τότε

$$h_{K_\lambda} = h_K + \lambda\psi.$$

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Λήμμα (Kolesnikov–E. Milman)

Για $x \in \partial K$, έστω n_x το μοναδιαίο κάθετο του ∂K στο x και έστω $f : \partial K \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \psi(n_x)$. Τότε

$$M'(0) = \int_{\partial K} f(x)\, \mathrm{d}\mu_{\partial K}(x)$$

και

$$M''(0) = \int_{\partial K} H_x f(x)^2 - \langle II^{-1}(x) \nabla_{\partial K} f(x), \nabla_{\partial K} f(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_{\partial K}(x),$$

όπου $\mu_{\partial K}$ είναι ο περιορισμός του μ στο ∂K, II είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του ∂K και H_x είναι η βεβαρημένη μέση καμπυλότητα του ∂K στο x, δηλαδή

$$H_x = \mathrm{tr}(II(x)) - \langle \nabla V(x), n_x \rangle.$$

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Συνεπώς, πρέπει να δείξουμε πως για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K και κάθε άρτια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \partial K \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\partial K} \underbrace{Hf^2 - \langle II^{-1}\nabla_{\partial K} f, \nabla_{\partial K} f\rangle}_{\Phi(\partial K, V, f, \nabla f)} \,\mathrm{d}\mu_{\partial K} \leq \frac{n-\delta}{n\mu(K)} \left(\int_{\partial K} f(x)\,\mathrm{d}\gamma_{\partial K}(x)\right)^2 .$$

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Συνεπώς, πρέπει να δείξουμε πως για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K και κάθε άρτια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \partial K \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\partial K} \underbrace{Hf^2 - \langle II^{-1} \nabla_{\partial K} f, \nabla_{\partial K} f \rangle}_{\Phi(\partial K, V, f, \nabla f)} \, \mathrm{d}\mu_{\partial K} \leq \frac{n-\delta}{n\mu(K)} \left(\int_{\partial K} f(x) \, \mathrm{d}\gamma_{\partial K}(x) \right)^2 .$$

Παρατήρηση. Για $\delta = 1$ και μ το μέτρο Lebesgue, η παραπάνω ανισότητα αποδείχθηκε από τον Colesanti (2008).

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Έστω $\mathscr{L}_\mu$ ο ελλειπτικός τελεστής που επάγεται από το μ, ο οποίος δρα σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως $\mathscr{L}_\mu u = \Delta u - \langle \nabla V, \nabla u \rangle$.

Θεώρημα (Ταυτότητα Reilly)

Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$,

$$\int_K (\mathscr{L}_\mu u)^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \langle \nabla^2 V \nabla u, \nabla u \rangle \, \mathrm{d}\mu + \int_{\partial K} \Psi \, \mathrm{d}\mu_{\partial K},$$

για κάποια $\Psi = \Psi(\partial K, V, u, \nabla u)$.

H local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Έστω $\mathscr{L}_\mu$ ο ελλειπτικός τελεστής που επάγεται από το μ, ο οποίος δρα σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως $\mathscr{L}_\mu u = \Delta u - \langle \nabla V, \nabla u \rangle$.

Θεώρημα (Ταυτότητα Reilly)

Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$,

$$\int_K (\mathscr{L}_\mu u)^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \langle \nabla^2 V \nabla u, \nabla u \rangle \, \mathrm{d}\mu + \int_{\partial K} \Psi \, \mathrm{d}\mu_{\partial K},$$

για κάποια $\Psi = \Psi(\partial K, V, u, \nabla u)$.

Σημαντική παρατήρηση! Αν η $f : \partial K \to \mathbb{R}$ είναι η συνοριακή συνθήκη Neumann της u, δηλαδή $f(x) = \langle \nabla u(x), n_x \rangle$ για $x \in \partial K$, τότε

$$\Phi(\partial K, V, f, \nabla f) \leq \Psi(\partial K, V, u, \nabla u).$$

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Συμπέρασμα. Για να συνάγουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski για το μ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό K και *κάθε* άρτια $f : \partial K \to \mathbb{R}$ *υπάρχει* $u : K \to \mathbb{R}$ με συνοριακή συνθήκη Neumann την f, τέτοια ώστε

$$\int_K (\mathscr{L}_\mu u)^2 \,\mathrm{d}\mu - \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \langle \nabla^2 V \nabla u, \nabla u \rangle \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{n-\delta}{n\mu(K)} \left(\int_{\partial K} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{\partial K}(x) \right)^2 .$$

Η local-to-global πρόταση (συνέχεια)

Συμπέρασμα. Για να συνάγουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski για το μ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό K και *κάθε* άρτια $f : \partial K \to \mathbb{R}$ *υπάρχει* $u : K \to \mathbb{R}$ με συνοριακή συνθήκη Neumann την f, τέτοια ώστε

$$\int_K (\mathscr{L}_\mu u)^2 \, \mathrm{d}\mu - \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \langle \nabla^2 V \nabla u, \nabla u \rangle \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{n-\delta}{n\mu(K)} \left(\int_{\partial K} f(x) \, \mathrm{d}\mu_{\partial K}(x) \right)^2 .$$

Αν $\int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\mu_{\partial K} = 0$, αυτό έπεται επειδή το μ είναι λογαριθμικά κοίλο. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\mu_{\partial K} = \mu(K)$. Τότε (...), η εξίσωση $\mathscr{L}_\mu u = 1$ στο K έχει μοναδική λύση που να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη Neumann $\langle \nabla u(x), n_x \rangle = f(x)$ και αναδιατάσσοντας παίρνουμε

$$\frac{1}{\mu(K)} \int_K \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \langle \nabla^2 V \nabla u, \nabla u \rangle \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{\delta}{n}.$$

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski

Εφαρμόζοντας αυτή την συνεπαγωγή για το μέτρο Lebesgue, συμπεραίνουμε πως η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski για κυρτά σύνολα έπεται από την εξής συναρτησιακή ανισότητα: για κάθε κυρτό σύνολο K και κάθε διαφορίσιμη $u : K \to \mathbb{R}$ με $\Delta u = 1$ στο K,

$$\frac{1}{|K|} \int_K \|\nabla^2 u(x)\|_{\mathrm{HS}}^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}.$$

Η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski

Εφαρμόζοντας αυτή την συνεπαγωγή για το μέτρο Lebesgue, συμπεραίνουμε πως η κλασική ανισότητα Brunn–Minkowski για κυρτά σύνολα έπεται από την εξής συναρτησιακή ανισότητα: για κάθε κυρτό σύνολο K και κάθε διαφορίσιμη $u : K \to \mathbb{R}$ με $\Delta u = 1$ στο K,

$$\frac{1}{|K|} \int_K \|\nabla^2 u(x)\|_{\mathrm{HS}}^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}.$$

Αυτή όμως είναι στοιχειώδης:

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\nabla^2 u)^2 &\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\nabla^2 u)\right)^2 \\ &= \frac{\big(\mathrm{tr}(\nabla^2 u)\big)^2}{n} = \frac{(\Delta u)^2}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts

Έστω K και $u : K \to \mathbb{R}$ για την οποία $\mathscr{L} u(x) = \Delta u(x) - \langle x, \nabla u(x)\rangle = 1$. Συμβολίζουμε με γ_K το μέτρο $\gamma_K(A) = \frac{\gamma_n(A \cap K)}{\gamma_n(K)}$.

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts

Έστω K και $u : K \to \mathbb{R}$ για την οποία $\mathscr{L}u(x) = \Delta u(x) - \langle x, \nabla u(x)\rangle = 1$.
Συμβολίζουμε με γ_K το μέτρο $\gamma_K(A) = \frac{\gamma_n(A\cap K)}{\gamma_n(K)}$.

Βήμα 1. Όπως και για το μέτρο Lebesgue,

$$\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \geq \int \frac{(\Delta u)^2}{n} + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K$$

$$= \int \frac{\big(1 + \langle x, \nabla u(x)\rangle\big)^2}{n} + |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K(x).$$

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts

Έστω K και $u : K \to \mathbb{R}$ για την οποία $\mathscr{L}u(x) = \Delta u(x) - \langle x, \nabla u(x)\rangle = 1$.
Συμβολίζουμε με γ_K το μέτρο $\gamma_K(A) = \frac{\gamma_n(A\cap K)}{\gamma_n(K)}$.

Βήμα 1. Όπως και για το μέτρο Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K &\geq \int \frac{(\Delta u)^2}{n} + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \\ &= \int \frac{\big(1 + \langle x, \nabla u(x)\rangle\big)^2}{n} + |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K(x).\end{aligned}$$

Βήμα 2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\min_{V\in\mathbb{R}^n} \frac{\big(1 + \langle x, V\rangle\big)^2}{n} + |V|^2 = \frac{1}{|x|^2 + n}.$$

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts (συνέχεια)

Βήμα 3. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι για κάθε αστρόμορφο K,

$$\int \frac{1}{|x|^2 + n} \,\mathrm{d}\gamma_K(x) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^2 + n} \,\mathrm{d}\gamma_n(x) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts (συνέχεια)

Βήμα 3. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι για κάθε αστρόμορφο K,

$$\int \frac{1}{|x|^2+n}\,\mathrm{d}\gamma_K(x) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^2+n}\,\mathrm{d}\gamma_n(x) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Παρατήρηση. Το Βήμα 2 δεν είναι ποτέ βέλτιστο, αφού γίνεται ισότητα μόνο για την $u_0(x) = -\frac{1}{2}\log(|x|^2+n)$, η οποία ικανοποιεί

$$\mathscr{L} u_0(x) = \frac{|x|^2-n}{|x|^2+n} + \frac{2|x|^2}{(|x|^2+n)^2} \neq 1.$$

Η απόδειξη των Kolesnikov και Livshyts (συνέχεια)

Βήμα 3. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι για κάθε αστρόμορφο K,

$$\int \frac{1}{|x|^2+n}\,\mathrm{d}\gamma_K(x) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^2+n}\,\mathrm{d}\gamma_n(x) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Παρατήρηση. Το Βήμα 2 δεν είναι ποτέ βέλτιστο, αφού γίνεται ισότητα μόνο για την $u_0(x) = -\frac{1}{2}\log(|x|^2+n)$, η οποία ικανοποιεί

$$\mathscr{L} u_0(x) = \frac{|x|^2-n}{|x|^2+n} + \frac{2|x|^2}{(|x|^2+n)^2} \neq 1.$$

Παρ΄όλα αυτά...

Πρόταση

Υπάρχει συμμετρικό K και άρτια $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L} u = 1$ με

$$\int \frac{\big(1+\langle x, \nabla u(x)\rangle\big)^2}{n} + |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}\gamma_K(x) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε άρτια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L}u = 1$ στο K ικανοποιεί

$$\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\gamma_K \geq \frac{1}{n}.$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε άρτια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L} u = 1$ στο K ικανοποιεί

$$\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \geq \frac{1}{n}.$$

Για έναν $n \times n$ πίνακα A, έστω $\widehat{A}$ το traceless μέρος του A, δηλαδή $\widehat{A} = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n} \mathrm{Id}$. Τότε,

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{A}\|_{\mathrm{HS}}^2 + \frac{(\mathrm{tr} A)^2}{n}.$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας

Θεώρημα (Ε.–Μοσχίδης, 2020)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K στο $\mathbb{R}^n$, κάθε άρτια διαφορίσιμη συνάρτηση $u : K \to \mathbb{R}$ με $\mathscr{L}u = 1$ στο K ικανοποιεί

$$\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\gamma_K \geq \frac{1}{n}.$$

Για έναν $n \times n$ πίνακα A, έστω $\widehat{A}$ το traceless μέρος του A, δηλαδή $\widehat{A} = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n}\mathrm{Id}$. Τότε,

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{A}\|_{\mathrm{HS}}^2 + \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}.$$

Ειδικότερα, αν $\widehat{\nabla}^2 u$ είναι το traceless τμήμα της $\nabla^2 u$, έχουμε

$$\|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{\nabla}^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}.$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας (συνέχεια)

Παρατηρήστε ότι
$$\|\widehat{\nabla}^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{\nabla}^2 (u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2,$$
για κάθε $r \in \mathrm{Ker}(\widehat{\nabla}^2)$, ειδικότερα την $r(x) = \frac{|x|^2}{2n}$.

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας (συνέχεια)

Παρατηρήστε ότι
$$\|\widehat{\nabla}^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{\nabla}^2 (u - r)\|_{\mathrm{HS}}^2,$$
για κάθε $r \in \mathrm{Ker}(\widehat{\nabla}^2)$, ειδικότερα την $r(x) = \frac{|x|^2}{2n}$. Επίσης,
$$\|\widehat{\nabla}^2 (u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\nabla^2 (u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{(\Delta(u-r))^2}{n} = \|\nabla^2 (u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{(\Delta u - 1)^2}{n}.$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας (συνέχεια)

Παρατηρήστε ότι

$$\|\widehat{\nabla}^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\widehat{\nabla}^2 (u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

για κάθε $r \in \mathrm{Ker}(\widehat{\nabla}^2)$, ειδικότερα την $r(x) = \frac{|x|^2}{2n}$. Επίσης,

$$\|\widehat{\nabla}^2(u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\nabla^2(u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{(\Delta(u-r))^2}{n} = \|\nabla^2(u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \frac{(\Delta u - 1)^2}{n}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ταυτότητες με την εξίσωση $\mathscr{L} u = 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u(x)\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \|\nabla^2(u-r)(x)\|_{\mathrm{HS}}^2 + \frac{2}{n}\Delta u(x) - \frac{1}{n} \\ &= \|\nabla^2(u-r)(x)\|_{\mathrm{HS}}^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i \partial_i u(x) + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Η ανισότητα Brascamp–Lieb

Η ανισότητα Brascamp–Lieb

Το μέτρο γ_K προσεγγίζεται από μέτρα της μορφής $e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ όπου το δυναμικό V είναι άπειρα διαφορίσιμο και ικανοποιεί $\nabla^2 V \geq \mathrm{Id}$.

Η ανισότητα Brascamp–Lieb

Το μέτρο γ_K προσεγγίζεται από μέτρα της μορφής $e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ όπου το δυναμικό V είναι άπειρα διαφορίσιμο και ικανοποεί $\nabla^2 V \geq \mathrm{Id}$.

Θεώρημα (Brascamp–Lieb, 1976)

Έστω $\beta \in (0,\infty)$ και $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\nabla^2 V \geq \beta \mathrm{Id}$. Τότε, αν $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$, κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$\mathrm{Var}_\mu h := \int h^2 \,\mathrm{d}\mu - \left(\int h \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leq \frac{1}{\beta}\int |\nabla h|^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Η ανισότητα Brascamp–Lieb

Το μέτρο γ_K προσεγγίζεται από μέτρα της μορφής $e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$ όπου το δυναμικό V είναι άπειρα διαφορίσιμο και ικανοποεί $\nabla^2 V \geq \mathrm{Id}$.

Θεώρημα (Brascamp–Lieb, 1976)

Έστω $\beta \in (0,\infty)$ και $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\nabla^2 V \geq \beta\mathrm{Id}$. Τότε, αν $\mathrm{d}\mu(x) = e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x$, κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$\mathrm{Var}_\mu h := \int h^2 \,\mathrm{d}\mu - \left(\int h \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leq \frac{1}{\beta}\int |\nabla h|^2\,\mathrm{d}\mu.$$

Ειδικότερα, αφού κάθε $\partial_i(u-r)$ είναι περιττή και το K είναι συμμετρικό,

$$\sum_{j=1}^n \int (\partial_i\partial_j(u-r))^2\,\mathrm{d}\gamma_K \geq \mathrm{Var}_{\gamma_K}(\partial_i(u-r)) = \int (\partial_i(u-r))^2\,\mathrm{d}\gamma_K.$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας (συνέχεια)

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \|\nabla^2(u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 \,\mathrm{d}\gamma_K &\geq \int_K |\nabla(u-r)|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \\ &= \int_K |\nabla u(x)|^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i \partial_i u(x) + \frac{|x|^2}{n^2} \,\mathrm{d}\gamma_K(x).\end{aligned}$$

Απόδειξη της συναρτησιακής ανισότητας (συνέχεια)

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \|\nabla^2(u-r)\|_{\mathrm{HS}}^2 \,\mathrm{d}\gamma_K &\geq \int_K |\nabla(u-r)|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \\ &= \int_K |\nabla u(x)|^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i \partial_i u(x) + \frac{|x|^2}{n^2} \,\mathrm{d}\gamma_K(x).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την προηγούμενη ταυτότητα, καταλήγουμε ότι

$$\int \|\nabla^2 u\|_{\mathrm{HS}}^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\gamma_K \geq \int 2|\nabla u(x)|^2 + \frac{|x|^2}{n^2} + \frac{1}{n} \,\mathrm{d}\gamma_K(x)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Πότε έχουμε ισότητα;

Πότε έχουμε ισότητα;

Η παραπάνω απόδειξη δίνει μια γνησίως ισχυρότερη ανισότητα.
Υπάρχει μια συνάρτηση $\sigma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία η $x \mapsto \sigma_n^{-1}(x)^{\frac{1}{n}}$ είναι *γνησίως* αύξουσα και *γνησίως* κοίλη και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\sigma_n\big(\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)\big) \geq \lambda\sigma_n\big(\gamma_n(K)\big) + (1-\lambda)\sigma_n\big(\gamma_n(L)\big)$$

για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Πότε έχουμε ισότητα;

Η παραπάνω απόδειξη δίνει μια γνησίως ισχυρότερη ανισότητα. Υπάρχει μια συνάρτηση $\sigma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία η $x \mapsto \sigma_n^{-1}(x)^{\frac{1}{n}}$ είναι *γνησίως* αύξουσα και *γνησίως* κοίλη και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\sigma_n\big(\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)\big) \geq \lambda \sigma_n\big(\gamma_n(K)\big) + (1-\lambda)\sigma_n\big(\gamma_n(L)\big)$$

για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Πόρισμα

Έστω K, L δυο συμμετρικά κυρτά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$ για τα οποία

$$\gamma_n\big(\lambda K + (1-\lambda)L\big)^{\frac{1}{n}} = \lambda \gamma_n(K)^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)\gamma_n(L)^{\frac{1}{n}}.$$

Τότε $K = L$.

Μια ανισότητα Ehrhard για συμμετρικά κυρτά σύνολα;

Μια ανισότητα Ehrhard για συμμετρικά κυρτά σύνολα;

Κλείνουμε με το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα.

Ερώτηση

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μια 'βέλτιστη' αύξουσα συνάρτηση $\xi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$\xi_n\big(\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)\big) \geq \lambda \xi_n(\gamma_n(K)) + (1-\lambda)\xi_n(\gamma_n(L)) \ ;$$

Μια ανισότητα Ehrhard για συμμετρικά κυρτά σύνολα;

Κλείνουμε με το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα.

Ερώτηση

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μια 'βέλτιστη' αύξουσα συνάρτηση $\xi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$\xi_n\big(\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)\big) \geq \lambda \xi_n(\gamma_n(K)) + (1-\lambda)\xi_n(\gamma_n(L)) \ ;$$

Δεν είναι σαφές με ποιά έννοια μια τέτοια συνάρτηση θα είναι 'βέλτιστη'. Θα θέλαμε σίγουρα η ανισότητα να γίνεται ισότητα για μη τετριμμένα ζεύγη (K, L).

Μια ανισότητα Ehrhard για συμμετρικά κυρτά σύνολα;

Κλείνουμε με το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα.

Ερώτηση

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μια 'βέλτιστη' αύξουσα συνάρτηση $\xi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε συμμετρικά κυρτά σύνολα K, L στο $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$\xi_n\big(\gamma_n(\lambda K + (1-\lambda)L)\big) \geq \lambda \xi_n(\gamma_n(K)) + (1-\lambda)\xi_n(\gamma_n(L)) \;;$$

Δεν είναι σαφές με ποιά έννοια μια τέτοια συνάρτηση θα είναι 'βέλτιστη'. Θα θέλαμε σίγουρα η ανισότητα να γίνεται ισότητα για μη τετριμμένα ζεύγη (K, L).

Παρατήρηση. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο K, αν $\Xi_n(r) = \gamma_n(rK)$, τότε η $\xi_n := \Xi_n^{-1}$ δεν ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα.

Ευχαριστώ πολύ!