Για τα χθεσινά, χωρίς μπαλαντέρ

Theorem 2.42 (Naimark's theorem) *Let $\mathcal{X}$ be a complex Euclidean space, let Σ be an alphabet, let $\mu : \Sigma \to Pos(\mathcal{X})$ be a measurement, and let $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^{\Sigma}$.*

There exists an isometry $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ such that

$$\mu(\alpha) = A^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A$$

for every $\alpha \in \Sigma$.

Απόδειξη. Κάθε τελεστής $\mu(\alpha)$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα $\mu(\alpha)^{1/2}$. Για κάθε $\alpha \in \Sigma$ ορίζω [1]

$$A(\alpha) : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} : x \to \mu(\alpha)^{1/2} x \otimes e_\alpha$$
$$\text{και} \qquad A = \sum_{\alpha \in \Sigma} A(\alpha)\,.$$

Ισχυρισμός Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$,

$$A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x = \begin{cases} \mu(\alpha)x, & \text{αν } \gamma = \alpha = \beta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$, όταν $\alpha = \beta$ έχουμε

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x = (\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})(\mu(\alpha)^{1/2} x \otimes e_\beta) = \mu(\alpha)^{1/2} x \otimes e_\alpha$$

και όταν $\alpha \neq \beta$ τότε $(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x = 0$. Επομένως, για κάθε $x, y \in \mathcal{X}$, όταν $\alpha \neq \beta$ έχουμε $\langle A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x, y\rangle = 0$ και όταν $\alpha = \beta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x, y\rangle &= \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x, A(\gamma)y\rangle \\ &= \langle \mu(\alpha)^{1/2} x \otimes e_\alpha, \mu(\gamma)^{1/2} y \otimes e_\gamma\rangle \\ &= \langle \mu(\alpha)^{1/2} x, \mu(\gamma)^{1/2} y\rangle \langle e_\alpha, e_\gamma\rangle \\ &= \begin{cases} \langle \mu(\alpha)^{1/2} x, \mu(\alpha)^{1/2} y\rangle & \text{αν } \alpha = \gamma \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\langle A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x, y\rangle = \begin{cases} \langle \mu(\alpha)x, y\rangle, & \text{αν } \gamma = \alpha = \beta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

[1] Ο Watrous συμβολίζει τον τελεστή αυτόν $A(\alpha) = \mu(\alpha)^{1/2}\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes e_\alpha : \mathcal{X} \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, ταυτίζοντας τον $\mathcal{X} \otimes \mathbb{C}$ με τον $\mathcal{X}$ μέσω του ισομετρικού ισομορφισμού $x \otimes \lambda \to \lambda x$, και το $e_\alpha \in \mathcal{Y}$ με τον τελεστή $\lambda \to \lambda e_\alpha : \mathbb{C} \to \mathcal{Y}$ (του οποίου ο συζυγής είναι $y \to \langle e_a, y\rangle : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$).

Από τον ισχυρισμό έχουμε αμέσως ότι

$$A(\gamma)^*A(\beta)x = A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes \sum_\alpha E_{\alpha,\alpha})A(\beta) = \begin{cases} \mu(\beta)x, & \text{αν } \gamma = \beta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και άρα

$$A^*Ax = \sum_{\gamma,\beta} A(\gamma)^*A(\beta)x = \sum_\beta \mu(\beta)x = x$$

δηλαδή A ισομετρία και, για κάθε $\alpha \in \Sigma$,

$$A^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})Ax = \sum_{\gamma,\beta} A(\gamma)^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A(\beta)x = \mu(\alpha)x$$

όπως θέλαμε. □

Σχόλια για το Πόρισμα 2.43 Σταθεροποιούμε ένα τυχόν $u \in \mathcal{Y}$ νόρμας 1. Η απεικόνιση $T_u : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} : x \to x \otimes u$ είναι ισομετρία. Παρατηρούμε ότι

$$T_u^* : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : (x \otimes y) \to x\langle u, y\rangle \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\,.$$

Πράγματι,

$$\langle T_u^*(x \otimes y), x'\rangle = \langle x \otimes y, T_u x'\rangle = \langle x \otimes y, x' \otimes u\rangle = \langle x, x'\rangle\langle y, u\rangle = \langle\langle u, y\rangle x, x'\rangle\,.$$

Επομένως, για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$

$$\begin{aligned} T_u X T_u^*(x \otimes y) &= T_u(X(x\langle u, y\rangle)) = T_u(Xx\langle u, y\rangle) = \langle u, y\rangle T_u(Xx) \\ &= \langle u, y\rangle Xx \otimes u = Xx \otimes \langle u, y\rangle u = Xx \otimes uu^*(y) \\ \text{δηλαδή } \; T_u X T_u^* &= X \otimes uu^* \end{aligned} \qquad (*)$$

Οι απεικονίσεις $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ και $T_u : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ είναι ισομετρίες. Επομένως η απεικόνιση

$$U_0 : \mathrm{im}(T_u) \to \mathrm{im}\, A : T_u x \to Ax\,.$$

είναι καλά ορισμένη ισομετρία από τον $\mathrm{im}(T_u)$ επί του $\mathrm{im}\, A$. Συνεπώς επεκτείνεται σε ισομετρία U από τον $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ *επί του* $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ (ορίζοντας για παράδειγμα την U να είναι 0 στον $(\mathrm{im}(T_u))^\perp$). Υπάρχει λοιπόν ισομετρία επί (δηλ. unitary τελεστής) $U \in L(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ ώστε $UT_u = A$. Αν ορίσουμε

$$\nu(\alpha) = U^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})U, \quad \alpha \in \Sigma$$

τότε η ν είναι projective μέτρηση, γιατί η $\alpha \to \mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha}$ είναι projective μέτρηση και ο U είναι unitary. Για κάθε $X \in L(\mathcal{X})$ και $\alpha \in \Sigma$ έχουμε από την (*)

$$\begin{aligned}\langle \nu(\alpha), X \otimes uu^* \rangle &= \langle U^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})U, T_u X T_u^* \rangle \\ &= \langle T_u^* U^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})UT_u, X \rangle = \langle A^*(\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \otimes E_{\alpha,\alpha})A, X \rangle \\ &= \langle \mu(\alpha), X \rangle .\end{aligned}$$

Naimark's theorem [2]

Every counbably additive regular positive-operator-valued measure on a Hilbert space dilates to a counbably additive regular projection-valued measure on a larger Hilbert space:

Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space, let Σ be a compact Hausdorff space, let $\mu : \mathcal{B}(\Sigma) \to Pos(\mathcal{H})$ be a measurement ($\mathcal{B}(\Sigma)$: the Borel σ-algebra of Σ); we assume that for each unit vector $x \in \mathcal{H}$ the measure $\mu_x(\alpha) := \langle \mu(\alpha)x, x \rangle$ is a countably additive regular probability measure on the Borel subsets $\alpha \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

Then there exists a Hilbert space $\mathcal{Y}$, a projection valued measure $\tilde{\mu} : \mathcal{B}(\Sigma) \to$ $\mathrm{Proj}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{Y})$ *and an isometry $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{Y})$ such that*

$$\mu(\alpha) = A^* \tilde{\mu}(\alpha) A$$

for every $\alpha \in B(\Sigma)$.

Παρατήρηση *Αν A, B θετικοί τελεστές* [3] *σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, τότε*

$$\mathrm{im}(A+B) = \mathrm{im}(A) + \mathrm{im}(B).$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\mathrm{im}(A+B) \subseteq \mathrm{im}(A) + \mathrm{im}(B)$: κάθε $(A+B)x$ ισούται με $Ax + Bx$.

Για το αντίστροφο, αρκεί, λόγω συμμετρίας, να δείξουμε ότι

$$\mathrm{im}(A) \subseteq \mathrm{im}(A+B).$$

Γι αυτό (αφού οι υπόχωροι είναι κλειστοί) αρκεί να δείξω ότι, αν ένα x είναι κάθετο στο $\mathrm{im}(A+B)$, τότε θα είναι κάθετο και στο $\mathrm{im}(A)$. Όμως, αν $\langle x, (A+B)y \rangle = 0$ για κάθε y, τότε ειδικότερα $\langle x, (A+B)x \rangle = 0$, δηλαδή $\langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle = 0$. Αφού οι A, B είναι θετικοί, έπεται ότι $\langle x, Ax \rangle = 0 = \langle x, Bx \rangle$. Όμως ο A είναι θετικός, άρα έχει θετική τετραγωνική ρίζα έστω C, οπότε $\|Cx\|^2 = \langle Cx, Cx \rangle = \langle x, C^*Cx \rangle = \langle x, Ax \rangle = 0$. Δηλαδή $Cx = 0$, άρα $Ax = C(Cx) = 0$. Έπεται ότι για κάθε y έχουμε $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = 0$, δηλαδή $x \perp \mathrm{im}(A)$, όπως θέλαμε.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Naimark's_dilation_theorem`

[3] Η υπόθεση "A και B θετικοί" δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $A = uu^*$ και $B = vu^*$ όπου τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $\mathrm{im}(A) + \mathrm{im}(B) = \mathrm{span}\,\{u, v\}$ ενώ $\mathrm{im}(A+B) = \mathrm{span}\,\{u+v\}$.