Στοιχειώδεις τελεστές στην άλγεβρα των adjointable τελεστών σε Hilbert πρότυπα, (συνέχεια)

Χαράλαμπος Μαγιάτης

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός ώστε: $\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \simeq \mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{K}$ η C^*-άλγεβρα των συμπαγών τελεστών σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert

Εάν η C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι διαχωρίσιμη, και η C^*-άλγεβρα $\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ είναι διαχωρίσιμη.

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

- Έστω $[.] : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ η απεικόνιση πηλίκο $T \mapsto [T]$.
- Εάν $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$, η απεικόνιση $[T] \mapsto [\Phi(T)]$ ορίζει στοιχειώδη τελεστή στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Τον συμβολίζουμε $[\Phi]$.
- Εάν $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ με $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ όπου $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, έχουμε ότι $[\Phi] = \sum_{i=1}^{k} M_{[A_i][B_i]}$. Προκύπτει ότι $l([\Phi]) \leq l(\Phi)$, όπου $l(\cdot)$ το μήκος του Φ.
- Συμβολίζουμε $\|[\Phi]\|_Q$ την νόρμα του $[\Phi]$. Έχουμε $\|[\Phi]\|_Q \leq \|\Phi\|$.
- Έστω $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ και $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Από την ισότητα

$$\Phi = M_{Q_n^\perp,Q_n^\perp}\Phi + L_{Q_n}\Phi + R_{Q_n}\Phi - M_{Q_n,Q_n}\Phi \;\Rightarrow\; [\Phi] = [M_{Q_n^\perp,Q_n^\perp}\Phi]$$

και άρα

$$\|[\Phi]\|_Q = \|[M_{Q_n^\perp,Q_n^\perp}\Phi]\|_Q \leq \|M_{Q_n^\perp,Q_n^\perp}\Phi\|.$$

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Θεώρημα

Έστω A μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert A-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*
2. $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Αρχικά θα θεωρήσουμε $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα

Θεωρούμε $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}))_1$ *με* $\|[\Phi]\|_Q = r \neq 0$. *Έστω* $\varepsilon > 0$. *Τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $m > n$, *στοιχείο* $T \in P_{(n,m)}\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1 P_{(n,m)}$ *και* $x \in (\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$, *ώστε* $\|\Phi(T)x\| \geq r - \varepsilon$.

Απόδειξη [Λήμμα]
Έχουμε $r = \|[\Phi]\|_Q \leq \|\Phi M_{P_n^\perp, P_n^\perp}\|$.
Επομένως, υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε

$$\|\Phi M_{P_n^\perp, P_n^\perp}(S)\| = \|\Phi(P_n^\perp S P_n^\perp)\| \geq r - \varepsilon/4.$$

Άρα, υπάρχει $x \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε

$$\|\Phi(P_n^\perp S P_n^\perp)x\| \geq r - \varepsilon/2$$

Ισχύει ότι,

$$\lim_{m\to\infty} \|\Phi(P_n^\perp P_m S P_m P_n^\perp)x\| = \|\Phi(P_n^\perp S P_n^\perp)x\|.$$

Άρα υπάρχει $m > n$ ώστε

$$\|\Phi(P_n^\perp P_m S P_m P_n^\perp)x\| \geq r - \varepsilon$$

Θέτουμε $T = P_{(n,m)} S P_{(n,m)}$.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*.
Υποθέτουμε ότι $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1) \not\subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$. Τότε έχουμε $\|[\Phi]\|_Q = r > 0$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε

$$n_k, m_k \in \mathbb{N}\ ,\ Y_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1\ ,\ x_k \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$$

τέτοια ώστε:

1. $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$
2. $Y_k = P_{(n_k,m_k)} Y_k P_{(n_k,m_k)}$
3. $\|x_k\| \leq 1$, $x_k = P_{n_k}^{\perp} x_k$
4. $\|\Phi(Y_k)x_k\| \geq r - \varepsilon$
5. $\|\Phi(Y_l)x_k\| \leq \varepsilon/2^{l+k}$ για κάθε $l < k$.

Για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$, ορίζουμε $Y_J = \sum_{k \in J} Y_k$.
Τότε $Y_J \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι αν $I \subseteq \mathbb{N}$, $J \subseteq \mathbb{N}$, $I \neq J$, τότε $\|\Phi(Y_J) - \Phi(Y_I)\| \geq r/2$.
Έχουμε

$$Y_J - Y_I = \sum_{k=1}^{\infty} b(k) Y_k,$$

όπου

$$b(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in J - I \\ -1 & , \quad k \in I - J \\ 0 & , \quad k \notin (J - I) \cup (I - J) \end{cases}$$

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Έστω $l \in J - I$ και $\varepsilon = r/4$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(Y_J) - \Phi(Y_I)\| &= \left\| \Phi(\sum_{k=1}^{\infty} b(k) Y_k) \right\| \geq \left\| \Phi(\sum_{k=1}^{\infty} b(k) Y_k) x_l \right\| \\
&\geq \|\Phi(Y_l) x_l\| - \sum_{k=1}^{l-1} \|b(k)\Phi\left(Y_k\right) x_l\| \\
&\quad - \sum_{k=l+1}^{\infty} \|b(k)\Phi(Y_k) x_l\| \\
&\geq r - \varepsilon - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\varepsilon}{2^{l+k}} - \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+l}} \\
&\geq r - \varepsilon - \varepsilon \geq r/2,
\end{aligned}$$

και άρα το $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1)$ δεν είναι διαχωρίσιμο.

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Θεωρούμε $\mathcal{X}$, ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.
Έστω $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ όπου $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.
Θεωρούμε $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$:

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εάν $\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{k} M_{\tilde{A}_i,\tilde{B}_i}$, τότε:

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από Kasparov stabilization theorem και την περίπτωση του $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, έχουμε

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$$

και άρα $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.
2. *Το σύνολο $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*
3. $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$.
4. *Το σύνολο $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*

"$1 \Rightarrow 2$"
Έστω $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$
Για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|Q_nAXAQ_n - AXA\| &= \|Q_nAXAQ_n - AXAQ_n + AXAQ_n - AXA\| \\ &\leq \|Q_nA - A\|\|XAQ_n\| + \|AX\|\|AQ_n - A\| \\ &\leq \|Q_nA - A\| + \|AQ_n - A\|. \end{aligned}$$

Άρα, το $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

"$2 \Rightarrow 3 \Leftrightarrow 4$" είναι άμεσο.

"$3 \Rightarrow 1$"
Έχουμε $AA^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, άρα $AA^*AA^* \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $|A^*| \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.
Επομένως $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και άρα $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Στοιχειώδεις Τελεστές και Διαχωρισιμότητα

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A}$ διαχωρίσιμη prime μοναδιαία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}$ αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.*
2. *Το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A}$ διαχωρίσιμη prime μοναδιαία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}$ αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*
2. *Υπάρχουν $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i να ανήκουν στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i = 1, .., k$ και $\Phi = \sum_i M_{A_i,B_i}$.*