Στοιχειώδεις τελεστές στην άλγεβρα των adjointable τελεστών σε Hilbert πρότυπα

Χαράλαμπος Μαγιάτης

Hilbert C^*-πρότυπα

Ορισμός (δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι ένα (δεξιό) $\mathcal{A}$-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$, αν υπάρχει μια απεικόνιση

$$\mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X} \quad , \quad (x, a) \mapsto xa$$

ώστε για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathcal{X}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν τα εξής:

1. $(x + y)a = xa + ya$;
2. $x(a + b) = xa + xb$;
3. $x(ab) = (xa)b$;
4. $x(\lambda a) = \lambda(xa) = (\lambda x)a$;
5. $x1_{\mathcal{A}} = x$, *(εάν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα).*

Hilbert C^*-πρότυπα

Ορισμός (δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο. Το $\mathcal{X}$ λέγεται $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου αν υπάρχει μία απεικόνιση

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{A} \quad , \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

ώστε για κάθε $a \in \mathcal{A}$, $x, y, z \in \mathcal{X}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν τα εξής:

1. $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
2. $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$;
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ λέγεται $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο στο $\mathcal{X}$.

Hilbert C^*-πρότυπα

Πρόταση (Cauchy-Schwarz και τριγωνική)

Έστω $\mathcal{X}$ ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου και $x, y \in \mathcal{X}$. Τότε

1. $$\|\langle x, y\rangle\|^2 \leq \|\langle x, x\rangle\|\|\langle y, y\rangle\|.$$
2. $$\|\langle x+y, x+y\rangle\|^{1/2} \leq \|\langle x, x\rangle\|^{1/2} + \|\langle y, y\rangle\|^{1/2}.$$

Hilbert C^*-πρότυπα

Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}$ ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου. Η απεικόνιση

$$x \mapsto \|x\|_{\mathcal{X}} = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$$

είναι μία νόρμα στον $\mathcal{X}$.

Ορισμός (Hilbert C^*-πρότυπο)

Ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου που είναι πλήρες ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Θα λέγεται Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.

Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Το $\mathcal{X}$ λέγεται *full* αν η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathcal{X}\}$ είναι ίση με την $\mathcal{A}$.

Hilbert C^*-πρότυπα

- Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Η $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με το $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b\rangle = a^*b$, είναι Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο το οποίο ονομάζεται *Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{A}$*.

- Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπα. Το ευθύ άθροισμα $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ με την δράση της $\mathcal{A}$

$$(x \oplus y)a = xa \oplus ya$$

και $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{X}} + \langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{Y}}$$

είναι ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.

Hilbert C^*-πρότυπα

- Το σύνολο

$$\left\{ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathcal{A}, \sum_{i\in\mathbb{N}} a_k^* a_k \text{ συγκλίνει norm στην } \mathcal{A} \right\},$$

με την δράση της $\mathcal{A}$

$$(a_i)a = (a_i a)$$

και $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^* b_i$$

είναι ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.
Λέγεται standard Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και συμβολίζεται $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Hilbert C^*-πρότυπα

- Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και Λ ένα σύνολο δεικτών.

  Θα λέμε ότι το σύνολο $E_\Lambda = \{e_\lambda : e_\lambda \in \mathcal{X}, \lambda \in \Lambda\}$ *παράγει* το $\mathcal{X}$, όταν το υποπρότυπο των $\mathcal{A}$-γραμμικών αθροισμάτων του E_Λ είναι πυκνό στο $\mathcal{X}$. Τα στοιχεία e_λ λέγονται *γεννήτορες* του $\mathcal{X}$.

  Εάν υπάρχει ένα αριθμήσιμο (αντίστοιχα: πεπερασμένο) σύνολο E_Λ που παράγει το $\mathcal{X}$, τότε το $\mathcal{X}$ θα λέγεται *αριθμήσιμα (αντίστοιχα: πεπερασμένα) παραγόμενο*.

Hilbert C^*-πρότυπα

Ορισμός (απεικόνιση προτύπου)

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπα. Μια γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται απεικόνιση προτύπου αν $\forall x \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\phi(xa) = \phi(x)a.$$

- Θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τον χώρο των γραμμικών φραγμένων τελεστών $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που είναι απεικονίσεις προτύπου, εφοδιασμένο με την νόρμα τελεστή.
  Αν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}_b(\mathcal{X})$ τον χώρο $\mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Hilbert C^*-πρότυπα

Ορισμός (adjointable τελεστής)

Εάν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπα, μία απεικόνιση $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται adjointable εάν υπάρχει απεικόνιση $T^* : \mathcal{Y} \to X$ τέτοια ώστε

$$\langle T^* y, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{Y}} \ , \ \forall x \in \mathcal{X} \ , \ \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Η απεικόνιση T^* λέγεται συζυγής της T.

Hilbert C^*-πρότυπα

Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπα και $T, S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Τότε:

1. *Εάν ο T είναι adjointable, τότε $T \in \mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $T^* \in \mathcal{B}_b(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.*
2. *Εάν ο T είναι adjointable, τότε ο T^* είναι μοναδικός και είναι adjointable.*
3. *Εάν οι T, S είναι adjointable και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε*

$$(\lambda T + S)^* = \overline{\lambda} T^* + S^* \quad , \quad (TS)^* = S^* T^* \quad , \quad (T^*)^* = T$$

Hilbert C^*-πρότυπα

- Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα. Για $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $e_i \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..,)$ όπου το 1 βρίσκεται στην i-θέση. Η οικογένεια $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ λέγεται η *κανονική βάση* του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

- Έστω $T \in \mathcal{B}_b(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Ο πίνακας $[t_{ij}]$ με $t_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$ για $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ λέγεται πίνακας του T ως προς την κανονική βάση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Hilbert C^*-πρότυπα

Θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ τον χώρο των adjointable απεικονίσεων $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Αν $\mathcal{X}=\mathcal{Y}$ θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ τον χώρο $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$.

Πρόταση

Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Με την νόρμα τελεστή ο $\mathcal{B}_b(\mathcal{X})$ είναι άλγεβρα Banach. Ο $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ με την νόρμα τελεστή και ενέλιξη την $T\mapsto T^*$ είναι C^*-άλγεβρα.

Hilbert C^*-πρότυπα

Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Αν $x, y \in \mathcal{X}$, συμβολίζουμε $\theta_{x,y}$ την απεικόνιση $\theta_{x,y} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ που ορίζεται

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle \ , \ z \in \mathcal{X}.$$

Το σύνολο $\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{X}\}$ γενικεύει την έννοια των τελεστών τάξης 1 στα Hilbert C^*-πρότυπα.

Ορισμός (γενικευμένοι συμπαγείς τελεστές)

Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Το σύνολο των (γενικευμένων) συμπαγών τελεστών πάνω στο $\mathcal{X}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{X}\}$ και συμβολίζεται $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Πρόταση

Το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Hilbert C^*-πρότυπα

Ορισμός (προσεγγιστική μονάδα)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$ είναι ένα αύξον δίκτυο $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ θετικών στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\|u_\lambda\| \leq 1$ γιά κάθε $\lambda \in \Lambda$, τέτοιο ώστε $\lim_\lambda \|a - au_\lambda\| = 0$ γιά κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα

Ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{X}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενο αν και μόνο αν η C^*-άλγεβρα $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ έχει μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα.

Hilbert C^*-πρότυπα

Το επόμενο θεώρημα είναι θεμελιώδους σημασίας για την μελέτη των αριθμήσιμα παραγόμενων Hilbert C^*-προτύπων.

Αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι Hilbert C^*-πρότυπα, λέμε ότι τα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι unitarily ισοδύναμα αν υπάρχει $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τέτοιος ώστε $UU^* = Id$ και $U^*U = Id$. Συμβολίζουμε $\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y}$.

Θεώρημα (Kasparov stabilization theorem 1980)

Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ είναι ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Vala 1964)

Έστω X χώρος Banach και $A, B \in \mathcal{B}(X)$. Η απεικόνιση $T \mapsto ATB$ είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν οι τελεστές A και B είναι συμπαγείς.

- Ο K. Vala το 1967, θεώρησε μία άλγεβρα με νόρμα και ονόμασε ένα στοιχείο a της άλγεβρας *συμπαγές στοιχείο* εάν η απεικόνιση $x \mapsto axa$ ορίζει συμπαγή τελεστή. Αντίστοιχα όρισε τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης και απέδειξε πως το σύνολο των συμπαγών στοιχείων είναι κλειστό, ένα idempotent συμπαγές στοιχείο είναι πεπερασμένης τάξης και πως το σύνολο των συμπαγών στοιχείων και των στοιχείων πεπερασμένης τάξης είναι κλειστά ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Γνωστά αποτελέσματα

- Ο K. Ylinen το 1968 απέδειξε πως το σύνολο των συμπαγών στοιχείων μίας C^*-άλγεβρας συμπίπτει με την κλειστή γραμμική θήκη των στοιχείων πεπερασμένης τάξης και είναι αμφίπλευρο ιδεώδες.

Θεώρημα (Ylinen 1972)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $u \in \mathcal{A}$. Το στοιχείο u είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει ισομετρική $*$-αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ σε έναν χώρο Hilbert H τέτοια ώστε το $\pi(u)$ να είναι συμπαγής τελεστής στον H. Επίσης, ο γραμμικός τελεστής $x \mapsto uxu$ στην $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένης τάξης αν και μόνο αν $\pi(u)$ είναι πεπερασμένης τάξης τελεστής στον H.

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Fong and Sourour 1979)

Αν X είναι ένας χώρος Banach, $\mathcal{B}(X)$ η άλγεβρα των γραμμικών φραγμένων τελεστών στον X και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο Φ είναι συμπαγής.*
2. *Υπάρχουν συμπαγείς τελεστές $A_i, B_i \in \mathcal{B}(X)$ για $i = 1, \ldots, k$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{m} M_{A_i,B_i}$*

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Mathieu 1988)

Εάν $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{A})_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο Φ είναι συμπαγής.*
2. *Υπάρχουν $\{a_i\}_{i=1}^k, \{b_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{a_i,b_i}$.*

Θεώρημα (Mathieu 1988)

Εάν $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{A})_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο Φ είναι ασθενώς συμπαγής.*
2. *Υπάρχουν υποσύνολα $\{a_i\}_{i=1}^k, \{b_i\}_{i=1}^k$ της $\mathcal{A}$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα a_i ή b_i ανήκουν στην $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{a_i,b_i}$.*

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Saksman and Tylli 1995)

Εάν E είναι ένας reflexive χώρος Banach με την approximation property, τότε ο στοιχειώδης τελεστής $\Phi : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν $\Phi(\mathcal{B}(E)) \subseteq \mathcal{K}(E)$.

Το 1992 και το 1995 οι Saksman και Tylli, απέδειξαν αντίστοιχα αποτελέσματα με του Mathieu για ασθενώς συμπαγείς πολλαπλασιαστικούς και στοιχειώδεις τελεστές σε χώρους Banach.

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Timoney 2008)

Εάν $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{A})_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο Φ είναι συμπαγής.*
2. *Υπάρχουν $\{a_i\}_{i=1}^k, \{b_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{a_i,b_i}$.*

Γνωστά αποτελέσματα

Θεώρημα (Andreolas 2012)

Εάν a είναι ένα στοιχείο σε ένα TRO, $\mathcal{V}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Υπάρχει πιστή αναπαράσταση (π, H) που απεικονίζει το a σε συμπαγή τελεστή.*
2. *Ο τελεστής $u : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $x \mapsto ax^*a$, είναι συμπαγής.*
3. *Ο τελεστής $u : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $x \mapsto ax^*a$, είναι ασθενώς συμπαγής.*

Ερωτήματα

Έστω $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert C^*-πρότυπο όπου $\mathcal{A}$ μία μοναδιαία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{K}(\mathcal{X})$, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ οι C^*-άλγεβρας των "συμπαγών" και των adjointable τελεστών αντίστοιχα.

1. Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα στοιχεία $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, μέσω της εικόνας του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{A,A} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με μία ικανή και αναγκαία συνθήκη?
2. Επεκτείνεται ο πρώτος χαρακτηρισμός σε πολλαπλασιαστικούς τελεστές της μορφής $M_{A,B}$?
3. Επεκτείνεται ο χαρακτηρισμός σε στοιχειώδεις τελεστές?
4. Υπάρχει διάκριση μεταξύ των στοιχειωδών τελεστών που μπορούν να αναπαρασταθούν με "συμπαγή" σύμβολα και εκείνων που μπορούν να αναπαρασταθούν με τουλάχιστον ένα "συμπαγές" σύμβολο σε κάθε προσθετέο πολλαπλασιαστικό τελεστή?

Πρόβλημα 1: "μεγάλα σύμβολα με μικρή εικόνα"

Έστω $\mathcal{A} = C(X)$, όπου X ένας συμπαγής χώρος Haussdorf και $C(X)$ η C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων επί του X. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g \in C(X)$, $f \neq 0, g \neq 0$ με ξένους φορείς. Θέτουμε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, $A(h_1, h_2, ...) = (fh_1, fh_2, ...)$ και $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, $B(h_1, h_2, ...) = (gh_1, gh_2, ...)$. Έχουμε ότι $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και $[t_{i,j}]$, ο πίνακας του T ως προς την κανονική βάση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Έχουμε

$$M_{A,B}(T) = ATB = [ft_{i,j}g] = 0,$$

και κατά συνέπεια ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής με μη συμπαγή σύμβολα μπορεί να είναι ο μηδενικός.

Πρόβλημα 2: "μικρά σύμβολα με μεγάλη εικόνα"

Έστω $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert. Θέτουμε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, όπου ο αντίστοιχος πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ έχει $1_{\mathcal{B}(H)}$ στην $(1,1)$-καταχώρηση και 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{A,A} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι εικόνα του $M_{A,A}$ ισούται με το $\mathcal{B}(H)$ και ως εκ τούτου η εικόνα του πολλαπλασιαστικού τελεστή είναι "μεγάλη".

Prime C^*-άλγεβρες

Ορισμός (prime ιδεώδες)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Ένα κλειστό ιδεώδες $\mathcal{I}$ της $\mathcal{A}$ λέγεται prime, εάν για κάθε δύο κλειστά ιδεώδη $\mathcal{J}_1$ και $\mathcal{J}_2$ της $\mathcal{A}$, με $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ έχουμε ότι $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{I}$ ή $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$.

Ορισμός (prime C^*-άλγεβρα)

Μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται prime, εάν το $\{0\}$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{A}$.

Prime C^*-άλγεβρες

Πρόταση (ισοδυναμία ορισμού prime)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime.*
2. *Αν $a, b \in \mathcal{A}$ και $axb = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.*

Θεώρημα (Mathieu 1989)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*
2. $\|M_{a,b}\| = \|a\|\|b\|$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$.

Prime C^*-άλγεβρες

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*
2. *Η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*
3. *Η $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

Τότε $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$. Επιπλέον, αν το $\mathcal{X}$ είναι full, τότε $2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Prime C^*-άλγεβρες

Η ισοδυναμία των 2 και 3 προκύπτει από τα ακόλουθα:

Λήμμα (Kasparov 1980)

Εάν $\mathcal{X}$ είναι ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο, τότε $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \simeq M(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$

Θεώρημα (Mathieu 1989)

Για κάθε C^*-άλγεβρα, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime*
2. *Η $M(\mathcal{A})$ είναι prime*

Prime C^*-άλγεβρες

"$\Rightarrow$"
Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.
Έστω $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ μη-μηδενικοί τελεστές και $(a_{ij}), (b_{ij})$ οι αντίστοιχοι πίνακες στην κανονική βάση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.
Επειδή οι A και B είναι μη-μηδενικοί, υπάρχουν $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k,l} \neq 0$ και $b_{m,n} \neq 0$.
Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα, υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ ώστε $a_{kl} x b_{mn} \neq 0$.
Θέτουμε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ με αντίστοιχο πίνακα (x_{ij}) ώστε $x_{ij} = 0$ εάν $(i, j) \neq (l, m)$ και $x_{lm} = x$.
Τότε $AXB \neq 0$.

Prime C^*-άλγεβρες

Τώρα θα θεωρήσουμε ότι $\mathcal{X}$ είναι ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.
Έστω ότι η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα.
Τότε, υπάρχουν μη-μηδενικοί τελεστές $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε $A\mathcal{B}(\mathcal{X})B = 0$.
Θεωρούμε $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ όπου

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $\tilde{A}, \tilde{B} \neq 0$ και $\tilde{A}\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})\tilde{B} = 0$.
Η C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ είναι ισόμορφες. Άρα η C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ δεν είναι prime το οποίο είναι άτοπο.

Prime C^*-άλγεβρες

"$\Leftarrow$"

Παρατήρηση

Εάν $\mathcal{X}$ είναι full Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο, για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχουν $x, y \in \mathcal{X}$ ώστε ο τελεστής $\theta_{x,ya}$ είναι μη-μηδενικός, καθώς $ya = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{X}$ αν και μόνο αν $a = 0$. Άρα, υπάρχει $y \in \mathcal{X}$ ώστε $ya \neq 0$. Όμως $\langle ya, ya \rangle \in \mathcal{A}$ και $\langle ya, ya \rangle \neq 0$, άρα υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ ώστε $x\langle ya, ya \rangle \neq 0$. Τότε, $\theta_{x,ya}(ya) = x\langle ya, ya \rangle \neq 0$.

Εάν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ ώστε $a\mathcal{A}b = \{0\}$.
Όμως, μπορούμε να βρούμε $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ ώστε $\theta_{x,ya^*} \neq 0$ και $\theta_{z,wb^*} \neq 0$.
Έτσι, για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ έχουμε

$$\theta_{x,ya^*} X \theta_{z,wb^*} = \theta_{xa\langle y, Xz \rangle b, w} = 0$$

και άρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα.

Ομοιόμορφα προσεγγίσιμα σύνολα σε C^*-άλγεβρες

Ορισμός (Ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο)

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{S}$ ένα φραγμένο υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{S}$ ονομάζεται ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο, εάν υπάρχει προσεγγιστική μονάδα $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$, ώστε

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \lambda_0 \in \Lambda \quad : \quad \|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon \quad , \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 \ , \ \forall s \in \mathcal{S}.$$

Ομοιόμορφα προσεγγίσιμα σύνολα σε C^*-άλγεβρες

- Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{S}$ ένα ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο της $\mathcal{A}$. Για κάθε προσεγγιστική μονάδα $\{w_\mu\}_{\mu\in M}$ της $\mathcal{A}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mu_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|w_\mu s w_\mu - s\| < \varepsilon$ για κάθε $\mu \geq \mu_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$.

- Έστω $\mathcal{S}$ ένα φραγμένο υπσύνολο της $\mathcal{A}$ και $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{S}$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο αν και μόνον αν

$$\lim_{\lambda} \sup\{\|u_\lambda s u_\lambda - s\| : s \in \mathcal{S}\} = 0.$$

Ομοιόμορφα προσεγγίσιμα σύνολα σε C^*-άλγεβρες

- Σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα, κάθε φραγμένο υποσύνολο είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο.

- Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{K}(H)$ η C^*-άλγεβρα των συμπαγών τελεστών στον χώρο Hilbert H, και $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του H.
  Θεωρούμε για $i \in \mathbb{N}$ την ορθή προβολή E_i στον υπόχωρο που παράγει το e_i.
  Το σύνολο $\mathcal{S} = \{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο αλλά όχι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο στην $\mathcal{K}(H)$.

Ομοιόμορφα προσεγγίσιμα σύνολα σε C^*-άλγεβρες

- Σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ένα ολικά φραγμένο υποσύνολο $\mathcal{S}$ της $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο.
  Το αντίστροφο ισχύει αν η $\mathcal{A}$ αποτελείται από συμπαγή στοιχεία.

- Θεωρούμε την C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, των adjointable τελεστών στο standard Hilbert πρότυπο $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, όπου $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα. Εάν $e_1 = (1, 0, 0, ...) \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, το υποσύνολο $\mathcal{S} = \{\theta_{e_1 \cdot a, e_1} : a \in \mathcal{A}, \|a\| \leq 1\}$ της $\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο αλλά όχι ολικά φραγμένο σύνολο.

- Στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{K}(H)$, την άλγεβρα των συμπαγών τελεστών σε ένα χώρο Hilbert H, τα ομοιόμορφα προσεγγίσιμα σύνολα και τα ολικά φραγμένα σύνολα ταυτίζονται.

Πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Συμβολισμοί

$\mathcal{A}$	:	*μία μοναδιαία C^*-άλγεβρα*
$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$	:	*το standard Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο*
$\mathcal{X}$	:	*ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο*
$(\mathcal{X})_1$	:	*η μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{X}$*
$\mathcal{B}(\mathcal{X})$	:	*η C^*-άλγεβρα των adjointable τελεστών στο $\mathcal{X}$*
$\mathcal{B}(\mathcal{X})_1$	:	*η μοναδιαία μπάλα της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$*
$\mathcal{K}(\mathcal{X})$	:	*η C^*-άλγεβρα των συμπαγών τελεστών στο $\mathcal{X}$*
$\mathcal{K}(\mathcal{X})_1$	:	*η μοναδιαία μπάλα της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$*
$\mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$	:	*η άλγεβρα των στοιχειωδών τελεστών στο $\mathcal{B}(\mathcal{X})$*
$\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$	:	*αριθμήσιμη προσεγ. μονάδα της $\mathcal{K}(\mathcal{X}), Q_n^{\perp} = 1 - Q_n$*
$P_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$	:	$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), P_{(n,m)} = P_m - P_n$

Πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα και $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. A *ή* $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.
2. $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα και $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.
2. *το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομοιόμορφα προσεγγίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη: A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι άμεση.
Θα δείξουμε την συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 1$, αρχικά για $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Παρατήρηση

Συμβολίζουμε $[.] : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ *την απεικόνιση πηλίκο* $T \mapsto [T]$. *Για* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *ισχύει ότι* $\|[T]\| \leq \|T\|$. *Επίσης* $T = Q_n T + Q_n^{\perp} T$ *άρα* $\|[T]\| \leq \|Q_n^{\perp} T\|$ *και* $\|[T]\| \leq \|T Q_n^{\perp}\|$ *αντίστοιχα*

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα

Έστω $\mathcal{A}$ *μία prime* C^**-άλγεβρα με μονάδα. Θεωρούμε* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ *με* $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. *Θέτουμε* $r = \|[A]\|\|[B]\|$. *Έστω* $\varepsilon > 0$. *Τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $m > n$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ *με* $T = P_{(n,m)} T P_{(n,m)}$ *και* $x \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ *με* $x = P_n^{\perp} x$ *και* $\|x\| \leq 1$ *ώστε* $\|ATBx\| \geq r - \varepsilon$.

Απόδειξη: A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$

Απόδειξη [Λήμματος] Η C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι prime με μονάδα, άρα

$$\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp BP_n^\perp}\| = \|AP_n^\perp\|\|P_n^\perp BP_n^\perp\| \geq \|[A]\|\|[B]\| = r.$$

Υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε $\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp AP_n^\perp}(S)\| \geq r - \varepsilon/4$ και $y \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε

$$\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp AP_n^\perp}(S)y\| = \|AP_n^\perp SP_n^\perp BP_n^\perp y\| \geq r - \varepsilon/2.$$

Όμως για $A, T, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ και $x \in (\mathcal{X})_1$ ισχύει $AQ_nTQ_nBx \to ATBx$. Άρα

$$\lim_{m\to\infty} AP_n^\perp P_m SP_n^\perp P_m BP_n^\perp y = AP_n^\perp SP_n^\perp BP_n^\perp y$$

και άρα υπάρχει $m > n$ τέτοιο ώστε

$$\|AP_n^\perp P_m SP_n^\perp P_m BP_n^\perp y\| \geq r - \varepsilon.$$

Ο $T = P_{(n,m)}SP_{(n,m)}$ και το $x = P_n^\perp y$ ικανοποιούν το Λήμμα. $\square$

Απόδειξη: A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$

Από το Λήμμα, για κάθε $l \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_l, m_l \in \mathbb{N}$, $Y_l \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ και $x_l \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $n_l < m_l < n_{l+1} < m_{l+1}$ for all $l \in \mathbb{N}$.
2. $Y_l = P_{(n_l,m_l)} Y P_{(n_l,m_l)}$ for all $l \in \mathbb{N}$.
3. $\|x_l\| \leq 1$ and $x_l = P_{n_l}^{\perp} x_l$ for all $l \in \mathbb{N}$.
4. $\|AY_l Bx_l\| \geq r - \varepsilon$ for all $l \in \mathbb{N}$.
5. $\|A(Y_1 + Y_2 + ...Y_{l-1})Bx_l\| \leq \varepsilon/2^l$ for all $l \in \mathbb{N}$
6. $\|AY_q Bx_l\| \leq \varepsilon/2^q$ for all $q \in \mathbb{N}$ and for all $l < q$.

Απόδειξη: A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$

Έστω $Y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$. Τότε $Y_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)_1$. Ο τελεστής AY_0B είναι συμπαγής. Έστω $l \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|AY_0BP_{n_l}^{\perp}\| &\geq \|AY_0Bx_l\| \\
&\geq \|AY_lBx_l\| - \left\| A\left(\sum_{i=1}^{l-1} Y_i\right) Bx_l \right\| - \sum_{i=l+1}^{\infty} \|AY_iBx_l\| \\
&\geq r - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^l} - \sum_{i=l+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\
&\geq r - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή ο τελεστής AY_0B είναι συμπαγής, $\lim_{l\to\infty} \|AY_0BP_{n_l}^{\perp}\| = 0$ και ως εκ τούτου $r - 2\varepsilon \leq 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Απόδειξη: A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$

Για την περίπτωση όπου $\mathcal{X}$ είναι ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert πρότυπο, θεωρούμε $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ ώστε

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε,

$$M_{\tilde{A},\tilde{B}}\left(\mathcal{B}_1(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})\right) = \begin{pmatrix} M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την περίπτωση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, έχουμε ότι $\tilde{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ ή $\tilde{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ και ως εκ τούτου $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.

Απόδειξη: $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ.

"$\Rightarrow$"

Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|BQ_n - B\| < \varepsilon/2$ και $\|Q_nA - A\| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
\|Q_nAXBQ_n - AXB\| &= \|Q_nAXBQ_n - Q_nAXB + Q_nAXB - AXB\| \\
&\leq \|Q_nAX\|\|BQ_n - B\| + \|Q_nA - A\|\|XB\| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$.

Απόδειξη: $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ.

"$\Leftarrow$"

Έστω ότι $A \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Τότε η ακολουθία $\{Q_n^\perp A\}_{n=1}^\infty$ δεν τείνει στο μηδέν, άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $\|Q_n^\perp A\| \geq r$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, άρα

$$\|M_{Q_n^\perp A,B}\| = \|Q_n^\perp A\|\|B\| \geq r\|B\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, τέτοιο ώστε

$$\|M_{Q_n^\perp A,B}(Y_n)\| \geq \frac{r\|B\|}{2}.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sup_{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_n AYBQ_n - AYB\| &\geq \|Q_m^\perp (Q_n AY_m BQ_n - AY_m B)\| \\ &= \left\| \left(Q_m^\perp Q_n AY_m BQ_n - Q_m^\perp AY_m B \right) \right\| \end{aligned}$$

$\forall m \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη: $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ.

Όμως $\lim_{m\to\infty} Q_m^{\perp} Q_n = 0$ και άρα

$$\begin{aligned}\sup_{Y\in\mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_n AYBQ_n - AYB\| &\geq \|Q_m^{\perp} AY_m B\| = \|M_{Q_m^{\perp}A,B}(Y_m)\| \\ &\geq \frac{r\|B\|}{2}.\end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{Y\in\mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_n AYBQ_n - AYB\| = 0$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Η απόδειξη είναι όμοια αν $B \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Συνέπεια χαρακτηρισμού

Θεώρημα

Εάν $\mathcal{A}$ μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, τότε το ιδεώδες $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες της C^*-άλγεβρας $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
Εάν $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, ισχύει και το αντίστροφο.

Συνέπεια χαρακτηρισμού

Απόδειξη Θα υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα και $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Τότε υπάρχουν δύο κλειστά ιδεώδη $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε $\mathcal{J}_1 \neq \{0\}$, $\mathcal{J}_2 \neq \{0\}$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \not\subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Έστω $C \in \mathcal{J}_1$, $D \in \mathcal{J}_2$ ώστε $\|C\| \leq 1, \|D\| \leq 1$ και $C, D \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Έχουμε $C\mathcal{B}(\mathcal{X})_1 D \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$, το οποίο είναι άτοπο. Για $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, εάν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ ώστε $axb = 0$, $\forall x \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ με αντίστοιχο πίνακα (a_{ij}) με $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ και $a_{ii} = a$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Επίσης θεωρούμε τον τελεστή $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ με αντίστοιχο πίνακα (b_{ij}) με $b_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ και $b_{ii} = b$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Ξεκάθαρα $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) - \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και $AXB = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Θεωρούμε το ιδεώδες $\mathcal{J}_1$ του $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ που παράγεται από το A και το ιδεώδες $\mathcal{J}_2$ του $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ που παράγεται από το B. Τότε $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \{0\} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \not\subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Άρα το $\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ δεν είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. $\square$

Στοιχειώδεις τελεστές

Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

Θεώρημα

1. $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.
2. *Υπάρχουν $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i ή B_i ανήκουν στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$.*

Θεώρημα

1. *Το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ομοιόμορφα προσεγγίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*
2. *Υπάρχουν $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$.*

Απόδειξη: $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1 \Leftrightarrow A_i$ ή $B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \forall i$

Θεώρημα (Mathieu 1988)

Εάν $\mathcal{A}$ μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\Phi = \sum_{i=1}^n M_{A_i,B_i}$, $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$, ώστε το σύνολο $\{B_i\}_{i=1}^n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. $\Phi = 0$,
2. $A_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$.

Παρατήρηση

Έστω $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Η απεικόνιση $[T] \mapsto [\Phi(T)]$ είναι καλά ορισμένος στοιχειώδης τελεστής στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Θα τον συμβολίζουμε $[\Phi]$. Εάν $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$ όπου $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ για $i = 1, \ldots, k$ και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, τότε $[\Phi]([T]) = \sum_{i=1}^k [A_i][T][B_i]$.

Απόδειξη: $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1 \Leftrightarrow A_i$ ή $B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \forall i$

"$\Rightarrow$" Υποθέτουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ είναι μία γραφή του Φ ώστε τα μη συμπαγή στοιχεία του συνόλου $\{B_1, \ldots, B_k\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα modulo $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Έστω $J = \{i \in \{1, \ldots, k\} : B_i \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})\}$. Τότε $[\Phi] = \sum_{i=1}^{k} M_{[A_i],[B_i]} = \sum_{i \in J} M_{[A_i],[B_i]} = 0$. Το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Επομένως το πηλίκο $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα. Το σύνολο $\{[B_i], i \in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στην C^*-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Ακολουθεί ότι $[A_i] = [0]$ για όλα τα $i \in J$, επομένως $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \in J$. Τέλος $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i} = \sum_{i \in J} M_{A_i,B_i} + \sum_{i \in J^c} M_{A_i,B_i}$ με $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \in J$ και $B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \notin J$.

Απόδειξη: $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ. $\Leftrightarrow A_i, B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \forall i$

Θεώρημα (Magajna 2012)

Εάν $\mathcal{A}$ μία μοναδιαία prime C^*-άλγεβρα, J ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος της $\mathcal{A}$ και $b \in \mathcal{A} - J$, τότε υπάρχει $\Psi \in \mathcal{EL}(\mathcal{A})$ ώστε $\Psi(b) \neq 0$ και $\Psi(j) = 0$ για κάθε $j \in J$.

Λήμμα

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{S}$ ένα ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο της $\mathcal{A}$ και $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\kappa_0 \in \Lambda$ ώστε $\|s - u_\lambda s\| < \varepsilon$ (αντίστοιχα $\|su_\lambda - s\| < \varepsilon$) για κάθε $\lambda \geq \kappa_0$ και για κάθε $s \in S$.

Απόδειξη: $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ. $\Leftrightarrow A_i, B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \forall i$

"$\Rightarrow$" Υπάρχουν $\{A_i\}_{i=1}^k, \{B_i\}_{i=1}^k$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i να περιέχονται στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i = 1, \ldots, k$ και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$. Υποθέτουμε ότι $A_1 \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $B_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επειδή $l(\Phi) = k$, τα στοιχεία του συνόλου $\{B_1, \ldots, B_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Υπάρχει $\Psi = \sum_{i=1}^l M_{C_i,D_i} \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ ώστε $\Psi(B_1) \neq 0$ και $\Psi(B_i) = 0$ για $i = 2, \ldots, k$. Θεωρούμε $\|C_i\|, \|D_i\| \leq 1$, για $i = 1, \ldots, l$. Θεωρούμε την προσεγγιστική μονάδα $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Για την νόρμα του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{Q_n^\perp A_1,\Psi(B_1)}$ έχουμε

$$\|M_{Q_n^\perp A_1,\Psi(B_1)}\| = \|Q_n^\perp A_1\|\|\Psi(B_1)\| \geq \|[A_1]\|\|\Psi(B_1)\| = r > 0,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$ ώστε

$$\|M_{Q_n^\perp A_1,\Psi(B_1)}(Y_n)\| > r/2 > 0. \tag{1}$$

Απόδειξη: $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομ. προσεγ. $\Leftrightarrow A_i, B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), \forall i$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{l} \Phi(Y_n C_i) D_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} A_j Y_n C_i B_j D_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} A_j Y_n C_i B_j D_i$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A_j Y_n \sum_{i=1}^{l} C_i B_j D_i = \sum_{j=1}^{k} A_j Y_n \Psi(B_j) = A_1 Y_n \Psi(B_1),$$

και άρα

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} Q_n^{\perp} \Phi(Y_n C_i) D_i \right\| = \left\| Q_n^{\perp} A_1 Y_n \Psi(B_1) \right\| > \frac{r}{2}.$$

Από το Λήμμα έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{l} Q_n^{\perp} \Phi(Y_n C_i) D_i \right\| = 0$$

που είναι άτοπο.

Στοιχειώδεις τελεστές και πλήρη θετικότητα

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μία prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο Φ είναι πλήρως θετικός $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*
2. *Υπάρχουν $\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\{A_i\}_{i=1}^k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i^*, A_i}$.*
3. *Ο τελεστής Φ είναι πλήρως θετικός, και το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ ομοιόμορφα προσεγγίσιμο σύνολο της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*