Η νόρμα "διαμάντι"

Α. Κατάβολος

22 Μαρτίου 2019

Υπενθύμιση

$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ χώροι Hilbert πεπερασμένης διάστασης (: μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι): $\mathscr{X} \simeq (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Υπενθύμιση: Schatten norms στον $L(\mathscr{X})$:
$A \in L(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) : A = U|A|$ όπου $|A| = (A^*A)^{1/2} \in L(\mathscr{X})$ θετικός ($|A| \in \mathrm{Pos}(\mathscr{X})$) και $U : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ (μερική) ισομετρία.
Από Φασματικό Θεώρημα: $|A| = \sum_{k=1}^{r} s_k u_k u_k^*$ όπου $u_k \in \mathscr{X}$, $\|u_k\| = 1$ και $s_k > 0$. Τότε

$$\|A\|_{op} = \|A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}\| = \|\,|A|\,\| = \sup_k s_k, \quad \text{ενώ}$$

$$\|A\|_1 = \|\,|A|\,\|_1 = \mathrm{tr}(|A|) = \sum_k s_k.$$

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

$$\mathscr{X} = (\mathbb{C}^{\Sigma}, \|\cdot\|_2), \quad \mathscr{Y} = (\mathbb{C}^{\Gamma}, \|\cdot\|_2).$$

«Υπερτελεστές»:

$$T(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) := \{\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y}) \text{ γραμμική}\} = L((L(\mathscr{X}), L(\mathscr{Y}))$$

Ορισμός

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, (α) η επαγόμενη νόρμα ίχνους:

$$\|\Phi\|_{11} := \|\Phi : (L(\mathscr{X}), \|\cdot\|_1) \to (L(\mathscr{Y}), \|\cdot\|_1)\|$$
$$= \sup\{\|\Phi(A)\|_1 : A \in L(\mathscr{X}), \|A\|_1 \leq 1\}.$$

(β) Η πλήρως φραγμένη νόρμα ίχνους ή νόρμα διαμάντι:

$$\|\Phi\|_{\diamond} := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11}.$$

Η νόρμα διαμάντι

Λήμμα

Έστω $\Phi \in T(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. *Για κάθε* $\mathscr{Z}$ *και κάθε* $x, y \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{Z}$ *νόρμας 1, υπάρχουν* $u, v \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{X}$ *νόρμας 1 ώστε:*

$$\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(xy^*)\right\|_1 = \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uv^*)\right\|_1$$
$$\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(xx^*)\right\|_1 = \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uu^*)\right\|_1 .$$

Θεώρημα

Έστω $\Phi \in T(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. *Για κάθε* $\mathscr{Z}$ *έχουμε*

$$\left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11} \leq \|\Phi\|_{\bullet}$$

και, αν $dim(\mathscr{Z}) \geq dim(\mathscr{X})$, *τότε ισχύει ισότητα.*

Συνεπώς

$$\|\Phi\|_{\diamond} := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11} = \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})}\right\|_{11} := \|\Phi\|_{\bullet} .$$

Η νόρμα διαμάντι

Παρατήρηση Αν τα Φ_0 και Φ_1 είναι κβαντικά κανάλια, τότε και το $\Phi_0 \otimes \Phi_1 : L(\mathscr{X}_0 \otimes \mathscr{X}_1) \to L(\mathscr{Y}_0 \otimes \mathscr{Y}_1)$ είναι κβαντικό κανάλι.

Θεώρημα

Αν $\Phi_0 \in T(\mathscr{X}_0, \mathscr{Y}_0)$ και $\Phi_1 \in T(\mathscr{X}_1, \mathscr{Y}_1)$, τότε

$$\|\Phi_0 \otimes \Phi_1\|_\diamond = \|\Phi_0\|_\diamond \|\Phi_1\|_\diamond .$$

Χρησιμοποιεί:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & A \in L(\mathscr{X}), B \in L(\mathscr{Y}) \Rightarrow tr(|A| \otimes |B|) = \mathrm{tr}(|A|)\mathrm{tr}(|B|) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \|A \otimes B\|_1 = \|A\|_1 \|B\|_1 \\
(b) \quad & \|\Phi_0 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_2 \otimes \Phi_3\|_{11} = \|\Phi_0 \otimes \Phi_2 \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_3\|_{11}
\end{aligned}$$

Απόσταση κβαντικών καναλιών

Υπενθ: Για κάθε $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ έχουμε

$$\|\Phi\|_\diamond = \max\{\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uv^*)\right\|_1 : u, v \in \mathscr{S}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{X})\}.$$

Θεώρημα

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ διατηρεί ερμιτιανά στοιχεία [1] *τότε υπάρχει $u \in \mathscr{S}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{X})$ ώστε*

$$\|\Phi\|_\diamond = \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uu^*)\right\|_1 .$$

Χρησιμοποιεί το Λήμμα 1 και το

Λήμμα

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ διατηρεί ερμιτιανά στοιχεία τότε για κάθε $\mathscr{Z}$ διάστασης τουλάχιστον 2 υπάρχει $u \in \mathscr{S}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Z})$ ώστε

$$\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(uu^*)\right\|_1 \geq \|\Phi\|_{11} .$$

[1] $\iff \Phi(T^*) = \Phi(T)^*$ για κάθε $T \in L(\mathscr{X})$

Απόσταση κβαντικών καναλιών

Θεώρημα (Holevo–Helstrom – υπενθύμιση)

Έστω $\rho_0, \rho_1 \in D(\mathscr{X})$ *και* $\lambda \in [0,1]$. *Τότε για κάθε μέτρηση* $\mu : \{0,1\} \to Pos(\mathscr{X})$ *(δηλ.* $\mu(0) + \mu(1) = 1_{\mathscr{X}}$*), ισχύει ότι*

$$\lambda \langle \mu(0), \rho_0 \rangle + (1-\lambda) \langle \mu(1), \rho_1 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\lambda \rho_0 - (1-\lambda)\rho_1\|_1$$

και υπάρχει μέτρηση μ *με τιμές προβολές για την οποία επιτυγχάνεται ισότητα.*

Θεώρημα

Έστω $\Phi_0, \Phi_1 \in C(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *κβαντικά κανάλια και* $\lambda \in [0,1]$. *Τότε για κάθε* $\mathscr{Z}$*, κάθε μέτρηση* $\mu : \{0,1\} \to Pos(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Z})$ *και κάθε κατάσταση* $\sigma \in D(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Z})$*, αν θέσουμε* $\rho_i = \Phi_i(\sigma)$ *ισχύει ότι*

$$\lambda \langle \mu(0), \rho_0 \rangle + (1-\lambda) \langle \mu(1), \rho_1 \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\lambda \Phi_0 - (1-\lambda)\Phi_1\|_\diamond$$

και υπάρχουν μέτρηση μ *με τιμές προβολές και καθαρή κατάσταση* $\sigma \in D(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Z})$*, για τις οποίες επιτυγχάνεται ισότητα.*