Η νόρμα “διαμάντι”

Α. Κατάβολος

15 Μαρτίου 2019

Υπενθύμιση

$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ χώροι Hilbert πεπερασμένης διάστασης (: μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι): $\mathscr{X} \simeq (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Υπενθύμιση: Schatten norms στον $L(\mathscr{X})$:
$A \in L(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) : A = U|A|$ όπου $|A| = (A^*A)^{1/2} \in L(\mathscr{X})$ θετικός ($|A| \in \mathrm{Pos}(\mathscr{X})$) και $U : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ (μερική) ισομετρία.
Από Φασματικό Θεώρημα: $|A| = \sum_{k=1}^{r} s_k u_k u_k^*$ όπου $u_k \in \mathscr{X}$, $\|u_k\| = 1$ και $s_k > 0$. Τότε

$$\|A\|_{op} = \|A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}\| = \|\,|A|\,\| = \sup_k s_k, \quad \text{ενώ}$$

$$\|A\|_1 = \|\,|A|\,\|_1 = \mathrm{tr}(|A|) = \sum_k s_k.$$

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

$$\mathscr{X} = (\mathbb{C}^\Sigma, \|\cdot\|_2), \quad \mathscr{Y} = (\mathbb{C}^\Gamma, \|\cdot\|_2).$$

«Υπερτελεστές»:

$$T(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) := \{\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y}) \text{ γραμμική}\} = L((L(\mathscr{X}), L(\mathscr{Y}))$$

Ορισμός

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, (α) η επαγόμενη νόρμα ίχνους:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{11} &:= \|\Phi : (L(\mathscr{X}), \|\cdot\|_1) \to (L(\mathscr{Y}), \|\cdot\|_1)\| \\ &= \sup\{\|\Phi(A)\|_1 : A \in L(\mathscr{X}), \|A\|_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

(β) Η πλήρως φραγμένη νόρμα ίχνους ή νόρμα διαμάντι:

$$\|\Phi\|_\diamond := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11}.$$

Μειονέκτημα της $\|\cdot\|_{11}$

Παράδειγμα

$\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{X}) : A \to A^t$ *(ανάστροφος) τότε* $\|\Phi\|_{11} = 1$, *αλλά*

$$\left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})} : L(\mathscr{X} \otimes \mathscr{X}) \to L(\mathscr{X} \otimes \mathscr{X})\right\|_{11} = n.$$

$(n = \dim \mathscr{X})$

$$\tau = \frac{1}{n} \sum E_{ab} \otimes E_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει $\|\tau\|_1 = 1$, αλλά

$$\sigma := (\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(\tau) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει $\|\sigma\|_1 = n$. Άρα $\left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})}\right\|_{11} \geq n$.

Διόρθωση: Η νόρμα διαμάντι

Ορισμός

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, *(α) η επαγόμενη νόρμα ίχνους:*

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{11} &:= \|\Phi : (L(\mathscr{X}), \|\cdot\|_1) \to (L(\mathscr{Y}), \|\cdot\|_1)\| \\ &= \sup\{\|\Phi(A)\|_1 : A \in L(\mathscr{X}), \|A\|_1 \leq 1\}.\end{aligned}$$

(β) Η πλήρως φραγμένη νόρμα ίχνους ή νόρμα διαμάντι:

$$\|\Phi\|_\diamond := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11}.$$

Προσωρινά ορίζουμε

$$\|\Phi\|_\bullet := \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})}\right\|_{11}.$$

Θα δείξουμε ότι $\|\Phi\|_\bullet = \|\Phi\|_\diamond$.

Η απεικόνιση $\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}$ και η νόρμα διαμάντι

$$\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y})$$
$$\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})} : L(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Z}) \to L(\mathscr{Y} \otimes \mathscr{Z})$$
$$A \otimes B \to \Phi(A) \otimes B$$

$$(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} \otimes E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{m} \Phi(A_{ij}) \otimes E_{ij} \quad (m = \dim(\mathscr{Z}))$$
$$(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})([A_{ij}]) = \sum_{i,j=1}^{m} [\Phi(A_{ij})]$$
$$(\text{εδώ} \quad [A_{ij}] \in M_m(L(\mathscr{X})), \quad [\Phi(A_{ij})] \in M_m(L(\mathscr{Y})))$$

$$\|\Phi\|_{\diamond} = \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11} = \sup_{\mathscr{Z}} \{ \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(A)\right\|_1 : \|A\|_1 \leq 1\}$$
$$= \sup_{m} \{ \|[\Phi(A_{ij})\|_{\mathscr{C}_1(M_m(\mathscr{Y}))} : \|[A_{ij}]\|_{\mathscr{C}_1(M_m(\mathscr{X}))} \leq 1\}$$
$$\text{όπου } \mathscr{C}_1(\mathscr{V})) := (L(\mathscr{V}), \|\cdot\|_1)$$

Η νόρμα διαμάντι

Πρόταση

1. *Για κάθε* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, *έχουμε*

$$\|\Phi\|_{\bullet} = \max\{\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uv^*)\right\|_1 : u, v \in \mathscr{S}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{X})\}.$$

2. *Αν* $\Phi \in C(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *(κβαντικό κανάλι) τότε* $\|\Phi\|_{\bullet} = 1$.
3. *Αν* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *και* $U_0, V_0 \in L(\mathscr{X})$, $U_1, V_1 \in L(\mathscr{Y})$ *unitaries, αν θέσω* $\Psi(A) := U_1 \Phi(U_0 A V_0) V_1$ *για* $A \in L(\mathscr{X})$ *τότε* $\|\Psi\|_{\bullet} = \|\Phi\|_{\bullet}$.

Η νόρμα διαμάντι

Λήμμα

Έστω $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Για κάθε $\mathscr{Z}$ και κάθε $x, y \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{Z}$ νόρμας 1, υπάρχουν $u, v \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{X}$ νόρμας 1 ώστε:

$$\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(xy^*)\right\|_1 = \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uv^*)\right\|_1$$
$$\left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})})(xx^*)\right\|_1 = \left\|(\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})})(uu^*)\right\|_1 .$$

Θεώρημα

Έστω $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Για κάθε $\mathscr{Z}$ έχουμε

$$\left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11} \leq \|\Phi\|_{\bullet}$$

και, αν $dim(\mathscr{Z}) \geq dim(\mathscr{X})$, τότε ισχύει ισότητα.

Συνεπώς

$$\|\Phi\|_{\diamond} := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11} = \left\|\Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{X})}\right\|_{11} := \|\Phi\|_{\bullet} .$$

Η νόρμα διαμάντι

Πόρισμα

Έστω $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. *Για κάθε* $\mathscr{Z}$ *έχουμε*

$$\left\| \Phi \otimes \mathbf{1}_{L(\mathscr{Z})} \right\|_\diamond = \|\Phi\|_\diamond \,.$$

Πρόταση

1. *Αν* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *και* $\Psi \in T(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$, *τότε* $\|\Psi\Phi\|_\diamond \leq \|\Psi\|_\diamond \|\Phi\|_\diamond$.
2. *Αν* $\Phi_0, \Psi_0 \in C(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *και* $\Phi_1, \Psi_1 \in C(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$ *(κανάλια), τότε* $\|\Psi_1\Psi_0 - \Phi_1\Phi_0\|_\diamond \leq \|\Psi_0 - \Phi_0\|_\diamond + \|\Psi_1 - \Phi_1\|_\diamond$.
3. *Αν* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *και* $U_0, V_0 \in L(\mathscr{X})$, $U_1, V_1 \in L(\mathscr{Y})$ *unitaries, αν θέσω* $\Psi(A) := U_1 \Phi(U_0 A V_0) V_1$ *για* $A \in L(\mathscr{X})$ *τότε* $\|\Psi\|_\diamond = \|\Phi\|_\diamond$.

(Το (3) δείχθηκε νωρίτερα για την $\|\cdot\|_\bullet$).)

Η νόρμα διαμάντι

Θεώρημα

Αν $\Phi_0 \in T(\mathscr{X}_0, \mathscr{Y}_0)$ *και* $\Phi_1 \in T(\mathscr{X}_1, \mathscr{Y}_1)$, *τότε*

$$\|\Phi_0 \otimes \Phi_1\|_\diamond = \|\Phi_0\|_\diamond \|\Phi_1\|_\diamond .$$

Ειδικότερα αν τα Φ_0 *και* Φ_1 *είναι κβαντικά κανάλια, τότε και το* $\Phi_0 \otimes \Phi_1 : L(\mathscr{X}_0 \otimes \mathscr{X}_1) \to L(\mathscr{Y}_0 \otimes \mathscr{Y}_1)$ *είναι κβαντικό κανάλι.*

προυφ; νεξτ τάιμ