Αποστάσεις και διάκριση κβαντικών καναλιών.
Η νόρμα "διαμάντι".

Α. Κατάβολος

8 Μαρτίου 2019

Εργασίες σχετικές με το θέμα

Johnston, Nathaniel; Kribs, David W.; Paulsen, Vern I.
Computing stabilized norms for quantum operations via the theory of completely bounded maps.
Quantum Inf. Comput. 9 (2009), no. 1-2, 16–35.

Watrous, John
Semidefinite programs for completely bounded norms.
Theory Comput. 5 (2009), 217–238.

Watrous, John
Simpler semidefinite programs for completely bounded norms.
Chic. J. Theoret. Comput. Sci. 2013, Article 8, 19 pp.

Shirokov, M.E.
Energy-constrained diamond norms and their use in quantum information theory
arXiv:1706.00361 [quant-ph]

Υπενθύμιση

$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ χώροι Hilbert πεπερασμένης διάστασης (: μιγαδικοί Ευκλείδειοι χώροι): $\mathscr{X} \simeq (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Υπενθύμιση: Schatten norms στον $L(\mathscr{X})$:
$A \in L(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) : A = U|A|$ όπου $|A| = (A^*A)^{1/2} \in L(\mathscr{X})$ θετικός ($|A| \in \mathrm{Pos}(\mathscr{X})$) και $U : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ (μερική) ισομετρία.

Από Φασματικό Θεώρημα: $|A| = \sum_{k=1}^{r} s_k u_k u_k^*$ όπου $u_k \in \mathscr{X}$, $\|u_k\| = 1$ και $s_k > 0$. Τότε

$$\|A\|_{op} = \|A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}\| = \| \, |A| \, \| = \sup_k s_k, \quad \text{ενώ}$$

$$\|A\|_1 = \| \, |A| \, \|_1 = \mathrm{tr}(|A|) = \sum_k s_k.$$

Υπενθύμιση

Εσωτερικό γινόμενο στον $L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$:

$$\langle A,B\rangle := \mathrm{tr}(A^*B), \qquad A,B\in L(\mathscr{X},\mathscr{Y}).$$

$(L(\mathscr{X}),\|\cdot\|_{op})$: τελεστές, $\quad (L(\mathscr{X}),\|\cdot\|_1)$: γραμμικές μορφές,
μέσω: $T\in (L(\mathscr{X}),\|\cdot\|_1) \rightsquigarrow \phi_T$ όπου
$\phi_T : (L(\mathscr{X}),\|\cdot\|_{op}) \to \mathbb{C} : A \to \langle T,A\rangle := \mathrm{tr}(T^*A)$.

Ισχύει ότι $\|\phi_T\| = \sup\{|\langle T,A\rangle| : A\in L(\mathscr{X}), \|A\|_{op}\le 1\} = \|T\|_1$
και $\|A\| = \sup\{|\langle T,A\rangle| : T\in L(\mathscr{X}), \|T\|_1 \le 1\}$.

Παρατήρηση: States $\phi_\rho \simeq$ density operators $\rho\in D(\mathscr{X})$: positive and $\mathrm{tr}(\rho)=1$ (ισοδύναμα, ϕ_ρ θετική γραμμική μορφή νόρμας 1).

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

«Υπερτελεστές»:

$$T(\mathscr{X},\mathscr{Y}) := \{\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y}) \text{ γραμμική}\} = L((L(\mathscr{X}), L(\mathscr{Y}))$$

Αν $\Phi : L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y})$ ορίζω $\Phi^* : L(\mathscr{Y}) \to L(\mathscr{X})$ από

$\langle \Phi^*(B), A\rangle_{L(\mathscr{X})} = \langle B, \Phi(A)\rangle_{L(\mathscr{Y})}$ δηλ. $\mathrm{tr}((\Phi^*(B))^* A) = \mathrm{tr}(B(\Phi(A))^*)$,

$A \in L(\mathscr{X}), B \in L(\mathscr{Y})$.

Ορισμός

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, (α) ***η επαγόμενη νόρμα ίχνους:***

$$\|\Phi\|_{11} := \|\Phi : (L(\mathscr{X}), \|\cdot\|_1) \to (L(\mathscr{Y}), \|\cdot\|_1)\|$$
$$= \sup\{\|\Phi(A)\|_1 : A \in L(\mathscr{X}), \|A\|_1 \le 1\}.$$

(β) ***Η πλήρως φραγμένη νόρμα ίχνους ή νόρμα διαμάντι:***

$$\|\Phi\|_\diamond := \sup_{\mathscr{Z}} \left\|\Phi \otimes I_{L(\mathscr{Z})}\right\|_{11}.$$

$\sup = \max$ λόγω πεπερ. διάστασης. Μπορώ και $\|A\|_1 = 1$.

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

Πρόταση

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$,

$$\|\Phi\|_{11} = \max\{\|\Phi(uv^*)\|_1 : u, v \in S(\mathscr{X})\}.$$

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

Υπενθ. Μια $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ λέγεται θετική όταν $\Phi(\mathrm{Pos}(\mathscr{X})) \subseteq \mathrm{Pos}(\mathscr{Y})$. Τότε $\Phi(\mathrm{Herm}(\mathscr{X})) \subseteq \mathrm{Herm}(\mathscr{Y})$.

Θεώρημα

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ θετική,

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{11} &= \max\{\|\Phi(uu^*)\|_1 : u \in S(\mathscr{X})\} \\ &= \max\{\mathrm{tr}(\Phi(uu^*)) : u \in S(\mathscr{X})\}\,. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Τότε, $\Phi^* : L(\mathscr{Y}) \to L(\mathscr{Y})$ θετική, άρα $\|\Phi^*\| = \|\Phi^*(I_{\mathscr{Y}})\|$ (Russo-Dye).

Πόρισμα

Αν $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ θετική και διατηρεί ίχνος, τότε $\|\Phi\|_{11} = 1$.

Η επαγόμενη νόρμα ίχνους (induced trace norm)

Πρόταση

1. *Αν* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ***και*** $\Psi \in T(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$, ***τότε*** $\|\Psi\Phi\|_{11} \leq \|\Psi\|_{11} \|\Phi\|_{11}$.
2. *Αν* $\Phi_0 \Psi_0 \in C(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ***και*** $\Phi_1 \Psi_1 \in C(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$, ***τότε*** $\|\Psi_1 \Psi_0 - \Phi_1 \Phi_0\|_{11} \leq \|\Psi_0 - \Phi_0\|_{11} + \|\Psi_1 - \Phi_1\|_{11}$.
3. *Αν* $\Phi \in T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ***και*** $U_0, V_0 \in L(\mathscr{X})$, $U_1, V_1 \in L(\mathscr{Y})$ *unitaries,* ***αν*** *θέσω* $\Psi(A) := U_1 \Phi(U_0 A V_0) V_1$ ***για*** $A \in L(\mathscr{X})$ ***τότε*** $\|\Psi\|_{11} = \|\Phi\|_{11}$.

Εδώ, $C(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ = Quantum channels, αλλιώς CPTP maps in $T(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ (Completely Positive and Trace Preserving).