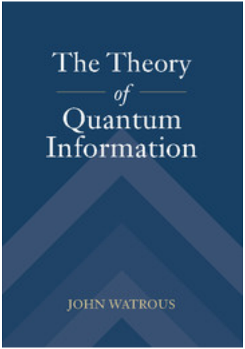
Ανάλυση και Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας
Σύντομη εισαγωγή

Α. Κατάβολος

Οκτώβριος 2018

John Watrous
The Theory of Quantum Information
(Cambridge University Press, April 2018).

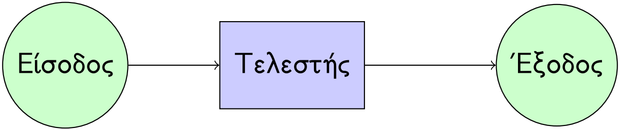


https://cs.uwaterloo.ca/~watrous/TQI/

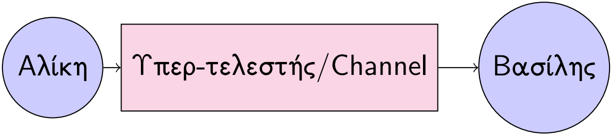
Alice and Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



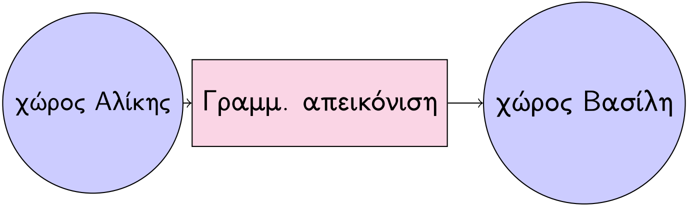
Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης → Βασίλη]



Κβαντικά κανάλια

Ένα κβαντικό κανάλι είναι (προσωρινά...) μια απεκόνιση

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_k(\mathbb{C})$$

της μορφής

$$X \mapsto \sum_{i=1}^{r} A_i^* X A_i \quad (A_i : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n,\ A_i \in M_{n,k}(\mathbb{C}))$$

που διατηρεί το ίχνος tr ($\iff \sum A_i A_i^* = Id$).

«Δυικά» έχουμε την κλάση των UCP απεικονίσεων
$\Psi : M_k(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ (πλήρως θετικές (CP) και μοναδιαίες (U)).

Για τη μελέτη τους χρησιμοποιούμε τη θεωρία των
Χώρων Τελεστών (Operator Space theory).

Χώροι Τελεστών (Operator Spaces)

Ένας χώρος τελεστών $\mathscr{X}$ είναι ένας υπόχωρος του χώρου $\mathscr{B}(H)$ των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε κάποιον (μιγαδικό) χώρο Hilbert H
(συχνά πεπερασμένης διάστασης, οπότε $H \simeq \mathbb{C}^n$).

Ο $\mathscr{X}$ κληρονομεί από τον $\mathscr{B}(H)$ τη νόρμα $\|\cdot\|$:
$\|a\| := \sup\{\|a\xi\|_H : \|\xi\|_H \le 1\}$.

Κάθε $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H είναι επίσης τελεστής (στον H^n).

Συνεπώς εκτός απ΄ τον $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$, έχουμε και την οικογένεια $\{(M_n(\mathscr{X}), \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}$.

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια απεικόνιση
$\Phi_n : M_n(\mathscr{X}) \to M_n(\mathscr{Y}) : [x_{ij}] \to [\Phi(x_{ij})]$.

Η Φ λέγεται πλήρως φραγμένη (completely bounded) αν
$\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$.

Σημ: $\|\Phi_n\| = \sup\{\|[\Phi(x_{ij})]\|_n : x_{ij} \in \mathscr{X}, \|[x_{ij}]\|_n \leq 1\}$.

Θετικές και πλήρως θετικές απεικονίσεις

Υπενθύμιση: Ένας τελεστής $a \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται θετικός ή θετικά ημιορισμένος αν $\langle \xi, a\xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.
Οι κβαντικές καταστάσεις αντιστοιχούν σε θετικούς τελεστές με ίχνος $=1$.

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ λέγεται θετική (positive) αν στέλνει θετικούς $a \in \mathscr{X}$ σε θετικούς $\Phi(a) \in \mathscr{Y}$.

Η Φ λέγεται πλήρως θετική (completely positive) αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\Phi_n : M_n(\mathscr{X}) \to M_n(\mathscr{Y})$ είναι θετική,
δηλαδή για κάθε $[a_{ij}] \in M_n(\mathscr{X})$ που ορίζει θετικό τελεστή, ο $[\Phi(a_{ij})] \in M_n(\mathscr{Y})$ ορίζει θετικό τελεστή.

Διμερή συστήματα (Bipartite systems)

Αν $E = \mathbb{C}^S$ και $F = \mathbb{C}^T$ είναι δυο χώροι (πεπερασμένης διάστασης) ορίζουμε το τανυστικό τους γινόμενο

$$E \otimes F := \mathbb{C}^{S \times T}.$$

Αν $x \in E, y \in F$ γράφουμε

$$(x \otimes y)(s,t) = x(s)y(t) \qquad (s,t) \in S \times T$$

οπότε $E \otimes F = \mathrm{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$.
Γενικότερα, αν $E \subseteq \mathbb{C}^S$ και $F \subseteq \mathbb{C}^T$ είναι υπόχωροι, ορίζουμε

$$E \otimes F = \mathrm{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}.$$

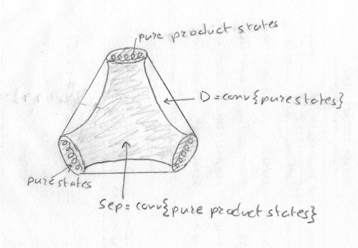
Separable and entangled states

Κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in H$ ορίζει μια κατάσταση $\omega_\xi : \mathscr{B}(H) \to \mathbb{C} : \omega_\xi(a) = \langle \xi, a\xi \rangle$.

Όταν ο χώρος H διασπάται σε $H = E \otimes F$, μπορεί το ξ να είναι της μορφής $\xi = e \otimes f$ όπου $e \in E, f \in F$. Τότε το ω_ξ λέγεται separable. Αν το ξ δεν γράφεται έτσι, το ω_ξ λέγεται entangled.

Η κυρτή θήκη των separable states της μορφής ω_ξ συμβολίζεται $\mathrm{Sep}(E : F)$.

Θα μελετήσουμε ασυμπτωτικές ιδιότητες των συνόλων $\mathrm{Sep}(E : F)$.



Σχήμα: από το βιβλίο ABMB των Aubrun-Szarek