Entanglement and Transitivity

23 Μαρτίου 2018

Μεταβατικότητα και k-μεταβατικότητα

Ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H, K)$ λέγεται (αυστηρά) μεταβατικός (ή δρα μεταβατικά) αν για κάθε $x \in H$, $x \neq 0$ και κάθε $y \in K$ υπάρχει $S \in \mathcal{S}$ ώστε $Sx = y$.

Αν $k \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H, K)$ λέγεται (αυστηρά) k-μεταβατικός αν για κάθε $(x_1, \ldots, x_k) \in H^{(k)}$ γραμμικά ανεξάρτητο και κάθε $(y_1, \ldots, y_k) \in H^{(k)}$ υπάρχει κοινό $S \in \mathcal{S}$ ώστε $Sx_i = y_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Λέγεται τοπολογικά k-μεταβατικός αν υπάρχει ακολουθία (S_n) στον $\mathcal{S}$ ώστε $\lim_n \|S_n x_i - y_i\| = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Θεώρημα (Azoff)

Ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq M_{mn}$ είναι k-μεταβατικός ανν ο υπόχωρος $\mathcal{S}^{\perp} \subseteq M_{mn}$ είναι k-διαπλεκόμενος, δηλ. δεν περιέχει κανέναν $T \neq 0$ με $\operatorname{rank} T \leq k$.

Μεταβατικότητα και διαπλοκή

Πρόταση

Αν $k < \min\{n, m\}$, *υπάρχει γραμμικός υπόχωρος* $\mathcal{L} \subseteq M_{mn}(\mathbb{C})$ *διάστασης* $\dim \mathcal{L} = (m-k)(n-k)$ *με την ιδιότητα, κάθε* $A \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ *να έχει τάξη* $\operatorname{rank}(A) \geq k+1$.

Η διάσταση ενός υποχώρου $\mathcal{M} \subseteq M_{mn}(\mathbb{C})$ με την ιδιότητα, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του να έχει τάξη τουλάχιστον $k+1$, δεν μπορεί να υπερβαίνει το $(m-k)(n-k)$.

Μεταβατικές υπάλγεβρες του $\mathcal{B}(H)$

Θεώρημα Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι αυστηρά μεταβατική, τότε είναι sot-πυκνή στον $\mathcal{B}(H)$.

Ειδικότερα

Θεώρημα (Burnside) Αν $\dim H < \infty$, κάθε μεταβατική υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$.

Μεταβατικές υπάλγεβρες του $\mathcal{B}(H)$

Παρατήρηση Αν ένας υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H, K)$ είναι τοπολογικά k-μεταβατικός για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε είναι sot-πυκνός στον $B(H, K)$
(δηλ. για κάθε $T \in \mathcal{B}(H, K)$ υπάρχει $S_i \in \mathcal{S}$ ώστε $\|S_i x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$).

The transitive algebra problem

Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι τοπολογικά μεταβατική, είναι αλήθεια ότι $\overline{\mathcal{A}}^{sot} = \mathcal{B}(H)$;

Μερικές Απαντήσεις

Burnside Αν $\dim H < \infty$, τότε ΝΑΙ: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$.

von Neumann Αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, τότε ΝΑΙ. Μάλιστα, $\overline{\mathcal{A}}^{w*} = \mathcal{B}(H)$.

Arveson Αν η $\overline{\mathcal{A}}^{w*}$ περιέχει masa, τότε ΝΑΙ
(αν δηλ. μπορώ $H = L^2(\Omega, \mu)$ ώστε $\{M_f : f \in L^\infty(\Omega, \mu)\} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{w*}$).
(εδώ $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$)
Μάλιστα, $\overline{\mathcal{A}}^{w*} = \mathcal{B}(H)$ (ισχυρότερο).

(Υπάρχουν w*-κλειστές γνήσιες υπάλγεβρες του $\mathcal{B}(H)$ που είναι wot-πυκνές).

Lomonosov $\Rightarrow$ Αν η $\overline{\mathcal{A}}^{sot}$ περιέχει έναν συμπαγή μη μηδενικό τελεστή, τότε ΝΑΙ.