Έννοιες από την Θεωρία Χώρων Hilbert - Μαθηματικές έννοιες της Κβαντικής Θεωρίας Πληροφορίας

Α. Κατάβολος

Οκτώβριος - Νοέμβριος 2017

Περιεχόμενα

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο, χώροι Hilbert

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \lambda \langle x, y_2 \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, y, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Χώρος Hilbert λέγεται ο E όταν είναι πλήρης (πχ. $\dim E < \infty$).

άρα $\quad (i)' \; \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x_2, y \rangle$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x_f \in H$ ώστε

$$f(y) = \langle x_f, y \rangle \quad \text{για κάθε } \; y \in H$$

(και αντίστροφα).

Γράφουμε $|y\rangle$ για το $y \in H$ και $\langle x_f|$ για την f, οπότε $f(y) = \langle x_f|y\rangle$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Γράφουμε $\{|i\rangle : i \in I\}$ αντί για $\{e_i : i \in I\}$.

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,
(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$ ή $\quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle n|x\rangle \, |n\rangle$
(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).
(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη κάθετου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινομενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Ορισμός

Μία γραμμική ***απεικόνιση*** $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ ***λέγεται*** *φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator)* ***αν***

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathscr{B}(E,F), \|\cdot\|)$*: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.*
Είναι χώρος Banach (δηλ. πλήρης) ανν $(F, \|\cdot\|_F)$ *Banach.*

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^\dagger : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle x_2, Tx_1 \rangle_{H_2} = \left\langle T^\dagger x_2, x_1 \right\rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^\dagger : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\left\| T^\dagger \right\| = \| T \|$.

Παραδείγματα (α) Αν $H_1 = H_2 = \ell^2(n)$ και ο A έχει πίνακα $[a_{ij}]$, δηλ. $a_{ij} = \langle i|A|j \rangle$, ο $A^\dagger$ είναι ο τελετής που έχει πίνακα $[b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
(β) Αν ταυτίσω το $|x\rangle \in H$ με τον τελεστή $\mathbb{C} \to H : \lambda \to \lambda\, |x\rangle$ τότε $x^\dagger : H \to \mathbb{C} : y \to \langle x, y \rangle$ δηλ. $|x\rangle^\dagger = \langle x|$.

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων [7, Appendix T]

Αν E_1, E_2 είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, μπορώ να θεωρώ $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$ όπου X_i κάποιο σύνολο (πχ αλγεβρ. ή ο.κ. βάση του E_i). Ορίζω

$$\xi \otimes \eta : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K} : (s,t) \to \xi(s)\eta(t).$$

Ορισμός (Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο)

$$E_1 \odot E_2 := \mathrm{span}\{\xi \otimes \eta : \xi \in E_1, \eta \in E_2\} \subseteq \mathbb{K}^{X_1 \times X_2}.$$

Παρατήρηση $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,
$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, $(\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$.

Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x,y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Έπεται ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την εμφύτευση $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$: Αν G γραμμ. χώρος και $\otimes' : E_1 \times E_2 \to G$ διγρ. απεικ. ώστε το $(G, \otimes')$ να έχει την καθολική ιδιότητα, τότε υπάρχει γραμμ. ισομορφισμός $T : E_1 \odot E_2 \to G$ ώστε $T(x \otimes y) = x \otimes' y$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Τανυστικά γινόμενα γραμμ. χώρων και Hilbert

Παρατήρηση $E \odot \mathbb{K} \simeq E$, $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n$.

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Στον $H_1 \odot H_2$ θέτω

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \cdot \langle x_2, y_2 \rangle_2 .$$

Ορίζει εσωτ. γινόμενο. (Άσκηση!) Ορίζουμε

$$H_1 \otimes H_2 := \overline{(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})}.$$

Αν $\{e_i\}_I$ ο.κ. βάση του H_1 και $\{f_j\}_J$ ο.κ. βάση του H_2, ο $H_1 \otimes H_2$ έχει ο.κ. βάση $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$. Την γράφουμε $\{|i\,j\rangle : (i,j) \in I \times J\}$.

Παρατήρηση Όταν $\dim H_1 < \infty$ και $\dim H_2 < \infty$, τότε $H_1 \odot H_2 = H_1 \otimes H_2$.

Παράδειγμα $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\pi)$ όπου π μέτρο γινόμενο.

Παράδειγμα $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.

Τελεστές σε τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert

Αν $A \in \mathscr{B}(H_1)$ και $B \in \mathscr{B}(H_2)$ να ορίσουμε
$A \otimes B : H_1 \otimes H_2 \to H_1 \otimes H_2$:
Πρώτα θέτω

$$A \otimes B : H_1 \odot H_2 \to H_1 \odot H_2 : \sum_i x_i \otimes y_i \to \sum_i Ax_i \otimes By_i$$

Ελέγχω καλά ορισμένο.
Μετά ελέγχω ότι $\|\sum_i Ax_i \otimes By_i\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|\sum_i x_i \otimes y_i\|$.
Οπότε επεκτείνεται σε φραγμένο $A \otimes B : H_1 \otimes H_2 \to H_1 \otimes H_2$ με
$\|A \otimes B\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Άσκηση: Προβολές σε τανυστικά γινόμενα

Υπενθύμιση: Αν $u, v \in H$, η απεικόνιση $\theta_{u,v} : w \to \langle v, w \rangle u$ γράφεται $|u\rangle \langle v|$, δηλ. $(|u\rangle \langle v|)(|w\rangle) = |u\rangle \langle v|w\rangle$.

Αν $\|u\| = 1$, τότε $|u\rangle \langle u| = P_{|u\rangle}$, η προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\,|u\rangle$.

Άσκηση

Έστω H_1, H_2 μιγαδικοί και $x_1, y_1 \in H_1, x_2, y_2 \in H_2$. Να βρεθούν $z \in H_1, z' \in H_2$ ώστε

$$|u\rangle \langle u| = |z\rangle \langle z| + \left|z'\right\rangle \left\langle z'\right| \quad \text{όπου} \quad u = x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2 \,.$$

Πίνακες και Τελεστές

Γράφουμε $M_{k,n} = M_{k,n}(\mathbb{C})$ για τους πίνακες με k γραμμές και n στήλες. Ο ανάστροφος συζυγής: $[a_{ij}]^\dagger := [\bar{a}_{ji}]$.

Κάθε $[a_{ij}]$ ορίζει τελεστή $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k : [x_1, \ldots, x_n]^T \to [a_{ij}][x_j]^T$ και $a_{ij} = \langle i|A|j\rangle$.

Η απεικόνιση αυτή $M_{k,n} \to \mathscr{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k) : [a_{ij}] \to A$ είναι 1-1 και επί και διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και $\dagger$.

Δυισμός Ο γραμμ. χώρος $M_{k,n}$ εφοδιάζεται με ένα εσωτ. γινόμενο

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$$

(εδώ αν $C : \mathbb{C}^n \xrightarrow{B} \mathbb{C}^k \xrightarrow{A^\dagger} \mathbb{C}^n$, ορίζω $\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{k} c_{ii}$ όπου

$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ji} b_{ij}$.

Παρατήρηση Η νόρμα $\|A\|_{hs} := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ δεν είναι η νόρμα $\|\cdot\|_{op}$ του $\mathscr{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^k)$.

Πίνακες και Δυισμός

Κάθε $A \in M_{k,n}$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : M_{k,n} \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(A^\dagger B)\,.$$

Η απεικόνιση $M_{k,n} \to (M_{k,n})^* : A \to f_A$ είναι 1-1 και επί (επειδή $\dim M_{k,n} < \infty$, άρα κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής) και είναι αντιγραμμική. Έχουμε

$$\|f_A\| = \sup\{|\mathrm{Tr}(A^\dagger B)| : B \in M_{k,n}, \|B\|_{op} \le 1\} := \|A\|_1 \text{ (δες } ^1\text{)}.$$

Ο χώρος $M_n^{sa} = \{A \in M_n : A^\dagger = A\}$ των αυτοσυζυγών ή ερμιτιανών πινάκων είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος (όχι άλγεβρα).

Ένας $A \in M_n$ λέγεται θετικός αν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle x, Ax\rangle \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Το σύνολο $M_n^+ = \mathscr{PSD}(\mathbb{C}^n)$ των θετικών πινάκων είναι κώνος στον M_n^{sa}.

Μια γραμμική μορφή $\rho \in (M_n)^*$ λέγεται θετική όταν $Tr(\rho A) \ge 0$ για κάθε $A \in M_n^+$ (τότε $Tr(\rho A) \in \mathbb{R}$ για κάθε $A \in M_n^{sa}$).

---

[1] $\|\cdot\|_1$ =trace norm: περισσότερα σε επόμενο επεισόδιο.

Κλάσεις Schatten

$$\mathscr{B}(E,F) \simeq M_{k,n} : A \to [a_{ij}], \qquad a_{ij} = \langle f_i, Ae_j \rangle .$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, tail, two heads, "\simeq"] & F \arrow[d, tail, two heads, "\simeq"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "{[a_{ij}]}"] & \mathbb{C}^k \end{tikzcd}$$

$A^{\dagger}A \in \mathscr{B}(E) \simeq M_n$ θετικός, άρα $\exists$ ο.κ. βάση $\{v_j\}$ του E και $s_j := s_j(A) \geq 0$ ώστε $A^{\dagger}Av_j = s_j^2 v_j$.
Ορίζω $|A| = (A^{\dagger}A)^{1/2}$ από $|A|v_j := s_j(A)v_j, j = 1, \ldots n$.
Θέτω $w_j = \frac{1}{s_j}Av_j$ όταν $s_j \neq 0$. Παρατηρώ ότι $\{w_j\}$ ορθοκανονικά, διότι $\langle Av_j, Av_k \rangle = s_j^2 \langle v_j, v_k \rangle$ και ορίζω $Uv_j = w_j$ όταν $s_j \neq 0$ και $Uv_j = 0$ όταν $s_j = 0$. Έχουμε

$$A = U|A| \qquad \text{(πολική αναπαράσταση).}$$

Ορισμός Για $1 \leq p < \infty$, η *p-νόρμα του Schatten* ορίζεται από

$$\|A\|_p^p := Tr(|A|^p) = \sum |s_j(A)|^p = \|(s_j(A))\|_{\ell^p}$$
$$\|A\|_\infty := \sup\{\|Ax\|, x \in B_E\}.$$

Άσκηση. $\|A\|_\infty = \sup_p \|A\|_p$.

Κάθε $A \in \mathscr{B}(E,F)$ ορίζει γραμμική μορφή [2]

$$f_A : \mathscr{B}(E,F) \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(A^\dagger B)\,.$$

Η απεικόνιση $\mathscr{B}(E,F) \to (\mathscr{B}(E,F))^* : A \to f_A$ είναι 1-1 (διότι $f_A(A) = \mathrm{Tr}(A^\dagger A) \neq 0$ όταν $A \neq 0$) και επί (επειδή $\dim \mathscr{B}(E,F) = kn < \infty$, άρα κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής) και είναι αντιγραμμική. Έχουμε

$$\|f_A\| = \sup\{|\,\mathrm{Tr}(A^\dagger B)| : B \in \mathscr{B}(E,F), \|B\|_\infty \leq 1\}\,.$$

Ισχυρισμός: $\quad \|f_A\| = \|A\|_1 = Tr(|A|).$

[2] Αν $A, B \in \mathscr{B}(E,F)$ έχουμε $A^\dagger B \in \mathscr{B}(E) \simeq M_n$, και το Tr ορίζεται.

Απόδειξη της $\|f_A\| = \|A\|_1 = Tr(|A|)$

Από τον ορισμό του ίχνους $\mathrm{Tr_m}$ στον M_m έχουμε εύκολα:

$$\mathrm{Tr_n}(A^\dagger B) = \mathrm{Tr_k}(BA^\dagger) \quad \text{για κάθε } A,B \in \mathscr{B}(E,F)$$
$$\text{και} \quad A \in M_m,\ A \geq 0 \ \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) \geq 0\,.$$

Αν $A,B \in M_m,\ A,B \geq 0$ επειδή $A^{1/2}\|B\|A^{1/2} - A^{1/2}BA^{1/2} \geq 0$, έχουμε

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A^{1/2}BA^{1/2}) \leq \mathrm{Tr}(A^{1/2}\|B\|A^{1/2}) = \|B\|\,\mathrm{Tr}(A)\,.$$

Έπεται ότι αν $A,B \in M_m$ και $A \geq 0$,

$$A \geq 0 \ \Rightarrow |\mathrm{Tr}(AB)| \leq \|B\|\,\mathrm{Tr}(A)\,.$$

[Αποδ. Αν $f(B) = \mathrm{Tr}(AB)$ έχω $0 \leq f(B) \leq c\,\|B\|$ όταν $B \geq 0$. Έπεται για $B = B^\dagger$ ότι $|f(B)| = |f(B_+) - f(B_-)| \leq |f(B_+)| + |f(B_-)|$ $\leq c(\|B_+\| + \|B_-\|) = c\,\|B\|$. Για γενικό B γράφω $|f(B)| = \lambda f(B) = f(\lambda B)$ όπου $|\lambda| = 1$ οπότε θέτοντας $\lambda B = B_1 + iB_2$ με $B_j = B_j^\dagger$ έχω $|f(B)| = \lambda f(B) = f(\lambda B) = f(B_1) + if(B_2) = f(B_1)$ γιατί $|f(B)| \in \mathbb{R}$ και $f(B_1) \in \mathbb{R}$ άρα τελικά $|f(B)| = f(B_1) \leq c\,\|B_1\| \leq c\,\|\lambda B\| = c\,\|B\|$.]

Απόδειξη της $\|f_A\| = \|A\|_1 = Tr(|A|)$(συνέχεια)

Αν $A, B \in \mathscr{B}(E,F)$ γράφουμε $A = U|A|$ όπου $|A| : E \to E$ θετικός και $U : E \to F$ με $\|U\| \leq 1$ οπότε $A^\dagger B = |A| U^\dagger B : E \to E$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Tr}(A^\dagger B)| = |\operatorname{Tr}(|A|U^\dagger B)| &= \operatorname{Tr}(|A|(U^\dagger B))| \\
&\leq \left\| U^\dagger B \right\| \operatorname{Tr}(|A|) \leq \|B\| \operatorname{Tr}(|A|) = \|B\| \, \|A\|_1 \,.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|f_A\| = \sup\{|\operatorname{Tr}(A^\dagger B)| : B \in \mathscr{B}(E,F), \|B\|_\infty \leq 1\} \leq \|A\|_1 \,.$$

Για την ισότητα: αν $Av_j = s_j w_j$ (από την πολική αναπαράσταση), βάλε $Bv_j = w_j$ όταν $s_j \neq 0$ και $Bv_j = 0$ αλλιώς, οπότε $\|B\|_\infty = 1$ και
$\operatorname{Tr}(B^\dagger A) = \sum_j \left\langle v_j, B^\dagger A v_j \right\rangle = \sum_j \left\langle v_j, B^\dagger s_j w_j \right\rangle = \sum_j s_j = \operatorname{Tr}(|A|)$.

Ανισότητα Hölder

Αν f, g *απλές ολοκληρώσιμες και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\left| \int \bar{f} g d\mu \right| := |\tau(\bar{f}g)| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Αποδ. Πες $f \geq 0, g \geq 0$. Για $x \in [0,1]$,

$$\tau(f^{px} g^{q(1-x)}) = \begin{cases} \|f\|_p^p, & x = 1 \\ \tau(fg), & x = \frac{1}{p} \\ \|g\|_q^q, & x = 0 \end{cases}$$

Αρκεί ν.δ. ότι αν $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, τότε $|\tau(f^{px} g^{q(1-x)})| \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Αν $z = x + iy$ με $x \in [0,1]$, γράφω $f^{p(x+iy)} = f^{px} e^{ihy}$ όπου $h(t) = \log f(t)$ αν $f(t) \neq 0$ και $h(t) = 0$ αλλιώς, οπότε $|e^{ihy}| = 1$.
Η $\phi(z) := \tau(f^{pz} g^{q(1-z)})$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\Omega := [0,1] \times \mathbb{R}$ και ολόμορφη στο εσωτερικό.
Από Hadamard three lines theorem (συνέπεια αρχής μεγίστου) έπεται ότι $|\phi(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \Omega$, άρα $|\phi(\frac{1}{p})| \leq 1$. $\square$.

Non-Commutative Hölder: $|\mathrm{Tr}(A^\dagger B)| \leq \|A\|_p \|B\|_q$

Αποδ. [5] Έστω $D, C \geq 0$, $\|U\| \leq 1$, $\|V\| \leq 1$. Θέτω

$$\phi(z) := \mathrm{Tr}(UD^z VC^{(1-z)})$$

($D^{x+iy} = \mathrm{diag}(d_n^{x+iy}) = \mathrm{diag}(d_n^x e^{h_n iy})$ όπου $h_n = \log d_n$ αν $d_n \neq 0$ και $h_n = 0$ αλλιώς, οπότε $|e^{ih_n y}| = 1$, άρα $\left\|D^{iy}\right\| = 1$.)
Υποθέτω $\|C\|_1 \leq 1$, $\|D\|_1 \leq 1$. Τότε

$$|\phi(0+iy)| = |\mathrm{Tr}(UD^{iy}VCC^{-iy})| \leq \left\|C^{-iy}UD^{iy}V\right\|_\infty \mathrm{Tr}(C) \leq 1$$

$$|\phi(1+iy)| = |\mathrm{Tr}\left(UDD^{iy}VC^{-iy}\right)| \leq \mathrm{Tr}(D)\left\|D^{iy}VC^{-iy)}U\right\|_\infty \leq 1$$

Από Hadamard $|\phi(\frac{1}{p}+i0)| \leq 1$, δηλ.

$$|\mathrm{Tr}\left(UD^{1/p}VC^{1/q}\right)| \leq 1\,.$$

Αν $A^\dagger = U|A^\dagger|$, $B = V|B|$ με $\|A\|_p = 1$, $\|B\|_q = 1$ (άρα $\left\|A^\dagger\right\|_p = 1$), βάλε $D = |A^\dagger|^p$, $C = |B|^q$ οπότε $\| Tr(A^\dagger B)| \leq 1$. $\square$

Δεύτερη Απόδειξη (Ακολουθεί εν μέρει το [6, Παρ. 2.3])

$$B^\dagger B = |B|^2 = \sum_k s_k(B)^2 \, |f_k\rangle \langle f_k| \quad (\{f_k\} \text{ o.κ. βάση})$$

$$B = V|B| = \sum_k s_k(B) V \, |f_k\rangle \langle f_k| = \sum_k s_k(B) \, |e_k\rangle \langle f_k|$$

$(V\,|f_k\rangle = |e_k\rangle$ αν $s_k(B) \neq 0$, $V\,|f_k\rangle = 0$ αλλιώς.)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(A^\dagger B\big) &= \sum_k s_k(B)\, \mathrm{Tr}\big(A^\dagger \, |e_k\rangle \langle f_k|\big) = \sum_k s_k(B) \, \langle f_k| A^\dagger \, |e_k\rangle \\ &= \sum_k s_k(B) \, \langle Af_k | e_k\rangle \, . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{Tr}\big(A^\dagger B\big) &\overset{(h)}{\leq} \left(\sum_k |s_k(B)|^q \right)^{1/q} \left(\sum_k |\langle Af_k | e_k\rangle|^p \right)^{1/p} \\ &= \|B\|_q \left(\sum_k |\langle Af_k | e_k\rangle|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

(Από κλασσική Hölder (h) στον ℓ^p.)

Non-Commutative Hölder (Δεύτερη Απόδειξη) II

$$\sum_k |\langle Af_k|e_k\rangle|^p \overset{?}{\leq} \|A\|_p^p$$

Αποδ. Γράψε $A = WC^2$, όπου $C = |A|^{1/2} \geq 0$ (πολ. αναπ.).

$$\sum_k |\langle Af_k|e_k\rangle|^p = \sum_k \left|\left\langle Cf_k \middle| CW^\dagger e_k\right\rangle\right|^p \leq \sum_k \|Cf_k\|^p \left\|CW^\dagger e_k\right\|^p$$

$$\overset{(cs)}{\leq} \left(\sum_k \|Cf_k\|^{2p}\right)^{1/2} \left(\sum_k \left\|CW^\dagger e_k\right\|^{2p}\right)^{1/2}.$$

Αν $C^2 = \sum_j s_j |u_j\rangle\langle u_j|$ έχω $C^2|f_k\rangle = \sum_j s_j |u_j\rangle\langle u_j|f_k\rangle$, άρα

$$\|Cf_k\|^2 = \left\langle f_k, C^2 f_k\right\rangle = \sum_j s_j \langle f_k|u_j\rangle\langle u_j|f_k\rangle = \sum_j s_j |\langle f_k|u_j\rangle|^{2(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$$

$$\overset{(h)}{\leq} \left(\sum_j s_j^p |\langle f_k|u_j\rangle|^{\frac{2}{p}p}\right)^{1/p} \left(\sum_j |\langle f_k|u_j\rangle|^{\frac{2}{q}q}\right)^{1/q}$$

Non-Commutative Hölder (Δεύτερη Απόδειξη) III

$$\|Cf_k\|^2 \le \left(\sum_j s_j^p |\langle f_k|u_j\rangle|^2\right)^{1/p} \left(\sum_j |\langle f_k|u_j\rangle|^2\right)^{1/q} \quad (\{u_j\} \text{ ορθοκ.})$$

$$\le \left(\sum_j s_j^p |\langle f_k|u_j\rangle|^2\right)^{1/p} \|f_k\|^{2/q} \quad (\|f_k\| = 1)$$

$$\Rightarrow \sum_k \|Cf_k\|^{2p} \le \sum_k \sum_j s_j^p |\langle f_k|u_j\rangle|^2 = \sum_j s_j^p \sum_k |\langle f_k|u_j\rangle|^2 \;\; (\{f_k\} \text{ ορθοκ.})$$

$$\le \sum_j s_j^p \|u_j\|^2 = \left\|C^2\right\|_p^p = \|A\|_p^p$$

Ομοίως, αφού $\left\|W^\dagger e_k\right\| \le 1$ και $\{e_k\}$ ορθοκανονικά,

$$\sum_k \left\|CW^\dagger e_k\right\|^{2p} \le \sum_j s_j^p \sum_k |\langle W^\dagger e_k|u_j\rangle|^2 = \sum_j s_j^p \sum_k |\langle e_k|Wu_j\rangle|^2$$

$$\le \sum_j s_j^p \|Wu_j\|^2 \le \sum_j s_j^p = \|A\|_p^p . \qquad \square$$

Ο Δυικός του χώρου Schatten

Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος Schatten είναι ο χώρος Banach

$$\mathscr{C}_p(E,F) = (\mathscr{B}(E,F), \|\cdot\|_p) \simeq (M_{k,n}, \|\cdot\|_p).$$

Κάθε $A \in \mathscr{B}(E,F)$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathscr{C}_p(E,F) \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(A^\dagger B)\,.$$

Πρόταση

Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, η απεικόνιση

$$\mathscr{C}_q(E,F) \to (\mathscr{C}_p(E,F))^* : A \to f_A$$

είναι ισομετρία: $\quad \|f_A\| = \|A\|_q$ *(και επί).*

Αποδ. Από μη-μεταθετική ανισότητα Hölder έχουμε $\|f_A\| \leq \|A\|_q$. Αλλά, αν $A^\dagger = V|A^\dagger|$ (πολ. αναπ.) και θέσω $B = \left\|A^\dagger\right\|_q^{-q/p} |A^\dagger|^{q-1} U^\dagger$, τότε $\|B\|_p = 1$ και $f_A(B) = \mathrm{Tr}(BA^\dagger) = \left\|A^\dagger\right\|_q = \|A\|_q$.

Κλασικές και Κβαντικές καταστάσεις

Αν S είναι (πεπερασμένο) σύνολο, μια κλασική κατάσταση στο S είναι ένα μέτρο πιθανότητας μ στο S.
Δ_n: το σύνολο των κλασικών καταστάσεων στο $S = \{0, 1 \dots, n\}$.
Γεωμετρικά το Δ_n είναι n-διάστατο simplex:
$\Delta_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum p_k = 1\}$.
Αν H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert (πεπερασμένης διάστασης), μια κβαντική κατάσταση στον H είναι ένας θετικός $\rho \in \mathscr{C}_1(H)$ με $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.
$D(H)$: το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων στον H.

Παρατήρηση $\Delta_n \hookrightarrow D(\mathbb{C}^n)$:
Αν σταθεροποιήσω μια ΟΚ βάση $\{\psi_0, \dots, \psi_n\}$ για τον H, το Δ_n είναι ισόμορφο με το σύνολο των διαγώνιων $\rho \in B(H)$.

Γενικότερα:

Αν $\mathscr{A}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα, state είναι μια θετική γραμμική μορφή ω νόρμας 1.

Για $\mathscr{A} = \mathscr{B}(H)$ με $\dim H < \infty$, states είναι ακριβώς οι κβαντικές καταστάσεις: $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

Για $\mathscr{A} = \mathbb{C}^S$ ή γενικότερα $\mathscr{A} = C(K)$, states είναι ακριβώς τα μέτρα πιθανότητας.

Κβαντικές καταστάσεις

$$D(H) = \{\rho \in \mathscr{B}_{sa}(H) : \rho \geq 0, \operatorname{Tr}\rho = 1\}$$

Καθαρή κατάσταση (pure state) $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $(\|\psi\|_H = 1)$.
Αλλιώς, μείγμα (mixed state).
Παρατήρηση. $|\psi\rangle\langle\psi| = |\chi\rangle\langle\chi| \iff \chi = e^{i\theta}\psi$, δηλ. μια καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle\langle\psi|$ αντιστοιχεί σε ένα $[\psi] \in P(H)$ (: προβολικός χώρος).
Οι καθαρές καταστάσεις είναι τα ακραία σημεία του $D(H)$ (αντ. : τα μέτρα Dirac είναι οι ακραίες κλασικές καταστάσεις).
Από το Φασματικό Θεώρημα, κάθε $\rho \in D(H)$ διαγωνοποιείται: $\exists$ ορθοκανονικά ψ_k με

$$\rho = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad \lambda_k \geq 0, \ \sum_k \lambda_k = 1 \ (d = \dim H)$$

: κυρτός συνδυασμός ακραίων. Άρα κυρτές συναρτήσεις στο $D(H)$ λαμβάνουν μέγιστο σε καθαρές καταστάσεις. Το ‘λιγότερο ακραίο’ ή ‘πιό κεντρικό’ $\rho \in D(H)$ είναι το $\rho_* = \mathrm{diag}(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots \frac{1}{d})$.

Κβαντικές καταστάσεις

$$D(\mathbb{C}^d) = \{\rho \in M_d^{sa} : \rho \geq 0, \operatorname{Tr}\rho = 1\}$$

Είναι μια βάση του κώνου $M_d^+ = \mathscr{PSD}(\mathbb{C}^d)$ που ορίζεται από το υπερεπίπεδο $H_1 = \{\rho \in M_d^{sa} : \operatorname{Tr}\rho = 1\}$.
Έχει (πραγμ.) διάσταση $= \dim H_1 = d^2 - 1$.

Πρόταση

*Για κάθε υπόχωρο $\{0\} \neq E \subsetneq \mathbb{C}^d$ θέτω $D(E) = \{\rho \in D(\mathbb{C}^d) : \rho(\mathbb{C}^d) \subseteq E\}$.
Η απεικόνιση $E \to D(E)$ είναι 1-1 και επί από τους μη τετριμ. υπόχωρους του $\mathbb{C}^d$ στα γνήσια faces του $D(\mathbb{C}^d)$.*

$\dim E = 1 \rightsquigarrow D(E)$ minimal face=ακραίο σημείο.
$\dim E = d - 1 \rightsquigarrow D(E) = \{\rho : \rho(\mathbb{C}^d) \perp |x\rangle\}$ (όπου $E = |x\rangle^\perp$): maximal proper face.

Συμμετρίες του $D(\mathbb{C}^d)$

$P(\mathbb{C}^d) = \mathbb{CP}^{d-1}$ ο προβολικός χώρος $= S_{\mathbb{C}^d}/\sim$ όπου $\phi \sim \psi$ ανν $\phi = e^{i\theta}\psi$, με την μετρική $d([\phi],[\psi]) = \arccos|\langle\phi,\psi\rangle|$.

Θεώρημα (Wigner - δες π.χ. [3])

Μια $f : P(\mathbb{C}^d) \to P(\mathbb{C}^d)$ είναι d-ισομετρία ανν (επάγεται από μια γραμμική ή αντιγραμμική ισομετρία, δηλ.) υπάρχει $U \in M_d$ unitary ή antiunitary ώστε $f([\psi]) = [U\psi]$ για κάθε $\psi \in \mathbb{C}^d$.

Ισοδύναμα, αν $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (οπότε $[\rho] = [\psi] \in P(\mathbb{C}^d)$),

$$f([\rho]) = [U\rho U^\dagger] \;\text{ ή }\; f([\rho]) = [U\rho^t U^\dagger].$$

Θεώρημα (Kadison - δες [4])

Κάθε αφινική απεικόνιση $\Phi : D(\mathbb{C}^d) \to D(\mathbb{C}^d)$ που είναι επί, είναι της μορφής

$$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger \;\text{ ή }\; \Phi(\rho) = U\rho^t U^\dagger. \quad (\rho^t = \text{ανάστροφος})$$

Ειδικότερα, είναι ισομετρία ως προς την $\|\cdot\|_{hs}$.

Μερικό ίχνος (partial trace) σε bipartite systems

Multipartite systems (πολυμερή συστήματα):
$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_k$.

Bipartite systems (διμερή συστήματα): $H = H_1 \otimes H_2$.

Αν $H = H_1 \otimes H_2$ με $\dim H < \infty$, ορίζω

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{H_2} = \mathrm{Tr}_2 : &\mathscr{B}(H_1) \otimes \mathscr{B}(H_2) \to \mathscr{B}(H_1)\\ &\sum_k A_k \otimes B_k \to \sum_k Tr(B_k) A_k\end{aligned}$$

δηλαδή $\mathrm{Tr}_{H_2} = Id_{\mathscr{B}(H_1)} \otimes \mathrm{Tr}$ και αντίστοιχα $\mathrm{Tr}_{H_1} = \mathrm{Tr} \otimes Id_{\mathscr{B}(H_2)}$.

Αν $\rho \in D(H)$ τότε $\mathrm{Tr}_1(\rho) \in D(H_2)$ και $\mathrm{Tr}_2(\rho) \in D(H_1)$.

Ειδικότερα, αν $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ τότε $\mathrm{Tr}_1(\rho) = \rho_2$ και $\mathrm{Tr}_2(\rho) = \rho_1$.

Schmidt decomposition of $\psi \in H = H_1 \otimes H_2$, $\dim H < \infty$

Πρόταση

Για κάθε $\psi \in H_1 \otimes H_2$ υπάρχουν ορθοκανονικά $\{u_i : i = 1, \dots, d\} \subseteq H_1$, $\{v_i : i = 1, \dots, d\} \subseteq H_2$ και $\{\lambda_i : i = 1 \dots d\} \subseteq \mathbb{R}_+$ (όπου $d = \min\{d_1, d_2\}$) ώστε

$$\psi = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i u_i \otimes v_i \,.$$

Αποδ. Η απεικόνιση $u \otimes v \rightarrowtail |u\rangle \langle \bar{v}|$ (όπου$|u\rangle \langle \bar{v}| : H_2 \to H_1$: $(|u\rangle \langle \bar{v}|) |y\rangle = \langle \bar{v}, y\rangle |u\rangle$) επεκτείνεται γραμμικά σε $H_1 \otimes H_2 \rightarrowtail \mathscr{B}(H_2, H_1) : \psi \to M_\psi$. Γράφω $M = M_\psi = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |u_i\rangle \langle \bar{v}_i|$ (πολ. αναπαράσταση). Άρα $\psi = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i u_i \otimes v_i$.

Διατάσσοντας $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ έχω $M^\dagger M = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2 |\bar{v}_i\rangle \langle \bar{v}_i|$ άρα $\|M\|_{hs}^2 = \sum_i \lambda_i^2 = \|\psi\|^2$ ενώ $\|M\|_{op} = \lambda_1$.
Ορίζουμε $\max\{n : \lambda_n > 0\}$ = Schmidt rank of ψ (:η τάξη του M_ψ).

Separability vs Entanglement in multipartite systems

Έστω $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_k$ μιγαδικοί χώροι Hilbert.

Ορισμός

(α) Αν $\rho = |x\rangle\langle x| \in D(H)$ είναι καθαρή κατάσταση, λέγεται καθαρή διαχωριζόμενη (pure separable)[3] *αν υπάρχουν $x_i \in H_i$ ώστε $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_k$. Γράφουμε $\rho \in Sep_p(H)$.*
(β) Ένα $\rho \in D(H)$ (μείγμα) λέγεται διαχωριζόμενο (separable)[3] *αν είναι κυρτός συνδυασμός καθαρών διαχωριζόμενων καταστάσεων. Γράφουμε $\rho \in Sep(H)$.*
(Δηλαδή $Sep(H) = \mathrm{conv}\, Sep_p(H)$.)
Αλλιώς, λέγεται διαπλεκόμενο (entangled).

Πρτρ (α) Αν $\rho = |x\rangle\langle x|$ όπου $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_k$ τότε $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_k$ όπου $\rho_i = |x_i\rangle\langle x_i|$.
(β) $Sep_p(H) = \mathrm{ext}\, Sep(H)$
(γ) $Sep(H) = \mathrm{conv}\{\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_k : \rho_i \in D(H_i)\}$
(δ) $\dim Sep(H) = \dim D(H)$

[3] Ως προς τη συγκεκριμένη διάσπαση του H σε $H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_k$

Μερικός ανάστροφος (partial transpose) και PPT states

Έστω $\psi \in H = H_1 \otimes H_2$.
Αν $A \sim [a_{ij}] \in \mathscr{B}(H_1)$, δηλ. $A = \sum_{i,j} a_{ij} |e_i\rangle \langle e_j|$ γράφω
$T(A) = A^t = \sum_{i,j} a_{ij} |e_j\rangle \langle e_i|$. Ορίζουμε

$$\Gamma = T \otimes Id : \mathscr{B}(H_1 \otimes H_2) \to \mathscr{B}(H_1 \otimes H_2) : A \otimes B \to A^t \otimes B.$$

Αν $\rho \in D(H)$ γράφουμε $\rho^\Gamma := \Gamma(\rho)$.

Ορισμός

Ένα $\rho \in D(H)$ έχει θετικό μερικό ίχνος (είναι PPT state) αν $\rho^\Gamma \geq 0$. $PPT(H) = \{\rho \in D(H) : \rho^\Gamma \geq 0\}$ (: κυρτό σύνολο).

Πρόταση

$Sep(H_1 \otimes H_2) \subseteq PPT(H_1 \otimes H_2)$.

- Guillaume Aubrun and Stanisław Szarek.
  Alice and Bob Meet Banach. The Interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory.
  To appear in *Mathematical Surveys and Monographs*, Amer. Math. Soc., Providence.
  https://aliceandbobmeetbanach.wordpress.com/

- Guillaume Aubrun and Stanisław Szarek.
  Dvoretzky's theorem and the complexity of entanglement detection.
  Discrete Anal., pages Paper No. 1, 20, 2017.

- V. Bargmann.
  Note on Wigner s theorem in quantum mechanics.
  Journal of Mathematical Physics 5, 862 (1964),
  https://doi.org/10.1063/1.1704188

Βιβλιογραφία II

R. V. Kadison.
Transformations of states in operator theory and dynamics.
Topology 3 no. suppl. 2, 177–198, 1965.

Edward Nelson.
Notes on non-commutative integration.
J. Funct. Anal., 15:103–116, 1974.

John R. Ringrose.
Compact non-self-adjoint operators.
Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies. 35. London etc.: Van Nostrand Reinhold Company. VI, 238 p., 1971.

N. E. Wegge-Olsen.
K-theory and C^*-algebras.
Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993.
A friendly approach.