Ανάλυση και Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας

Θετικές και πλήρως θετικές απεικονίσεις

8 Δεκεμβρίου 2017

Περιεχόμενα

Υπενθύμιση: Κλασικές και Κβαντικές καταστάσεις

Αν S είναι (πεπερασμένο) σύνολο, μια κλασική κατάσταση στο S είναι ένα μέτρο πιθανότητας μ στο S.

Δ_n: το σύνολο των κλασικών καταστάσεων στο $S = \{0, 1 \ldots, n\}$. Γεωμετρικά το Δ_n είναι n-διάστατο simplex: $\Delta_n = \{(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum p_k = 1\}$.

Αν H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert (πεπερασμένης διάστασης), μια κβαντική κατάσταση στον H είναι ένας θετικός $\rho \in \mathscr{C}_1(H)$ με $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

$D(H)$: το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων στον H.

Κλασικές και Κβαντικές καταστάσεις

$$D(H) = \{\rho \in \mathscr{C}_1(H) : \rho \geq 0, \mathrm{Tr}(\rho) = 1\}$$

το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων στον H.

Γενικότερα:

Αν $\mathscr{A}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα, state είναι μια θετική γραμμική μορφή $\omega \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ νόρμας 1.

Για $\mathscr{A} = \mathscr{B}(H)$ με $\dim H < \infty$, states είναι ακριβώς οι κβαντικές καταστάσεις: $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

Για $\mathscr{A} = \mathbb{C}^S$ ή γενικότερα $\mathscr{A} = C(K)$, states είναι ακριβώς τα μέτρα πιθανότητας.

Quantum Channels

Αν $\Phi : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(K)$ $(\dim H . \dim K < \infty)$ θέλω η δυική
$\Phi^* : \mathscr{C}_1(K) \to \mathscr{C}_1(H)$ να στέλνει καταστάσεις σε καταστάσεις,
δηλ. $\Phi^*(D(K)) \subseteq D(H)$.

Εδώ

$$\langle \Phi^*(\rho), T \rangle = \langle \rho, \Phi(T) \rangle \quad \forall \rho \in \mathscr{C}_1(K), T \in \mathscr{B}(H)$$

όπου $\langle \rho, A \rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho^\dagger A\right)$.

Ειδικότερα θέλω $\Phi^* \geq 0$ (positivity preserving $\equiv$ positive)
(ισοδύναμα $\Phi \geq 0$)
και $\mathrm{Tr}(\Phi^*(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho)\, \forall \rho$ (ισοδύναμα $\Phi(I) = I$.)

Παρατήρηση Αν $\Phi_1^*(D(K_1)) \subseteq D(H_1)$ και $\Phi_2^*(D(K_2)) \subseteq D(H_2)$,
θα ήθελα

$$(\Phi_1^* \otimes \Phi_2^*)(D(K_1 \otimes K_2)) \subseteq D(H_1 \otimes H_2).$$

Παράδειγμα

$\Phi_1 : M_2 \to M_2 : A \to A^t$ (ανάστροφος) και $\Phi_2 : M_2 \to M_2 : B \to B$ θετικές, αλλά η $\Phi_1 \otimes \Phi_2 : M_2 \otimes M_2 \to M_2 \otimes M_2$ όχι:

$$A = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ θετικός, αλλά}$$

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2)(A) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ όχι θετικός.}$$

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ μεταξύ C^* αλγεβρών είναι πλήρως θετική (completely positive) αν η $\Phi_n := \Phi \otimes \iota : \mathscr{A} \otimes M_n \to \mathscr{B} \otimes M_n$ είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $\Phi \geq_{cp} 0$.

Παρατήρηση $\mathscr{A} \otimes M_n \simeq M_n(\mathscr{A})$.

Quantum Channels

Αν Φ_1^*, Φ_2^* είναι CP τότε $\Phi_1^* \otimes \Phi_2^*$ είναι CP.
Γι αυτό ορίζουμε

Ορισμός

Quantum channel λέγεται μια απεικόνιση $\Phi^* : \mathscr{C}_1(K) \to \mathscr{C}_1(H)$ (H, K πεπερασμένης διάστασης) αν είναι πλήρως θετική και διατηρεί το ίχνος (completely positive trace preserving, CPTP) ισοδύναμα αν η $\Phi : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(K)$ είναι πλήρως θετική και διατηρεί τη μονάδα I (unital completely positive, UCP).

Θεώρημα (Choi)

Μια $\Phi : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(K)$ (H, K πεπερασμένης διάστασης) είναι πλήρως θετική ($\Phi \geq_{cp} 0$) αν και μόνον αν υπάρχουν $A_1, \ldots, A_N \in \mathscr{B}(H, K)$ ώστε

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i X A_i^\dagger \quad \text{για κάθε } X \in \mathscr{B}(H_1).$$

Quantum Channels

Θεώρημα (Choi)

Μια $\Phi : M_n \to M_m$ είναι πλήρως θετική αν και μόνον ο πίνακας $[\Phi(E_{ij})] \in M^{mn}$ είναι θετικός.

Από τη σχέση $\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i X A_i^{\dagger}$ εύκολα προκύπτει ότι $\Phi \geq_{cp} 0 \iff \Phi^* \geq_{cp} 0$.

Επίσης η Φ είναι UCP αν και μόνον αν $\sum_{i=1}^{N} A_i A_i^{\dagger} = I$ ενώ η Φ είναι CPTP (quantum channel) αν και μόνον αν $\sum_{i=1}^{N} A_i^{\dagger} A_i = I$.

Η συνθήκη $\sum_{i=1}^{N} A_i^{\dagger} A_i = I$ ισοδυναμεί με την $V^{\dagger} V = I$ δηλ. V ισομετρία, όπου $V = [A_1, A_2, \ldots, A_N] : H^N \to K$ (εδώ $H = \mathbb{C}^n, K = \mathbb{C}^m$).

CP maps and Stinespring's Theorem

Examples of compl. positive maps from a C* algebra $\mathscr{A}$ to $\mathscr{B}(H)$:
A *-morphism π is positive (because $\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \;\forall a$).
Hence a *-morphism is a cp map (because π_n is a *-morphism).
A map $a \to V^*aV$ is a cp map.
(here $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H_0)$ and $V \in \mathscr{B}(H, H_0)$).
Hence $a \to \pi(a) \to V^*\pi(a)V$ is a cp map.
There are no others: Every cp map factorises as above.

Theorem (Stinespring)

For every unital cp map ϕ from a C algebra $\mathscr{A}$ to $\mathscr{B}(H)$ there is a triple (π, K, V) where π is a *-representation of $\mathscr{A}$ on K and $V : H \to K$ is an isometry such that*

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

We say the *-rep. π is a dilation of the cp map ϕ via the embedding $V : H \to K$.
[There is also a uniqueness condition.]

Reminder: The GNS construction

Theorem (Gelfand, Naimark, Segal)

For every state ϕ on a C algebra $\mathscr{A}$ there is a triple $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ where π_ϕ is a *-representation of $\mathscr{A}$ on H_ϕ and $\xi_\phi \in H_\phi$ a* cyclic [1] *unit vector such that*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{for all } a \in \mathscr{A}.$$

The GNS triple $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ is uniquely determined by this relation up to unitary equivalence.

Stinespring's Theorem can be considered as an operator-valued version of the GNS construction.

[1] i.e. $\pi_\phi(\mathscr{A})\xi_\phi$ is dense in H_ϕ.

Stinespring: Operator-valued GNS

Theorem (Stinespring)

For every unital cp map ϕ from a C algebra $\mathscr{A}$ to $\mathscr{B}(H)$ there is a triple (π, K, V) where π is a *-representation of $\mathscr{A}$ on K and $V : H \to K$ is an isometry such that*

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \textit{for all } \ a \in \mathscr{A}.$$

When $\mathscr{A} = B(\mathscr{H}_1)$, one can write $\mathscr{K} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ and $\pi(a) = a \otimes I$.

Proof of Stinespring (Sketch)

1. Consider the linear space $\mathscr{A} \otimes H = \operatorname{span}\{a \otimes \xi : a \in \mathscr{A}, \xi \in H\}$
   When $H = \mathbb{C}$ then $\mathscr{A} \otimes H \simeq \mathscr{A}$.
2. Define semi-inner product $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_\phi := \langle \xi, \phi(a^* b)\eta \rangle_H$ (extend linearly).
   When $H = \mathbb{C}$ then $\langle a, b \rangle_\phi = \phi(a^* b)$.
3. Since ϕ is cp prove $\langle \sum_n a_n \otimes \xi_n, \sum_m a_m \otimes \xi_m \rangle_\phi \geq 0$.
   By Cauchy-Schwarz the set $\mathscr{N} := \{u \in \mathscr{A} \otimes H : \langle u, u \rangle_\phi = 0\}$ is a linear space.
4. Define $K_0 := (\mathscr{A} \otimes H)/\mathscr{N}$ and complete with respect to $\|[u]\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\phi}$ to get the Hilbert space K
   (here $[u] = u + N$).

Proof of Stinespring II

5. $\mathscr{A}$ acts on $\mathscr{A} \otimes H$ via $\pi_0(a)(b \otimes \xi) = ab \otimes \xi$
(When $H = \mathbb{C}$, $\pi_0(a)(b) = ab$).

6. Now $\pi_0(a)(N) \subseteq N$ so $\pi_0(a)$ induces a map $\pi_1(a)$ on K_0.

7. Prove that $\|\pi_1(a)([u])\|_\phi \leq \|a\| \, \|[u]\|_\phi$. Hence $\pi_1(a)$ extends to a bdd operator $\pi(a)$ on K.

   Easy: $\pi : a \to \pi(a) : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(K)$ is a *-representation.

8. Define $V : H \to K : \xi \to \mathbf{1}_{\mathscr{A}} \otimes \xi \to [\mathbf{1}_{\mathscr{A}} \otimes \xi]$. V satisfies

$$\|V\xi\|_\phi^2 = \langle [\mathbf{1} \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \xi] \rangle_\phi = \langle \xi, \phi(\mathbf{1}^* \mathbf{1})\xi \rangle_H = \|\xi\|_H^2$$

hence is an isometry $V : H \to \mathscr{K}$ and for all $\xi, \eta \in H$,

$$\begin{aligned} \langle \xi, V^*\pi(a)V\eta \rangle_H = \langle V\xi, \pi(a)V\eta \rangle_H &= \langle [\mathbf{1} \otimes \xi], \pi(a)[\mathbf{1} \otimes \eta] \rangle_K \\ &= \langle [\mathbf{1} \otimes \xi], [a \otimes \eta] \rangle_K = \langle \xi, \phi(\mathbf{1}^* a)\eta \rangle_H \end{aligned}$$

so $V^*\pi(a)V = \phi(a)$. □

- Guillaume Aubrun and Stanisław Szarek.
  Alice and Bob Meet Banach. The Interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory.
  Mathematical Surveys and Monographs
  Volume: 223 Amer. Math. Soc., Providence, 2017.
  https://aliceandbobmeetbanach.wordpress.com/
- Man Duen Choi.
  Completely positive linear maps on complex matrices.
  Linear Algebra and Appl., 10:285–290, 1975.
- W. Forrest Stinespring.
  Positive functions on C^*-algebras.
  Proc. Amer. Math. Soc., 6:211–216, 1955.