Ένας υπόχωρος πολλά διαπλεκόμενος...
A very entangled subspace...

Πρόταση 1. *Αν* $k < \min\{n, m\}$, *υπάρχει γραμμικός υπόχωρος* $\mathcal{L} \subseteq M_{mn}(\mathbb{C})$ *διάστασης* $\dim \mathcal{L} = (m-k)(n-k)$ *με την ιδιότητα, κάθε* $A \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ *να έχει τάξη* $\mathrm{rank}(A) \geqslant k+1$.

Απόδειξη Ο $\mathcal{L}$ είναι το ευθύ άθροισμα των διαγωνίων του:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m+n-1} \mathcal{D}_j \,.$$

Η κατασκευή του $\mathcal{L}$ είναι η ακόλουθη:

Κάθε διαγώνιος που έχει μήκος $\leqslant k$ τίθεται ίση με 0. Σε κάθε διαγώνιο μήκους $p > k$, τοποθετούμε μια ισομορφική εικόνα του γραμμικού χώρου

$$\mathcal{P}_{p,k} := \{(q(1), q(2), \ldots, q(p)) \in \mathbb{C}^p : \; q \text{ πολυώνυμο βαθμού } \deg q \leqslant p-k-1\}.$$

Η διάσταση του $\mathcal{P}_{p,k}$ είναι ακριβώς $p-k$, γιατί ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ $p-k-1$ παράγεται από τα $p-k$ πολυώνυμα $q_j(z) = z^j, 0 \leqslant j \leqslant p-k-1$, και η εικόνες των πολυωνύμων αυτών στον $\mathcal{P}_{p,k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού ένας γραμμικός συνδυασμός $\sum_{j=0}^{p-k-1} c_j z^j$ που μηδενίζεται για $z = 1, 2, \ldots, p$ είναι αναγκαστικά το μηδενικό πολυώνυμο (έχει πλήθος ριζών μεγαλύτερο από τον βαθμό του). Επομένως κάθε συμπληρωματικός υπόχωρος του $\mathcal{P}_{p,k}$ μέσα στον $\mathbb{C}^p$ έχει διάσταση k.

Ο $\mathcal{L}$ έχει $m+n-1-2k$ μη μηδενικές διαγωνίους και $2k$ διαγωνίους ίσες με 0. Συνεπώς κάθε συμπληρωματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}$ μέσα στον $M_{mn}(\mathbb{C})$ έχει διάσταση $(m+n-1-2k)k + 2\sum_{p=1}^{k} p = (m+n-1-2k)k + k(k+1)$.

Τελικά λοιπόν η διάσταση του $\mathcal{L}$ είναι

$$\dim \mathcal{L} = mn - (m+n-1-2k)k - k(k+1) = (m-k)(n-k)\,.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι κάθε $A \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ έχει τάξη $\mathrm{rank}(A) \geqslant k+1$:

Κάποια διαγώνιος του A δεν μηδενίζεται. Θεωρούμε μια μη μηδενική διαγώνιο D με ελάχιστο μήκος, έστω p και ονομάζουμε X τον $p \times p$ τετραγωνικό υποπίνακα του A που έχει κύρια διαγώνιο την D. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{rank}(A) \geqslant \mathrm{rank}(X)$. Επειδή το μήκος της D είναι ελάχιστο, ο X είναι αναγκαστικά (άνω ή κάτω) τριγωνικός. Συνεπώς η τάξη του είναι η ίδια με την τάξη της διαγωνίου του, είναι δηλαδή το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων της D. Από την κατασκευή της όμως, $D = \mathrm{diag}(q(1), q(2), \ldots, q(p))$ όπου q μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού $\deg q \leqslant p-k-1$. Κατά συνέπεια η D έχει το πολύ $p-k-1$ μηδενικά στοιχεία, και επομένως τουλάχιστον $k+1$ μη μηδενικά στοιχεία. $\square$

Σχόλια . Ας θυμηθούμε [3, Theorem 2.3.5] ότι η διάσταση ενός υποχώρου $\mathcal{M} \subseteq M_{mn}(\mathbb{C})$ με την ιδιότητα, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του να έχει τάξη τουλάχιστον $k+1$, δεν μπορεί να υπερβαίνει το $(m-k)(n-k)$. Αυτό προκύπτει με μεθόδους Αλγεβρικής Γεωμετρίας από το γεγονός ότι [2, Theorem 1.2] το ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{M}^\perp$ έχει την ιδιότητα να είναι *k-μεταβατικό*, δηλαδή για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathbb{C}^m$ και κάθε σύνολο $y_1, y_2, \ldots y_k \in \mathbb{C}^n$ να υπάρχει ένας $T \in \mathcal{M}^\perp$ ώστε $Tx_j = y_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ (δες το [1]).

Αναφορές

[1] Edward A. Azoff. On finite rank operators and preannihilators. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 64(357):vi+85, 1986.

[2] Kenneth R. Davidson, Laurent W. Marcoux, and Heydar Radjavi. Transitive spaces of operators. *Integral Equations Oper. Theory*, 61(2):187–210, 2008.

[3] Ved Prakash Gupta, Prabha Mandayam, and V. S. Sunder. *The functional analysis of quantum information theory*, volume 902 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Cham, 2015. A collection of notes based on lectures by Gilles Pisier, K. R. Parthasarathy, Vern Paulsen and Andreas Winter. *arXiv:1410.7188 [quant-ph]*