# 1 Μία διόρθωση

Έστω $C_1$ και $C_2$ κλειστοί κυρτοί κώνοι και $e \in (C_1^* \setminus C_1^\perp) \cap (C_2^* \setminus C_2^\perp)$ και

$$H_e := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, e \rangle = |e|^2 \right\}.$$

Στο βιβλίο αναφέρεται (και εγώ επανέλαβα) ότι $(C_1 + C_2)^\flat = \operatorname{conv}(C_1^\flat \cup C_2^\flat)$. Υπό την έννοια ότι

$$(C_1 + C_2) \cap H_e = \operatorname{conv}\big((C_1 \cap H_e) \cup (C_2 \cap H_e)\big)$$

αυτό δεν είναι σωστό, όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα. Εξάλλου, το δεξιό μέλος δεν είναι κατ' ανάγκην βάση, αφού δεν είναι κατ' ανάγκην κλειστό, όπως απαιτεί ο ορισμός της βάσης που δόθηκε (ακόμη και όταν ο $C_1 + C_2$ είναι κλειστός). (Το αριστερό μέλος επίσης δεν είναι κατ' ανάγκην κλειστό, όπως επίσης ούτε ο ίδιος ο κώνος $C_1 + C_2$, ενώ ο ορισμός της βάσης δόθηκε για κλειστούς κυρτούς κώνους μόνο.) Αυτό που είναι σωστό είναι ότι

$$(C_1 + C_2) \cap H_e \subseteq \overline{\operatorname{conv}\big((C_1 \cap H_e) \cup (C_2 \cap H_e)\big)} \quad \text{και} \quad (C_1 + C_2) \cap H_e \supseteq \operatorname{conv}\big((C_1 \cap H_e) \cup (C_2 \cap H_e)\big).$$

Αυτό που είναι επίσης σωστό, είναι η άλλη σχετική ισότητα που αναφέρθηκε:

$$\big(\overline{C_1 + C_2}\big) \cap H_e = \overline{\operatorname{conv}\big((C_1 \cap H_e) \cup (C_2 \cap H_e)\big)},$$

που αντιστοιχεί στην $\big(\overline{C_1 + C_2}\big)^\flat = \overline{\operatorname{conv}(C_1^\flat \cup C_2^\flat)}$.

**Παράδειγμα.** Έστω $C_1 := \{t(0,1,0) \colon t \geq 0\}$,

$$C_2 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \leq 2y,\ y \leq 2x \right\}$$

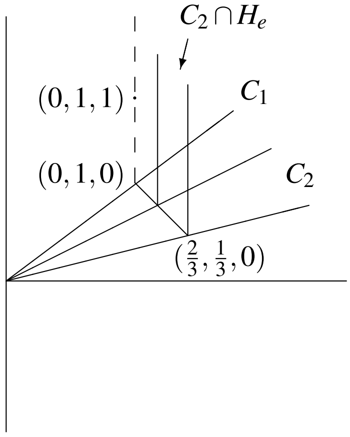
και $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Τότε

$$H_e = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 1 \right\}$$

και $C_1 \cap H_e = (0,1,0)$ ,

$$C_2 \cap H_e = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \leq 2y,\ y \leq 2x,\ x + y = 1 \right\},$$

είναι οι αντίστοιχες βάσεις των κώνων $C_1$ και $C_2$.



Το σημείο $(0,1,1)$ είναι σημείο του $(C_1+C_2)\cap H_e$, αφού $(0,1,1)=(0,1,0)+(0,0,1)\in C_1+C_2$ και $(0,1,1)\in H_e$, αλλά

$$(0,1,1)\notin \operatorname{conv}\big((C_1\cap H_e)\cup(C_2\cap H_e)\big)=\operatorname{conv}\big(\{(0,1,0)\}\cup(C_2\cap H_e)\big),$$

αφού $(0,1,1)=\lambda(0,1,0)+(1-\lambda)(x,y,z)$ με $(x,y,z)\in C_2\cap H_e$ και $\lambda\in[0,1]$ θα απαιτούσε

$$(1-\lambda)x=0,\qquad \lambda+(1-\lambda)y=1,\qquad (1-\lambda)z=1,$$

άρα $\lambda\neq 1$ (από την τελευταία εξίσωση) και άρα $x=0$ (από την πρώτη) και $y=1$ (από την μεσαία εξίσωση), και τότε δεν μπορεί $(x,y,z)\in C_2$, αφού $2x<y$. Επίσης δεν μπορεί

$$(0,1,1)=\lambda(x,y,z)+(1-\lambda)(x',y',z')$$

με $(x,y,z),(x',y',z')\in C_2$ και $\lambda\in[0,1]$, γιατί τότε θα έπρεπε $0=\lambda x+(1-\lambda)x'$ με $\lambda\in[0,1]$, και τότε θα έπρεπε $x=x'=0$· αυτό όμως θα έδινε $y=y'=0$, αφού $0\le y\le 2x$ και $0\le y'\le 2x'$ επειδή $(x,y,z),(x',y',z')\in C_2$, και τότε δεν θα μπορούσε $1=\lambda y+(1-\lambda)y'$. Τέλος, ούτε φυσικά το $(0,1,1)=\lambda(0,1,0)+(1-\lambda)(0,1,0)$ είναι δυνατό, για οποιοδήποτε $\lambda$.

Εδώ έχει κανείς ότι $C_1+C_2=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le x\le 2y\big\}$,

$$(C_1+C_2)\cap H_e=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le x\le 2y,\ x+y=1\big\},$$

ενώ

$$\operatorname{conv}\big((C_1\cap H_e)\cup(C_2\cap H_e)\big)=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0<x\le 2y,\ x+y=1\big\}\cup\{(0,1,0)\}.$$