Αρμονικές συναρτήσεις στον δίσκο $\mathbb{D}$ και στην ομάδα αυτομορφισμών του $\mathbb{D}$

Α. Κατάβολος

Σεμινάριο, Οκτώβριος 2016

Περιεχομενα

1. Αρμονικες Συναρτησεις στον $\mathbb{R}^d$

Παραθέτουμε (χωρίς αποδείξεις) τις κρίσιμες ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^d$. (Από το: Axler, Sheldon; Bourdon, Paul; Ramey, Wade: *Harmonic function theory.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 137. Springer-Verlag, New York, 2001. xii+259 pp. ISBN: 0-387-95218-7 31-01)

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στον $\mathbb{R}^2$ όπου θα δώσουμε πλήρεις αποδείξεις, χρησιμοποιώντας εργαλεία στοιχειώδους μιγαδικής ανάλυσης (τα οποία θα υπενθυμίσουμε).

Ορισμός 1. *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ανοικτό, μια συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{C}$ λέγεται αρμονική αν είναι συνεχής, υπάρχουν οι δεύτερες παράγωγοι $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \dots, d$ και ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση του Laplace $\Delta u := \sum_i \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ σε κάθε σημείο του Ω.*

Παραδείγματα 1. *Παραδείγματα Στο $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, για $d > 2$ η $u(x) = \frac{1}{\|x\|^{d-2}}$ και για $d = 2$ η $u(x) = \log \|x\|$.*

Στο $\mathbb{D} := B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, η $u(re^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{int}$.

Κρίσιμες ιδιότητες

Πρόταση 2. *Η Ιδιότητα Μέσης Τιμής (MVP) Αν η u είναι αρμονική σε μια μπάλα $\bar{B}(a,r)$ (δηλ. σε μια ανοικτή περιοχή της $\bar{B}(a,r)$) τότε η $u(a)$ είναι η μέση τιμή της u στην $\partial B(a,r)$. Δηλαδή*

$$u(a) = \int_S u(a + rz) d\sigma(z)$$

όπου $S = \partial B(0,1)$ και σ το κανονικοποιημένο επιφανειακό μέτρο στην S.

Αντίστροφα: Αν η u είναι συνεχής στο Ω και ικανοποιεί την MVP σε κάθε $a \in \Omega$, τότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Πρόταση 3. *Η Αρχή του Μεγίστου Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και συνεκτικό και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονική. Αν η u λαμβάνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο Ω, τότε είναι σταθερή.*

Πόρισμα Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και φραγμένο και $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $u|_\Omega$ αρμονική, τότε η u λαμβάνει την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της στο $\partial\Omega$. Συνεπώς μια αρμονική συνάρτηση στο Ω καθορίζεται από τις συνοριακές της τιμές.

Πόρισμα Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και συνεκτικό και $u : \Omega \to \mathbb{C}$ αρμονική. Αν η $|u|$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στο Ω, τότε η u είναι σταθερή.

Υπενθύμιση: Αν η u είναι συνεχής στην $\overline{B} = \bar{B}(0,1)$ και αρμονική στην B,

$$\text{MVP} \quad u(0) = \int_S u(z) d\sigma(z)$$

όπου $S = \partial B$.

Πρόταση 4. *Ο πυρήνας Poisson για την μπάλα Υπάρχει μια συνάρτηση $P : B \times S \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$u(x) = \int_S u(z) P(x,z) d\sigma(z) \quad \text{για κάθε } x \in B.$$

Μάλιστα,

$$P(x,z) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x-z\|^d}, \quad x \in B, z \in S.$$

(Ανάλογα ισχύουν για την $B(a,r)$.)

2. Αρμονικές Συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$

Υπενθύμιση Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Μια $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη αν για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει η παράγωγος $f'(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a_1} \frac{f(x+iy) - f(a_1+ia_2)}{x - a_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\
&= \lim_{y \to a_2} \frac{f(x+iy) - f(a_1+ia_2)}{i(y - a_2)} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \\
\text{Αλλά} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \\
\text{και} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} &= -i \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \\
\text{άρα} \quad f'(a) &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(a) \\
&= \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a) + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(a). \qquad \text{(CR)}
\end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι αν μια ολόμορφη συνάρτηση παίρνει μόνο πραγματικές (ή μόνο φανταστικές) τιμές στο Ω, τότε η παράγωγός της μηδενίζεται.

Τα πολυώνυμα (της μιγαδικής μεταβλητής z) είναι ολόμορφες συναρτήσεις. Το ίδιο και οι δυναμοσειρές (γιατί η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ είναι η ίδια με την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$).

Είναι γνωστό ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά: Για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ και $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ για κάθε $z \in B(a,r)$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της $B(a,r)$. Έπεται ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη.

Έπεται επίσης (από την ομοιόμορφη σύγκλιση) ότι αν $0 < s < r$ και $z = a + se^{it}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+e^{is})ds = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{is})^n ds = c_0 = f(a).$$

Επίσης προκύπτει ότι μια ολόμορφη συνάρτηση είναι αρμονική. Πράγματι, από τις ισότητες (CR) έχουμε $\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}$ και $\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}$, οπότε (αφού η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη),

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} \quad \text{άρα} \quad \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} = 0$$

και ομοίως $\Delta \operatorname{Im} f = 0$.

Πρόταση 5 (Το πρόβλημα Dirichlet στον δίσκο $\mathbb{D}$)**.** *Αν $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ που είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace στον δίσκο (δηλ. $u|_{\mathbb{D}}$ αρμονική) τέτοια ώστε $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$.*
Με άλλα λόγια, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ έχει μοναδική συνεχή επέκταση στον $\overline{\mathbb{D}}$ που είναι αρμονική στον $\mathbb{D}$.

Απόδειξη (Μοναδικότητα:) Αν $u, v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ είναι δύο λύσεις, τότε η $h := u - v$ είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ και μηδενίζεται στο σύνορο ∂D. Πρέπει να δείξουμε ότι $h = 0$ στον $\overline{\mathbb{D}}$. Μπορούμε (θεωρώντας χωριστά πραγματικό και φανταστικό μέρος) να υποθέσουμε ότι η h παίρνει πραγματικές τιμές. Υποθέτουμε ότι σε κάποιο $z_0 \in \mathbb{D}$ έχουμε $h(z_0) \neq 0$. Θεωρώντας την $-h$ εν ανάγκη, υποθέτουμε ότι $h(z_0) > 0$. Έστω $\varepsilon = \frac{1}{7}h(z_0)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(z) = h(z) + \varepsilon |z|^2$$

η οποία είναι συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$, ίση με ε παντού στο σύνορο ∂D και $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$. Η g είναι συνεχής σε συμπαγές, άρα έχει ολικό μέγιστο σε κάποιο σημείο $z_1 \in \overline{\mathbb{D}}$, οπότε $g(z_1) \geq g(z_0) > \varepsilon$· άρα το z_1 δεν μπορεί να είναι στο ∂D, οπότε $z_1 \in \mathbb{D}$. Αφού οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της g υπάρχουν στο $\mathbb{D}$, έπεται (Απειρ. ΙΙΙ!) ότι θα είναι μη θετικές στο z_1 (σημείο μεγίστου) οπότε $(\Delta g)(z_1) \leq 0$. Όμως

$$(\Delta g)(z_1) = (\Delta h)(z_1) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0,$$

(αφού η h είναι αρμονική) άτοπο.[1]

(Ύπαρξη) Θεωρούμε τη σειρά Fourier [2]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$$

της f. Μπορεί βεβαίως να μην συγκλίνει, όμως για κάθε $r \in [0,1)$ η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{int}$$

---

[1] Με το ίδο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα και στον $\mathbb{R}^d$ για $d > 2$.

[2] Υπενθύμιση: $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})e^{-ins}\frac{ds}{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Ορίζεται λοιπόν μια συνάρτηση $P(f):\mathbb{D}\to\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}P(f)(z) = P(f)(re^{it}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(-k)(re^{-it})^k + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)(re^{it})^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(-k)\bar{z}^k + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \\ &= \overline{u_1(z)} + u_2(z)\,.\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις u_1 και u_2 είναι δυναμοσειρές, συνεπώς είναι ολόμορφες συναρτήσεις στον ανοικτό δίσκο και επομένως αρμονικές. Άρα η συνάρτηση $P(f)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$.

Η συνάρτηση

$$u:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C} \quad \text{με} \quad u(z) := (\tilde{P}f)(z) = \begin{cases} f(z), & |z|=1 \\ P[f](z), & |z|<1 \end{cases}$$

αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet. Είναι όμως συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$; Τι γίνεται κοντά στο σύνορο; Είναι σωστό ότι $P[f](z)\to f(e^{it})$ όταν $z\to e^{it}$ με $z\in\mathbb{D}$; Θα δείξουμε ότι η απάντηση είναι θετική, σε δυο βήματα:

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου η f είναι της μορφής

$$f(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

είναι δηλαδή τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε βέβαια η f ταυτίζεται με την σειρά Fourier της, αφού $\hat{f}(n) = c_n$ όταν $|n|\le N$ και $\hat{f}(n)=0$ αλλιώς, και επομένως η ισότητα

$$u(re^{it}) = \sum \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int} = \sum_{k=1}^{N} \hat{f}(-k)\bar{z}^k + \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n) z^n$$

ισχύει για κάθε $z=re^{it}\in\overline{\mathbb{D}}$ και ορίζει συνάρτηση συνεχή στον $\overline{\mathbb{D}}$.

Έστω τώρα $f:\partial\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ξέρουμε ότι κάθε $f\in C(\partial\mathbb{D})$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο $\partial\mathbb{D}$ από ακολουθία (f_m) τριγωνομετρικών πολυωνύμων (Θεώρημα Féjer ή Θεώρημα Stone-Weierstrass). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $(\tilde{P}f_m)$ των επεκτάσεων συγκλίνει στην $\tilde{P}f$ ομοιόμορφα στο $\overline{\mathbb{D}}$. Αυτό έπεται άμεσα από την ακόλουθη ανισότητα (απόδειξη σε λίγο):

$$(*) \qquad |P(f)(re^{it})| \le \sup\{|f(e^{is})| : s\in[-\pi,\pi]\} = \|f\|_{\mathbb{T}} \quad \text{για κάθε } re^{it}\in\mathbb{D}$$

$$\text{συνεπώς } \left\|\tilde{P}f\right\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \sup\{|\tilde{P}f(re^{it})| : re^{it}\in\overline{\mathbb{D}}]\} = \|f\|_{\mathbb{T}}\,.$$

Έπεται ότι, αν $f_m\to f$ ομοιόμορφα στο $\partial\mathbb{D}$ τότε

$$\left\|\tilde{P}f - \tilde{P}f_m\right\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \left\|\tilde{P}(f-f_m)\right\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \|f-f_m\|_{\mathbb{T}} \to 0$$

επομένως, αφού κάθε $\tilde{P}f_m$ είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$, η $\tilde{P}f$ είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μένει να αποδειχθεί η ανισότητα $(*)$.

Πρόταση 6. *Αν $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε για κάθε $z = re^{it} \in \mathbb{D}$,*

$$P(f)(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is}) p_r(t-s)ds := (f * p_r)(t),$$

$$\text{όπου} \quad p_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad \text{ο πυρήνας Poisson.}$$

Το μέτρο

$$\sigma_r(A) := \frac{1}{2\pi}\int_A p_r(s)ds, \quad A \subseteq [-\pi,\pi] \ \text{Borel}$$

είναι μέτρο πιθανότητας και συνεπώς

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds\right| \le \sup\{|f(e^{is})| : s \in [-\pi,\pi]\} \quad \text{για κάθε } \ re^{it} \in \mathbb{D}.$$

Απόδειξη Για κάθε $re^{it} \in \mathbb{D}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})e^{-ins}ds\right)e^{int} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})e^{in(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-s)}\right)ds \ \ \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds = (f*p_r)(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{όπου} \quad p_r(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int}\right)
\end{aligned}$$

ο πυρήνας του Poisson. Αν γράψουμε $z = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
p_r(t) &= \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\frac{z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι $p_r(t) \ge 0$ για κάθε t. Επίσης, εφόσον η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, για κάθε $r \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\widehat{p_r}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = r^{|k|}$$

$$\text{και ειδικότερα} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(t)dt = r^0 = 1.$$

Από το γεγονός ότι $p_r(t) \geq 0$ για κάθε t προκύπτει ότι το σ_r είναι θετικό μέτρο και $\sigma_r([-\pi,\pi] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(t)dt = 1$, άρα είναι μέτρο πιθανότητας. Με μια αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε

$$\begin{aligned} P(f)(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(x-t)})p_r(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})d\sigma_r(s) \\ \text{άρα} \quad |P(f)(re^{it})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i(x-t)})|p_r(x)dx \leq \sup\{|f(e^{is})| : s \in [-\pi,\pi]\} \end{aligned}$$

αφού $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(t)dt = 1$.

Σχόλιο Γράφουμε $u = \tilde{P}(f)$. Η απεικόνιση $\tilde{P} : C(\partial\mathbb{D}) \to C(\overline{\mathbb{D}})$ είναι γραμμική, φραγμένη και θετική (δηλ αν $f \geq 0$ τότε $\tilde{P}(f) \geq 0$) και ικανοποιεί $\tilde{P}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Δεν είναι όμως πολλαπλασιαστική ($\tilde{P}(fg) \neq \tilde{P}(f)\tilde{P}(g)$ εν γένει). Η εικόνα $\tilde{P}(C(\partial\mathbb{D}))$ είναι αυτοσυζυγής υπόχωρος της $C(\overline{\mathbb{D}})$ (δηλ. αν η $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$ είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ τότε και η $\bar{u}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$) που περιέχει την $\mathbf{1}$, αλλά όχι υπάλγεβρα.

Πόρισμα 7. *Για κάθε $\overline{B(a,r)} \subseteq \mathbb{C}$, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \partial B(a,r) \to \mathbb{C}$ έχει μοναδική συνεχή επέκταση στην $\overline{B(a,r)}$ που είναι αρμονική στην $B(a,r)$.*

Απόδειξη Η αλλαγή μεταβλητής $\chi : w \to a + rw$ απεικονίζει τον $\overline{\mathbb{D}}$ στην $\overline{B(a,r)}$ ($|w| \leq 1 \iff |a+rw-a| \leq r$) και είναι ολόμορφη και 1-1 από τον $\mathbb{D}$ επί της $B(a,r)$. Επομένως μεταφέρει συνεχείς συναρτήσεις σε συνεχείς συναρτήσεις και αρμονικές σε αρμονικές.

Η συνάρτηση $f \circ \chi$ είναι συνεχής στο $\partial\mathbb{D}$ επομένως (από την Πρόταση 5) έχει μοναδική συνεχή επέκταση $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ που είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$. Η συνάρτηση $v := u \circ \chi^{-1} : \overline{B(a,r)} \to \mathbb{C}$ είναι η ζητούμενη. □

Πρόταση 8. *Αν $\phi : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ και αρμονική στο $\mathbb{D}$, τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ώστε $\operatorname{Re}\psi(z) = \phi(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $\psi(0) = \phi(0)$.*

Απόδειξη Η ϕ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace στον δίσκο με συνοριακή συνάρτηση την

$$f(e^{it}) := \phi(e^{it}) \quad (e^{it} \in \mathbb{T}).$$

Από την μοναδικότητα στην Πρόταση 5 έχουμε, για κάθε $w = re^{it} \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \phi(w) = \phi(re^{it}) = (f * p_r)(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{int} \\ &= \sum_{k=1^\infty} \hat{f}(-k)r^k e^{-ikt} + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)r^n e^{int} \end{aligned}$$

(η σειρά συγκλίνει απόλυτα). Επειδή η f παίρνει πραγματικές τιμές, εύκολα βλέπει κανείς ότι $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$ (ειδικότερα $\hat{f}(0) \in \mathbb{R}$) και άρα

$$\begin{aligned}\phi(re^{it}) &= \sum_{k=1^\infty} \overline{\hat{f}(k) r^k e^{ikt}} + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{int} \\ &= \mathrm{Re}\left(\hat{f}(0) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n e^{int}\right)\end{aligned}$$

οπότε θέτουμε

$$\psi(w) = \hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) w^n$$

που είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{D}$. $\square$

Πρόταση 9. *Κάθε αρμονική πραγματική συνάρτηση είναι* τοπικά *το πραγματικό μέρος μιάς ολόμορφης συνάρτησης: Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό και $g : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονική, για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει ανοικτή μπάλα $U = B(a, r) \subseteq \Omega$ και ολόμορφη $h : U \to \mathbb{C}$ ώστε $Re\, h(z) = g(z)$ για κάθε $z \in U$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε την h ώστε $h(a) = g(a)$. Η h είναι η μοναδική ολόμορφη $u : U \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\, u = g$ στο U και $u(a) = g(a)$.*

Απόδειξη (Ύπαρξη) Επιλέγω $r > 0$ ώστε η *κλειστή* μπάλα $\overline{B(a, r)}$ να περιέχεται στο Ω. Τότε η g είναι συνεχής στην $\overline{B(a, r)}$ και αρμονική στην $B(a, r)$. Η συνάρτηση $\phi := g \circ \chi : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ (όπου $\chi(w) = a + rw$) είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ και αρμονική στο $\mathbb{D}$. Από την Πρόταση 8 υπάρχει μια ολόμορφη συνάρτηση $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re}\, \psi(w) = \phi(w)$ για κάθε $w \in \mathbb{D}$. Ορίζουμε τώρα $h := \psi \circ \chi^{-1} : B(a, r) \to \mathbb{C}$. Η h είναι ολόμορφη, έχει πραγματικό μέρος την g ($\mathrm{Re}\, h(a + rw) = \mathrm{Re}\, \psi(w) = \phi(w) = g(a + rw)$) και $h(a) = \phi(0) = g(a)$.

(Μοναδικότητα) Αν $u : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη με $\mathrm{Re}\, u = g$ στο U και $u(a) = g(a)$, τότε η συνάρτηση $h - u : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, και έχει πραγματικό μέρος 0. Από τις εξισώσεις Cauchy – Riemann [3] έπεται ότι η παράγωγος της $h - u$ μηδενίζεται, άρα, αφού το U είναι ανοικτό και συνεκτικό (είναι μπάλα) η $h - u$ είναι σταθερή στο U. Άρα για κάθε $z \in U$ έχουμε $(h - u)(z) = (h - u)(a) = 0$, οπότε $u = h$ στο U. $\square$

Σχόλιο Πολλοί συγγραφείς θεωρούν αρμονική μια συνάρτηση που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του Laplace και είναι C^2 (δηλ. έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους). Με την επιπλέον αυτή υπόθεση η απόδειξη της Πρότασης είναι πιό άμεση:

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$f(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) - i\frac{\partial g}{\partial y}(z), \quad z \in U$$

και διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy – Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}\, f) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}\, f) \\ \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}\, f) &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\mathrm{Im}\, f) \end{aligned}$$

[3] $f' = \frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial x} - i\frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial y}$

όπου στην πρώτη σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\Delta g = 0$, και στην δεύτερη την ισότητα $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$, που είναι συνέπεια της υπόθεσης ότι, επιπλέον, η g είναι C^2.

Έπεται τώρα ότι η f είναι ολόμορφη στο U. Και επειδή το U είναι απλά συνεκτικό (είναι μπάλα), από το Θεώρημα του Cauchy [4] προκύπτει ότι η f έχει παράγουσα στο U: υπάρχει ολόμορφη $h : U \to \mathbb{C}$ ώστε $h' = f$. Τώρα πάλι από τις εξισώσεις Cauchy – Riemann έχουμε

$$\frac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial x} - i\frac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial y} = h' = f = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$$

δηλαδή $\dfrac{\partial \operatorname{Re} h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ στο U και άρα $\operatorname{Re} h = g + c$ όπου c σταθερά.

Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε στις σημειώσεις αυτές (που ακολουθούν τον Rudin, Real and Complex Analysis) δείχνουν ότι η επιπλέον υπόθεση ότι η g είναι C^2 δεν χρειάζεται, αλλά έπεται από την αρμονικότητα.

2.1. Η ιδιότητα μέσης τιμής και η αρχή του μεγίστου.

Ορισμός 2. *Μία συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει την* **ιδιότητα μέσης τιμής (mean value property – MVP)** *αν για κάθε κλειστή μπάλα $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$ ισχύει η σχέση*

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(a + re^{it})dt\,.$$

Οι ολόμορφες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα μέσης τιμής (συνέπεια του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy). Γενικότερα,

Πρόταση 10. *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, κάθε αρμονική $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει την ιδιότητα μέσης τιμής.*

Απόδειξη Αρκεί να το δείξουμε όταν η g παίρνει πραγματικές τιμές. Τότε όμως, σε κάθε κλειστή μπάλα $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$, η g είναι το πραγματικό μέρος μιάς ολόμορφης συνάρτησης h. Και αφού η h έχει την ιδιότητα μέσης τιμής στην $B(a,r)$, την έχει και η g. □

Θα δείξουμε (πρόταση 13) ότι, αντίστροφα, αν μια *συνεχής* συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει την ιδιότητα μέσης τιμής σε ένα ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε είναι αρμονική στο Ω.

Λήμμα 11. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) και $g : \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής με την Ιδιότητα Μέσης Τιμής. Αν η g λαμβάνει (ολικό) μέγιστο μέσα στο Ω, τότε είναι σταθερή.*

Απόδειξη Έστω $a \in \Omega$ ώστε $g(a) \geq g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Θέτουμε

$$A := \{z \in \Omega : g(z) = g(a)\}$$

οπότε $A \neq \emptyset$. Από τη συνέχεια της g το A είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι και ανοικτό, γιατί τότε από τη συνεκτικότητα του Ω θα έχουμε ότι $A = \Omega$, δηλαδή ότι $g(z) = g(a)$ παντού.

Έστω λοιπόν $z_0 \in A$. Υπάρχει ρ ώστε $\overline{B(z_0,\rho)} \subseteq \Omega$. Αρκεί να δείξουμε ότι $B(z_0,\rho) \subseteq A$, δηλαδή ότι η g είναι σταθερή στην $B(z_0,\rho)$.

Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει $b \in B(z_0,\rho)$ ώστε $g(b) \neq g(z_0)$. Τότε $g(b) < g(z_0)$ (αφού η τιμή $g(z_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της g). Αν θέσω

[4] Μάλιστα εδώ αρκεί το τοπικό Θεώρημα του Cauchy, αφού το U είναι ανοικτό και κυρτό.

$\varepsilon = g(z_0) - g(b)$, από τη συνέχεια της g υπάρχει μια ανοικτή περιοχή V του b ώστε $g(w) < g(z_0) - \varepsilon/2$ για κάθε $w \in V$. Συνεπώς η g θα παίρνει τιμές μικρότερες από $g(z_0) - \varepsilon/2$ σε ένα τόξο της περιφέρειας $S = S(z_0, \lambda)$ (όπου $\lambda = |b - z_0|$), οπότε η μέση τιμή της στην περιφέρεια αυτήν δεν μπορεί να είναι γνησίως μικρότερη από την τιμή στο κέντρο, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την ιδιότητα μέσης τιμής.[5] Δείξαμε λοιπόν ότι η g είναι σταθερή στην $B(z_0, \rho)$.

Από τη συνεκτικότητα του Ω έπεται λοιπόν ότι $A = \Omega$, δηλαδή ότι $g(z) = g(a)$ παντού. $\square$

Λήμμα 12. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $g : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής με την Ιδιότητα Μέσης Τιμής. Αν η $|g|$ λαμβάνει (ολικό) μέγιστο μέσα στο Ω, τότε η g είναι σταθερή.*

Απόδειξη Πολλαπλασιάζοντας την g με μια σταθερά, μπορώ να υποθέσω ότι $|g(a)| = g(a)$. Θεωρούμε την $f(z) = \mathrm{Re}(g(z))$: έχει επίσης την Ιδιότητα Μέσης Τιμής και παίρνει πραγματικές τιμές. Επίσης για κάθε $z \in \Omega$ έχουμε

$$f(z) = \mathrm{Re}(g(z)) \leq |g(z)| \leq |g(a)| = g(a) = f(a)$$

Έπεται λοιπόν από το Λήμμα 11 ότι η f είναι σταθερή, $f(z) = f(a) = |g(a)|$. Τότε όμως για κάθε $z \in \Omega$ έχουμε $|\mathrm{Re}(g(z))| = |f(z)| = g(a)$ επομένως

$$|g(a)|^2 \leq |\mathrm{Re}(g(z))|^2 + |\mathrm{Im}(g(z))|^2 = |g(z)|^2 \leq |g(a)|^2$$

οπότε αναγκαστικά $\mathrm{Im}(g(z)) = 0$, άρα $g(z) = \mathrm{Re}(g(z)) = f(z)$ που είναι σταθερή. $\square$

Πρόταση 13. *Αν μια συνεχής συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει την Ιδιότητα Μέσης Τιμής σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε είναι αρμονική στο Ω.*

Απόδειξη Αρκεί να υποθέσουμε ότι $g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$. Θα βρούμε μια *αρμονική συνάρτηση* $h : \overline{B(a,r)} \to \mathbb{C}$ που θα ταυτίζεται με την g στην περιφέρεια $S(a,r)$, και θα δείξουμε ότι από την Ιδιότητα Μέσης Τιμής έχουμε $h = g$ στον $\overline{B(a,r)}$.

Πράγματι: η συνάρτηση g είναι συνεχής στην $S(a,r)$, επομένως από το Πόρισμα 7 έχει μοναδική συνεχή επέκταση $h : \overline{B(a,r)} \to \mathbb{R}$ που είναι αρμονική στην $B(a,r)$ και παίρνει πραγματικές τιμές (γιατί η g παίρνει πραγματικές τιμές). Θέτουμε

$$v(z) = g(z) - h(z), \quad z \in \overline{B(a,r)}.$$

Η v έχει την Ιδιότητα Μέσης Τιμής (αφού η g και η h την έχουν), και μηδενίζεται στο σύνορο $S(a,r)$.

Αφού η v είναι συνεχής, παίρνει μέγιστη τιμή στο συμπαγές $\overline{B(a,r)}$. Αν δεν είναι σταθερή, από το Λήμμα 11, δεν μπορεί να έχει ολικό μέγιστο μέσα στην $B(a,r)$, οπότε λαμβάνει το μέγιστο στο σύνορο $S(a,r)$, όπου $v = 0$. Δηλαδή $v(z) \leq 0$ στην $\overline{B(a,r)}$. Εφαρμόζοντας όμως το ίδιο επιχείρημα στην $-v$, βρίσκουμε ότι $v(z) \geq 0$ στην $\overline{B(a,r)}$, άρα $v(z) = 0$ στην $\overline{B(a,r)}$, αντίθετα προς την υπόθεση. Άρα η v είναι σταθερή, οπότε $v = 0$ και έχουμε τελειώσει: η $g = h$ είναι αρμονική.

[5] Η περιφέρεια $S = S(z_0, \lambda)$ τέμνει την V σε ένα μη τετριμένο τόξο $I = (e^{ix}, e^{iy})$. Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z_0 + \lambda e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{y} g(z_0 + \lambda e^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{x} + \int_{y}^{\pi}\right) g(z_0 + \lambda e^{it})dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}(g(z_0) - \varepsilon/2)(y - x) + \frac{1}{2\pi}g(z_0)(x + \pi + \pi - y)) < \frac{1}{2\pi}(2\pi)g(z_0) = g(z_0)$$

γιατί $g(w) < g(z_0) - \varepsilon/2$ στο I και $g(w) \leq g(a) = g(z_0)$ παντού. Όμως από την ιδιότητα μέσης τιμής το αριστερά μέλος ισούται με $g(z_0)$, άτοπο.

Δείξαμε ότι η g είναι αρμονική σε μια περιοχή κάθε σημείου του Ω, δηλαδή είναι αρμονική στο Ω.

Πρόταση 14 (Αρχή Μεγίστου)**.** *Έστω $g : \Omega \to \mathbb{C}$ (συνεχής και) αρμονική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Αν η $|g|$ έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο $a \in \Omega$, τότε η g είναι σταθερή.*

Απόδειξη Υπάρχει κλειστή μπάλα $\overline{B(a,r)}$ που περιέχεται στο Ω ώστε $|g(z)| \leq |g(a)|$ για κάθε $z \in B(a,r)$. Από το Λήμμα 12, η g είναι σταθερή στην $B(a,r)$.

Θα δείξω ότι η g είναι σταθερή σε όλο το Ω. Θεωρώντας χωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της g (που είναι αρμονικές συναρτήσεις), μπορώ να υποθέσω ότι η g παίρνει πραγματικές τιμές.

Θεωρώ το σύνολο

$$A = \{z \in \Omega : \text{υπάρχει περιοχή } U_z \text{ του } z \text{ όπου η } g \text{ είναι σταθερή και ίση με } g(a)\}.$$

Μόλις αποδείξαμε ότι η g είναι σταθερή σε μια περιοχή του a, δηλαδή ότι το A περιέχει το a, άρα δεν είναι κενό. Αφού το Ω είναι συνεκτικό, αν δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό, τότε $A = \Omega$ και θα έχουμε τελειώσει.

Είναι φανερό ότι το A είναι ανοικτό: αν $z_0 \in A$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U_{z_0} \subseteq \Omega$ του z_0 όπου η g είναι σταθερή και ίση με $g(a)$ και συνεπώς κάθε $z \in U_{z_0}$ έχει μια περιοχή (την U_{z_0}) όπου η g είναι σταθερή και ίση με $g(a)$, άρα $z \in A$, δηλαδή $U_{z_0} \subseteq A$.

Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το A δεν είναι κλειστό. Υπάρχει τότε ένα $z \in \bar{A} \setminus A$. Κατά συνέπεια κάθε $B(z,\delta) \subseteq \Omega$ τέμνει το A. Αφού η g είναι πραγματική και αρμονική, υπάρχει $h : B(z,\delta) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $\operatorname{Re} h = g$. Όμως στο ανοικτό και μη κενό σύνολο $V = B(z,\delta) \cap A$ η $\operatorname{Re} h = g$ είναι σταθερή, άρα και η h είναι σταθερή στο V. Αφού $\emptyset \neq V \subseteq B(z,\delta)$, από την αρχή της ταυτότητας η h είναι σταθερή σε όλη την $B(z,\delta)$. Επομένως και η g παίρνει σταθερή τιμή, έστω c, στην $B(z,\delta)$. Όμως στο V η g είναι ίση με $g(a)$, αφού $V \subseteq A$, άρα $c = g(a)$. Δηλαδή η g είναι σταθερή και ίση με $g(a)$ στην περιοχή $B(z,\delta)$ του z, αντίθετα με την υπόθεση ότι $z \notin A$. □

2.2. **Συνοριακή αναπαράσταση φραγμένων αρμονικών συναρτήσεων.** Από τη μοναδικότητα στην Πρόταση 5 προκύπτει ότι κάθε αρμονική συνάρτηση ϕ στο $\mathbb{D}$ που (ορίζεται και) είναι συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ αναπαρίσταται από το ολοκλήρωμα Poisson της συνοριακής της συνάρτησης $f(e^{it}) := \phi(e^{it}) \quad (e^{it} \in \mathbb{T})$. Πράγματι, για κάθε $w = re^{it} \in \mathbb{D}$ ισχύει ότι

$$\phi(w) = \phi(re^{it}) = (f * p_r)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds.$$

Μια τέτοια αναπαράσταση υπάρχει και όταν η ϕ ορίζεται στον ανοικτό δίσκο μόνο, και είναι αρμονική και φραγμένη.

Πρόταση 15. *Αν $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ είναι αρμονική και φραγμένη, υπάρχει μια (ουσιωδώς) φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ($f \in L^\infty(\mathbb{T})$) ώστε*

$$\phi(w) = \phi(re^{it}) = (f * p_r)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds.$$

για κάθε $w = re^{it} \in \mathbb{D}$.

Απόδειξη Έστω $\phi_n(w) = \phi(\rho_n w)$ όπου ρ_n είναι μια ακολουθία στο $(0,1)$ με $\rho_n \nearrow 1$ (πχ. $\rho_n = 1 - \frac{1}{n}$). Τότε η συνάρτηση ϕ_n ορίζεται όταν $|\rho_n w| < 1$, επομένως ορίζεται και είναι συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ και αρμονική στον $\mathbb{D}$. Επομένως από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε

$$\phi(\rho_n w) = \phi_n(w) = (f_n * p_r)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{is})p_r(t-s)ds \;\text{ για κάθε }\; w = re^{it} \in \mathbb{D}$$

όπου $f_n(e^{is}) = \phi_n(e^{is}) = \phi(\rho_n e^{is})$. Παρατηρούμε ότι $|f_n(e^{is})| = |\phi(\rho_n e^{is})| \le \|\phi\|_{\mathbb{D}}$, δηλαδή οι συναρτήσεις f_n ανήκουν στον $L^\infty(\mathbb{T})$ και ικανοποιούν $\|f_n\|_{\mathbb{T}} \le \|\phi\|_{\mathbb{D}}$.

Από την ασθενή* συμπάγεια των φραγμένων υποσυνόλων του $L^\infty(\mathbb{T})$ συμπεραίνουμε ότι η (f_n) έχει μια υπακολουθία, έστω (f_{k_n}), που συγκλίνει ασθενώς* σε κάποια $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Δηλαδή για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_n}(e^{is})g(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})g(s)ds$$

και ειδικότερα

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_n}(e^{is})p_r(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds$$
$$\text{δηλαδή} \quad \lim_n \phi(\rho_{k_n} w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds$$

για κάθε $w = re^{it} \in \mathbb{D}$. Όμως η ϕ είναι συνεχής στο $\mathbb{D}$, άρα $\lim_n \phi(\rho_{k_n} w) = \phi(w)$ οπότε τελικά

$$\phi(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is})p_r(t-s)ds\,. \qquad \square$$

Σημείωση Αποδεικνύεται μάλιστα (Θεώρημα Fatou) ότι σχεδόν για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$ το όριο $\lim_{\rho \nearrow 1} \phi(\rho e^{it})$ υπάρχει και ισούται με $f(e^{it})$.

3. Αρμονικες συναρτησεις στην ομαδα αυτομορφισμων του δισκου

3.1. **Οι αυτομορφισμοί του δίσκου.**

Ορισμός 3.
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : \ \text{1-1, επί, ολόμορφη}\}.$$

$$SU_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

$$\textit{Αν} \ \ A \in SU_{1,1}(\mathbb{C}) \ \ \textit{θέτω} \quad f_A(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \ \ z \in \mathbb{D}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $f_A \circ f_{A'} = f_{AA}$ και $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.

Παρατήρηση 16. *Η f_A είναι καλά ορισμένος αυτομορφισμός του δίσκου, και $f_A = f_{A'}$ αν και μόνον αν $A = \pm A'$.*

Απόδειξη Παρατηρώ ότι η f_A ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\backslash\{\frac{-\bar{a}}{\bar{b}}\}$ που περιέχει το $\mathbb{D}$, γιατί $\left|\frac{-\bar{a}}{\bar{b}}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{1+|b|^2}}{|b|} > 1$.

Επίσης, $f_A(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$: Πράγματι, αν $|z| = 1$ τότε

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\bar{z}}\right| = \left|\frac{w}{\bar{w}}\right| = 1\,.$$

Από το γεγονός ότι $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ έπεται ότι $f_A(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Επομένως, $f_A(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\partial\mathbb{D}$. Η συνεχής συνάρτηση f_A απεικονίζει λοιπόν το συνεκτικό σύνολο $\mathbb{D}$ σε μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{C}\backslash\partial\mathbb{D}$. Αφού $f_A(0) = \frac{b}{\bar{a}} \in \mathbb{D}$, έπεται ότι $f_A(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Πάλι από το γεγονός ότι $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ έπεται ότι η f_A είναι 1-1 από το $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$ και η αντίστροφή της είναι ολόμορφη.

Δείξαμε λοιπόν ότι $f_A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Τέλος, έστω ότι $f_A(z) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Θέτοντας $z = 0$ βρίσκουμε $b = 0$, άρα $\frac{az}{\bar{a}} = z$ για κάθε z άρα $a \in \mathbb{R}$, και αφού $|a|^2 = 1 + |b|^2 = 1$ έπεται $a = \pm 1$. Δηλαδή $A = I_2$ (ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας).

Έπεται ότι αν $f_A(z) = f_{A'}(z')$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ τότε $A^{-1}A' = \pm I_2$, άρα $A = \pm A'$. $\square$

Συμπέρασμα: αν θέσω $G := SU_{1,1}(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$, η απεικόνιση $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) : \pm A \to f_A$ είναι 1-1 μορφισμός ομάδων.

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι επί:

Πρόταση 17. *Κάθε $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ είναι της μορφής $f = f_A$.*

Απόδειξη Θα χρειασθεί η ακόλουθη:
Παρατήρηση Η G δρα μεταβατικά στο $\mathbb{D}$: Για κάθε $z, w \in \mathbb{D}$ υπάρχει $A \in G$ ώστε $f_A(z) = w$.
Απόδειξη Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $b \in \mathbb{D}$ υπάρχει $A \in G$ ώστε $f_A(b) = 0$. Πράγματι:

Θέτω $A = \frac{1}{1-|b|^2}\begin{bmatrix} 1 & -b \\ -\bar{b} & 1 \end{bmatrix}$ οπότε $f_A(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z} := \phi_b(z)$.

Έστω τώρα $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Αφού η f είναι 1-1 και απεικονίζει τον $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{D}$ ώστε $f(b) = 0$.

Τότε η συνάρτηση $g := f \circ \phi_b^{-1}$ ανήκει στο $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ και $g(0) = 0$.

Θεωρώ τώρα την συνάρτηση

$$h : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : h(z) := \begin{cases} \dfrac{g(z)}{z}, & z \neq 0 \\ g'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι η h είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ και συνεχής στο 0:

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z = 0} = g'(0) = h(0).$$

Όπως είναι γνωστό από τη Μιγαδική Ανάλυση,[6] έπεται ότι η h είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$.

Έστω τώρα $z \in \mathbb{D}$. Τότε για κάθε r με $|z| \leq r < 1$, από την αρχή του μεγίστου ισχύει ότι

$$|h(z)| \leq \sup\{|h(w)| : |w| = r\} = \sup\left\{\left|\frac{g(w)}{w}\right| : |w| = r\right\} = \sup\left\{\left|\frac{g(w)}{r}\right| : |w| = r\right\} \leq \frac{1}{r}$$

αφού $|g(w)| \leq 1$. Δηλαδή $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$. Παίρνοντας όριο καθώς $r \nearrow 1$, συμπεραίνουμε ότι $|h(z)| \leq 1$ άρα $|g(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και

$$|g'(0)| = |h(0)| \leq 1\,.$$

Όμως η g ανήκει στο $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, συνεπώς η g^{-1} (υπάρχει και) ανήκει στο $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον ίδιο συλλογισμό για την g^{-1}, συμπεραίνουμε ότι $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$. Όμως, από τον κανόνα της αλυσίδας, $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'(g(0))} = \dfrac{1}{g'(0)}$. Άρα

$$\left|\frac{1}{g'(0)}\right| \leq 1\,,$$

και συνεπώς τελικά $|g'(0)| = |h(0)| = 1$. Δηλαδή η h είναι ολόμορφη συνάρτηση και η $|h|$ λαμβάνει μέγιστο στο $0 \in \mathbb{D}$. Από την αρχή του μεγίστου, η h είναι σταθερή, $h(z) = h(0)$ όπου $|h(0)| = 1$, άρα $h(0) = e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν τελικά $g(z) = h(z)z = e^{i\theta}z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Δηλαδή

$$f(z) = g(\phi_b(z)) = e^{i\theta}\phi_b(z) = e^{i\theta}\frac{z - b}{1 - \bar{b}z} = f_A(z) \quad \text{για κάθε } \ z \in \mathbb{D}.$$

όπου $A = \frac{e^{i\theta}}{1-|b|^2}\begin{bmatrix} 1 & -b \\ -\bar{b} & 1 \end{bmatrix}$. □

Στην πραγματικότητα αποδείξαμε την ακόλουθη Πρόταση:

Λήμμα Schwarz *Αν $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ ολόμορφη και $g(0) = 0$ τότε $|g'(0)| \leq 1$ και $|g(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Αν επιπλέον $|g(w)| = |w|$ για κάποιο $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, τότε η g είναι στροφή: $g(z) = e^{i\theta}z$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$.*

[6] Είναι συνεχής στο $\mathbb{D}$ και ολόμορφη στο $\mathbb{D}\backslash\{0\}$. Ελέγχουμε ότι το ολοκλήρωμά της σε κάθε κλειστό τρίγωνο μηδενίζεται, είτε το 0 ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου είτε στο σύνορό του είτε στο υπόλοιπο, και η ολομορφία έπεται.