Αναπαραστάσεις ομάδων: induction

Μιχάλης Ανούσης

Αθήνα, Φεβρουάριος-Μάρτιος 2016

Βασικές έννοιες και παραδείγματα

Ορισμός

G ομάδα, H υποομάδα και π αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V.

$$W = \{f : G \to V : f(gh) = \pi(h)^{-1} f(g), \forall h \in H\}$$

$$(\mathrm{ind}_H^G \pi(x) f)(g) = f(x^{-1} g)$$

G ομάδα, H υποομάδα και π αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V.

$$\mathbb{C}G \otimes V = \{f : G \to V\}$$

$$\mathrm{ind}_H^G \pi = \{f : G \to V : f(gh) = \pi(h)^{-1} f(g), \forall h \in H\}$$

$$f(g) = \sum e_g \otimes v_g$$

$$f(gh) = \sum e_{gh^{-1}} \otimes v_g = \sum e_g \otimes v_{gh}$$

$$\pi(h)^{-1} f(g) = \sum e_g \otimes \pi(h)^{-1} v_g$$

$$f \in \mathrm{ind}_H^G \pi \Leftrightarrow v_{gh} = \pi(h)^{-1} v_g$$

R σύστημα αντιπροσώπων του G/H στην G.

$$f = \sum e_g \otimes v_g = \sum_{r \in R} \sum e_{rh} \otimes v_{rh}$$

$$= \sum_{r \in R} \sum_{H} e_{rh} \otimes \pi(h)^{-1} v_r = \sum_{r \in R} (\sum_{H} e_{rh} \otimes \pi(h)^{-1} v_r)$$

Πρόταση

Αν

$$V_r = \{f \in \mathrm{ind}_H^G \pi : \operatorname{supp} f \subseteq rH\},$$

τότε

$$\mathrm{ind}_H^G \pi = \sum_{r \in R} \oplus V_r$$

και

$$\dim \mathrm{ind}_H^G \pi = [G : H] \dim V.$$

Πρόταση

G ομάδα, H υποομάδα, R σύστημα αντιπροσώπων του G/H στην G. π αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V, $\sigma = \mathrm{ind}_H^G \pi$. Αν χ_π ο χαρακτήρας της π, τότε ο χαρακτήρας της σ είναι

$$\chi_\sigma(g) = \sum_{r \in R} \chi_\pi(rgr^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi_\pi(xgx^{-1})$$

όπου $\chi_\pi = 0$ στο $G - H$.

Απόδειξη

$$V_r = \{f \in \mathrm{ind}_H^G \pi : \mathrm{supp}\, f \subseteq rH\}, g \in G.$$

$\sigma(g)V_r \subseteq V_r$ αν και μόνον αν $r^{-1}gr = k \in H$.
Και τότε

$$\sigma(g)(\sum_H e_{rh} \otimes \pi(h)^{-1}v) = \sum_H e_{grh} \otimes \pi(h)^{-1}v$$

$$= \sum_H e_{rkh} \otimes \pi(h)^{-1}v$$

$$= \sum_H e_{rh} \otimes \pi(h)^{-1}\pi(k)v$$

Αν

$$\phi : V \to V_r$$

$$\phi(v) = (\sum_H e_{rh} \otimes \pi(h)^{-1} v)$$

τότε

$$\sigma(g)\phi = \phi\pi(k)$$

και άρα

$$\operatorname{tr} \sigma(g)|_{V_r} = \operatorname{tr} \pi(k) = \chi_\pi(k) = \chi_\pi(r^{-1} g r).$$

$\square$

Παραδείγματα

G ομάδα, $H = \{e\}$ υποομάδα της G και $(\pi, \mathbb{C})$ η τετριμμένη αναπαράσταση της H. Τότε

$$\mathrm{ind}_H^G \pi = \lambda$$

Ορισμός

G ομάδα, N, H υποομάδες της G με N κανονική. G λέγεται ημιευθύ γινόμενο των N και H αν

$$N \cap H = \{e\}$$

και

$$NH = G.$$

Συμβολίζεται $N \ltimes H$

Παραδείγματα

- Ομάδα Ισομετριών του $\mathbb{R}^n$

$$G = \{(A, x) : A \in O(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(A, x)(B, y) = (AB, Ay + x).$$

$$N = \{(I, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$H = \{(A, 0) : A \in O(n, \mathbb{R})\}$$

-

$$D_n =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^n = 1, aba^{-1} = b^{-1}$$

$$N =< b >= \{b^k : k = 0, 1, ..., n-1\}$$

$$H =< a >= \{e, a\}$$

Παραδείγματα

- Η ομάδα του Heisenberg

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Παρατήρηση

$G = N \ltimes H$, π *αναπαράσταση της* N *σε έναν χώρο* V, $\sigma = \mathrm{ind}_N^G \pi$.

$$W = \{f : H \to V\}$$

Αν $f \in W$ *ορίζουμε* $\tilde{f} \in \mathrm{ind}_N^G \pi$:

$$\tilde{f}(nh) = \tilde{f}(hh^{-1}nh) = \pi(h^{-1}n^{-1}h)f(h).$$

Αν $f \in \mathrm{ind}_N^G \pi$, *ορίζουμε* $f^\flat \in W$:

$$f^\flat(h) = f(h).$$

Παρατήρηση

Έχουμε για $k \in H$:

$$(\sigma(nh)\tilde{f})^{\flat}(k) = (\sigma(nh)\tilde{f})(k) = \tilde{f}((nh)^{-1}k)$$

$$= \tilde{f}(h^{-1}n^{-1}k) = \tilde{f}(h^{-1}kk^{-1}n^{-1}k)$$

$$= \pi(k^{-1}nk)f(h^{-1}k).$$

Η $\mathrm{ind}_N^G\pi$ στον W:

$$(\mathrm{ind}_N^G\pi(nh)f)(k) = \pi(k^{-1}nk)f(h^{-1}k).$$

Πρόταση

G ομάδα, H υποομάδα και (π_1, V_1), (π_1, V_1) αναπαραστάσεις της H. Τότε

$$\mathrm{ind}_H^G(\pi_1 \oplus \pi_2) = \mathrm{ind}_H^G \pi_1 \oplus \mathrm{ind}_H^G \pi_2$$

Πρόταση

G ομάδα, H, K υποομάδες της G, $H \subseteq K$ και (π, V) αναπαράσταση της H. Τότε

$$\mathrm{ind}_K^G \mathrm{ind}_H^K \pi = \mathrm{ind}_H^G \pi$$

Ορισμός

G ομάδα, (π, V), (σ, W) αναπαραστάσεις της G.

$$\hom_G(\pi, \sigma) = \{A : V \to W : \sigma(x)A = A\pi(x), \forall x \in G\}.$$

$$(\pi, \sigma) = \dim \hom_G(\pi, \sigma).$$

Λήμμα

G ομάδα, $\pi_1 \in \hat{G}$, $\pi_2 \in \hat{G}$. *Τότε αν* $\pi_1 \nsim \pi_2$

$$\hom_G(\pi_1^{n_1}, \pi_2^{n_2}) = \{0\}.$$

Αν $\pi_1 \sim \pi_2$,

$$\hom_G(\pi_1^{n_1}, \pi_2^{n_2}) =$$

$$\{A = (A_{ij}) : A_{ij} \;\; d_1 \times d_1 \;\; \pi\acute{\iota}\nu\alpha\kappa\alpha\varsigma \; i = 1, ...n_1, j = 1, ..., n_2, A_{ij} = c_{ij} I\}$$

και

$$(\pi_1^{n_1}, \pi_2^{n_2}) = n_1 n_2.$$

Απόδειξη

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n_1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ A_{n_2 1} & A_{d_1 2} & \dots & A_{n_2 n_1} \end{pmatrix}$$

με A_{ij} , $d_2 \times d_1$ πίνακες για $i = 1, \dots n_1, j = 1, \dots, n_2$.

$$A \in \hom_G(\pi_1^{n_1}, \pi_2^{n_2}) \Leftrightarrow A\pi_1^{n_1}(x) = \pi_2^{n_2}(x)A \;\; \forall x \Leftrightarrow$$

$$A_{ij}\pi_1(x) = \pi_2(x)A_{ij} \;\; \forall x, \forall i, j.$$

Άρα αν $\pi_1 \nsim \pi_2, A_{ij} = 0, \forall i, j.$

Αν $\pi_1 \sim \pi_2, A_{ij} = c_{ij}I \;\; \mu\varepsilon \;\; c_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j.$

$\square$

Ορίζουμε το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(G)$:

$$(f|g) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Πρόταση

$$\pi = \pi_1^{n_1} \oplus \pi_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{n_k}$$

$$\sigma = \pi_1^{m_1} \oplus \pi_2^{m_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{m_k}$$

$$(\pi, \sigma) = \sum n_i m_i = (\chi_\pi | \chi_\sigma)$$

Θεώρημα (Frobenius Recipocity)

G ομάδα, H υποομάδα της G, (σ, W) *αναπαράσταση της G,* (π, V) *αναπαράσταση της H. Τότε :*

$$(\mathrm{ind}_H^G \pi, \sigma) = (\pi, \mathrm{res}_H^G \sigma)$$

Ορισμός

G ομάδα, H υποομάδα και π αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V.

$$\mathbb{C}G \otimes V = \{f : G \to V\}$$

$$J = [e_{gh} \otimes v - e_g \otimes hv : g \in G, v \in V, h \in H]$$

$$\mathbb{C}G \otimes_H V = (\mathbb{C}G \otimes V)/J$$

Η $\mathrm{ind}_H^G \pi$ δρά στον $\mathbb{C}G \otimes_H V$:

$$\mathrm{ind}_H^G \pi(x)(e_g \otimes w) = e_{xg} \otimes w$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

$$\hom_G(\mathbb{C}G \otimes_H V, W) \simeq \hom_H(V, W)$$

$$f \mapsto (v \mapsto f(1 \otimes v))$$

$$((b \otimes v) \mapsto bf(v)) \leftarrow f$$

$\square$

τοπολογικές ομάδες

Ορισμός

G ομάδα, H κλειστή υποομάδα $q : G \to G/H$.
π unitary αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V.

$$C(G, V) = \{f : G \to V, f \ \text{συνεχής}\}$$

$$F_0 = \{f \in C(G, V) : q(\operatorname{supp} f) \ \text{συμπαγές και}$$
$$f(gh) = \pi(h)^{-1} f(g), \forall g \in G, \forall h \in H\}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο μ στον G/H.
Ορίζουμε για $f_1, f_2 \in F_0$, ένα εσωτερικό γινόμενο στον F_0:

$$(f_1, f_2) = \int_{G/H} (f_1(g), f_2(g))_V d\mu(gH)$$

F η πλήρωση του F_0.

Ορισμός

$\mathrm{ind}_H^G \pi(x)$ δρά στον F.

$$(\mathrm{ind}_H^G \pi(x) f)(g) = f(x^{-1} g)$$

Παρατήρηση

G ομάδα, H κλειστή υποομάδα.
π unitary αναπαράσταση της H σε έναν χώρο V.
Αν δεν υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο στον G/H τροποποιώντας την προηγούμενη κατασκευή κατασκευάζουμε μια unitary αναπαράσταση $\mathrm{ind}_H^G \pi(x)$ της G.

Mackey's construction

G τοπικά συμπαγής, N κανονική, αβελιανή υποομάδα της G. Η G δρά στην N:
$(g, n) \mapsto gng^{-1}$. Η δράση αυτή επάγει μια δράση στον $\hat{N}$. Αν $\pi \in \hat{N}$ $g \in G$,

$$g\pi(n) = \pi(g^{-1}ng)$$

$$G_\pi = \{g \in G : g\pi = \pi\}$$

Ορισμός

G τοπικά συμπαγής, N κανονική, αβελιανή υποομάδα της G. Η G δρά regularly στην $\hat{N}$ αν:

1. Ο χώρος τροχιών είναι countably separated
2. $G/G_\pi \to G\pi$ είναι ομοιομορφισμός $\forall \pi \in \hat{N}$.

Θεώρημα

G τοπικά συμπαγής, N κανονική, αβελιανή υποομάδα της G. Υποθέτουμε ότι η G δρά regularly στο $\hat{N}$. Αν $\pi \in \hat{G}$, τότε υπάρχει $\nu \in \hat{N}$ και $\sigma \in \hat{G}_\nu$ τ.ω.

$$\sigma(n) = \nu(n)I, \quad \forall n \in N$$

και

$$\pi = \mathrm{ind}_{G_\nu}^{G} \sigma.$$

Θεώρημα

G τοπικά συμπαγής, N κανονική, αβελιανή υποομάδα της G. Υποθέτουμε ότι η G δρά regularly στο $\hat{N}$. Αν $\nu \in \hat{N}$ και $\sigma \in \hat{G}_\nu$ τ.ω.

$$\sigma(n) = \nu(n)I, \quad \forall n \in N$$

τότε

$$\pi = \mathrm{ind}_{G_\nu}^{G}\sigma \in \hat{G}$$

Θεώρημα

G τοπικά συμπαγής, N κανονική, αβελιανή υποομάδα της G, H υποομάδα της G τ.ω. $G = N \ltimes H$. Υποθέτουμε ότι η G δρά regularly στο $\hat{N}$. Αν $\nu \in \hat{N}$ και $\rho \in \hat{H}_\nu$, τότε $\mathrm{ind}_{G_\nu}^{G}(\nu\rho) \in \hat{G}$ και κάθε $\pi \in \hat{G}$ είναι αυτής της μορφής.

little group:

$$H_\nu$$

Παραδείγματα

- $$D_4 =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^4 = e, aba = b^{-1}$$

$$\pi_0(a) = \pi_0(b) = 1$$

$$\pi_1(a) = -1, \pi_1(b) = 1$$

$$\pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1$$

$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = -1$$

$$\pi_4(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = N \ltimes H$$

$$N = \{e, b, b^2, b^3\}, \quad H = \{e, a\}$$

Παραδείγματα

$\hat{N} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$$\sigma_0(b) = 1$$

$$\sigma_1(b) = i,$$

$$\sigma_2(b) = -1,$$

$$\sigma_3(b) = -i$$

$\hat{H} = \{\rho_0, \rho_1\}$

$$\rho_0(a) = 1$$

$$\rho_1(b) = -1,$$

Παραδείγματα

$$a \cdot \sigma_0 = \sigma_0$$

$H_{\sigma_0} = H$ και παίρνουμε δύο αναπαραστάσεις της D_4:

$$\sigma_0 \rho_0 = \pi_0$$

$$\sigma_0 \rho_1 = \pi_1$$

Παραδείγματα

Όμοια

$$a \cdot \sigma_2 = \sigma_2$$

$H_{\sigma_2} = H$ και παίρνουμε δύο αναπαραστάσεις της D_4:

$$\sigma_2 \rho_0 = \pi_2$$

$$\sigma_2 \rho_1 = \pi_3$$

Παραδείγματα

$$a \cdot \sigma_1 = \sigma_3$$

$H_{\sigma_1} = \{e\}$ και παίρνουμε την αναπαράσταση της D_4:

$$\mathrm{ind}_N^{D_4} \sigma_1 = \pi_4.$$

Παραδείγματα

- Ομάδα του Heisenberg G:
  $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ορίζουμε π_λ στον $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\pi_\lambda(x, y, z)f)(t) = e^{i\lambda z} e^{-i\lambda yt} f(t - x)$$

  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε $\pi_{s,t}$ στον $\mathbb{C}$:

$$\pi_{s,t}(x, y, z) = e^{i(sx+ty)}$$

$$\hat{G} = \{\pi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\pi_{s,t} : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Παραδείγματα

$G = N \ltimes H$,

$$N = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\hat{N} = \{\sigma_{(\nu,\lambda)} : \nu, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\sigma_{(\nu,\lambda)}(0, y, z) = e^{i(\nu y+\lambda z)}$$

Παραδείγματα

$$(x,0,0)\sigma_{(0,\lambda)}(0,y,z) = \sigma_{(0,\lambda)}((-x,0,0)(0,y,z)(x,0,0)) =$$

$$\sigma_{(0,\lambda)}((-x,y,z-xy)(x,0,0)) = \sigma_{(0,\lambda)}(0,y,z-xy) =$$

$$e^{i(\lambda(z-xy))} = e^{i(-\lambda xy+\lambda z)} = \sigma_{(-x\lambda,\lambda)}(0,y,z)$$

Άρα

$$(x,0,0)\sigma_{(0,\lambda)} = \sigma_{(-x\lambda,\lambda)}.$$

και

$$H_{\sigma_{(0,\lambda)}} = \{e\}$$

Παραδείγματα

$$\pi_\lambda = \mathrm{ind}_N^G \sigma_{(0,\lambda)}.$$

Η π_λ δρα στον $L^2(H) = L^2(\mathbb{R})$ ως εξής:

$$\mathrm{ind}_N^G \pi(nh) = \pi(k^{-1}nk)f(h^{-1}k).$$

$$(\pi_\lambda(x,y,z)f)(t) = (\pi_\lambda((0,y,z)(x,0,0))f)(t) =$$

$$\sigma_{(0,\lambda)}((-t,0,0)(0,y,z)(t,0,0))f(t-x) =$$

$$\sigma_{(0,\lambda)}((-t,y,z-ty)(t,0,0))f(t-x) =$$

$$\sigma_{(0,\lambda)}(0,y,z-ty)f(t-x) = e^{i\lambda z}e^{-i\lambda ty}f(t-x).$$