Αναπαραστάσεις ομάδων: παραδείγματα

Μιχάλης Ανούσης

Φεβρουάριος-Μάρτιος 2016

1. τοπολογικές ομάδες
2. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{T}$
3. Συμπαγείς ομάδες

τοπολογικές ομάδες

Ορισμός

Μια ομάδα G λέγεται τοπολογική ομάδα αν είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία τ.ω. οι

$$(x, y) \mapsto xy$$

και

$$x \mapsto x^{-1}$$

να είναι συνεχείς.

Παραδείγματα

- G ομάδα με την διακριτή τοπολογία
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$
- $(\mathbb{T}, \cdot)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Οι παρακάτω ομάδες πινάκων με την σχετική τοπολογία και πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παραδείγματα

- $GL(n,\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) : n \times n \text{ πίνακας}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ \det A \neq 0\}$
- $SL(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$
- $O(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ A^t A = I\}$
- $GL(n,\mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) : n \times n \text{ πίνακας}, a_{ij} \in \mathbb{C},\ \det A \neq 0\}$
- $U(n) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{C}),\ A^* A = I\}$
- $SU(n) = \{A : A \in U(n),\ \det A = 1\}$

Παραδείγματα

- $T_n = \{A = (a_{ij}) : n \times n \text{ άνω τριγωνικός πίνακας}, \ \forall i, a_{ii} = 1\}$

$$T_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

- Η ομάδα του Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Παραδείγματα

- Affine group

$$G = \{(A, x) : A \in GL(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(A, x)(B, y) = (AB, Ay + x).$$

- Ομάδα Ισομετριών του $\mathbb{R}^n$

$$G = \{(A, x) : A \in O(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(A, x)(B, y) = (AB, Ay + x).$$

$$G = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \|Fw\|_2 = \|w\|_2, \forall w \in \mathbb{R}^n\}$$

Παραδείγματα

- Η ομάδα του Lorentz

$$G = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) : AJA^t = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$G = \{F : F \in GL(4, \mathbb{R}) : g(Fw) = g(w), \forall w \in \mathbb{R}^4\}$$

$$g(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Πρόταση

G τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε η G έχει ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο. Το μέτρο αυτό είναι μοναδικό up to a scalar. Λέγεται μέτρο Haar και θα συμβολίζεται μ.

Ορισμός

H χώρος Hilbert και G τοπολογική ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to B(H)$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \quad \forall x \in G.$
3. Για κάθε $v \in H$ η απεικόνιση $x \mapsto \pi(x)v$ είναι συνεχής.

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος V του H λέγεται αναλλοίωτος αν

$$\pi(x)v \in V, \ \forall v \in V, \ \forall x \in G$$

V αναλλοίωτος, τότε $V^{\perp}$ αναλλοίωτος.

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Η π λέγεται irreducible αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο H και ο $\{0\}$.

Ορισμός

G ομάδα (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός $\pi_V(x)$ του $\pi(x)$ στον V, ορίζει ένα στοιχείο του $B(V)$. Η $g \to \pi_V(x)$ είναι μια απεικόνιση $G \to B(V)$ και λέγεται υποαναπαράσταση της π.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Η απεικόνιση $x \to (\pi_1 \oplus \pi_2)(x) : G \to B(H_1 \oplus H_2)$ που ορίζεται $(\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(v_1 + v_2) = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2$ λέγεται ευθύ άθροισμα των π_1, π_2.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει $U : H_1 \to H_2$ ισομετρία επί, τέτοια ώστε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

$\forall x \in G$.

Η ισοδυναμία αναπαραστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός

$\hat{G}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των unitary irreducible αναπαραστάσεων της G.

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.

1. $A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ *για κάθε* $x \in G$, *τότε* $A = \lambda I$.
2. π *irreducible*

Παρατήρηση

$\{\pi(x) : x \in G\}'$ *είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα και*

$$\{\pi(x) : x \in G\}' = \mathbb{C}I \Leftrightarrow \pi \textit{ irreducible}$$

Παραδείγματα

- Η τετριμμένη
- $L^2(G)$ ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Η αναπαράσταση λ που ορίζεται

$$\lambda(y) f(x) = f(y^{-1} x)$$

λέγεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.

Παρατήρηση

$G = \mathbb{R}$

λ *η αριστερή κανονική αναπαράσταση της* $\mathbb{R}$ *στον* $L^2(\mathbb{R})$.

Αν $y \neq 0$,

$$\|\lambda(y) - \lambda(0)\| = 2$$

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{T}$

Πρόταση

$\mathbb{R}$, στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε για $r \in \mathbb{R}$

$$\pi_r(x) = e^{irx}$$

Τότε

$$\hat{\mathbb{R}} = \{\pi_r : r \in \mathbb{R}\}.$$

Απόδειξη

$$\pi(s)\int_0^h \pi(t)dt = \int_0^h \pi(s+t)dt = \int_s^{s+h} \pi(u)du$$

Επειδή π συνεχής και $\pi(0) = 1$, υπάρχει $h > 0$ τ.ω.

$$\int_0^h \pi(t)dt \neq 0.$$

Επειδή η π συνεχής, η

$$s \to \int_s^{s+t} \pi(u)du$$

είναι διαφορίσιμη. ΄Αρα η $s \to \pi(s)$ είναι διαφορίσιμη.
Θέτουμε

$$c = \pi'(0).$$

Τότε

$$\pi'(s) = \lim_{t \to 0} \frac{\pi(s+t) - \pi(s)}{t} = \pi(s) \lim_{t \to 0} \frac{\pi(t) - \pi(0)}{t} = c\pi'(0).$$

Θέτουμε

$$\phi(s) = \pi(s)e^{-cs}.$$

Τότε $\phi'(s) = 0$ και $\phi(0) = 1$.
Άρα

$$\pi(s) = e^{cs}.$$

Επειδή $\pi(s)\overline{\pi(s)} = 1$ έχουμε $c = ir$ με $r \in \mathbb{R}$ και

$$\pi(s) = e^{irs}.$$

$\square$

Παρατήρηση

$f \in L^2(\mathbb{R})$: *ορίζουμε*

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ist} dt$$

$$F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$Ff = \hat{f}$$

Ορίζουμε για $x \in \mathbb{R}$,

$$\pi(x) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$(\pi(x)g)(s) = e^{-ixs} g(s)$$

Παρατήρηση

Τότε αν $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$F(\lambda(x)f)(s) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda(x)f)(t)e^{-ist}dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)e^{-ist}dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-is(t+x)}dt = e^{-isx}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist}dt = \pi(x)(Ff)(s).$$

Άρα

$$\pi(x)F = F\lambda(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και οι π *και* λ *είναι ισοδύναμες.*

Παραδείγματα

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε
  για $n \in \mathbb{Z}$
  $$\pi_n(x) = e^{2\pi i n x}$$
  $\hat{\mathbb{T}} = \{\pi_n : n \in \mathbb{Z}\}$.
- $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε
  για $a \in \mathbb{T}$
  $$\pi_a(n) = e^{2\pi i n a}$$
  $\hat{\mathbb{Z}} = \{\pi_a : a \in \mathbb{T}\}$.

συμπαγείς ομάδες

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε αν $\pi \in \hat{G}$, $d_\pi < +\infty$.

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε η $\left\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : \pi \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d_\pi\right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$.

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε

$$\lambda = \sum_{\pi \in \hat{G}} \oplus \pi^{d_\pi}$$

Πρόταση

$$f \in L^2(G)$$

Θέτουμε

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(x)\pi(x^{-1})d\mu(x)$$

όπου $\mu(G) = 1$. *Τότε*

$$f(x) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x))$$

($L^2(G)$ *σύγκλιση)*

Το μέτρο Plancherel του $\{\pi\}$ είναι d_π.

Παράδειγμα

$G = \mathbb{T}$
$e_n(t) = e^{-2\pi int}$
$V_n = [e_n]$
Τότε

$$(\lambda(x)e_n)(t) = e_n(t - x) = e^{2\pi inx}e^{-2\pi int} = e^{2\pi inx}e_n(t)$$

$$L^2(\mathbb{T}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus V_n$$

$$\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus \pi_n.$$

Παράδειγμα

$$f \in L^2(\mathbb{T})$$

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}$$

($L^2(\mathbb{T})$ σύγκλιση)

Παραδείγματα

- $SU(2)$
  V_n: ομογενή πολυώνυμα βαθμού n δύο μιγαδικών μεταβλητών.
  Θέτουμε
  $$\phi_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}.$$
  Τα ϕ_k για $k = 0, 1, \ldots, n$ αποτελούν βάση του V_n και
  $\dim V_n = n + 1$.
  Ορίζουμε
  $$\left\langle \sum a_k\phi_k, \sum b_k\phi_k \right\rangle = \sum k!(n-k)!a_k\overline{b_k}.$$

Παραδείγματα

Η $SU(2)$ δρά στον V_n:

Αν

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(\pi_n(x)f)(z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2).$$

Πρόταση

π_n είναι irreducible.

Απόδειξη

$A \in B(V_n)$ τ.ω.$\forall x \in SU(2)$

$$\pi_n(x)A = A\pi_n(x).$$

Αν

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\pi_n(x)\phi_k(z_1, z_2) = \phi_k(az_1, a^{-1}z_2) = a^{2k-n}\phi_k(z_1, z_2).$$

Αν τα a^{2k-n}, $k = 0, 1, 2, \ldots n$ είναι διάφορα ανά δύο, τότε

$$A\phi_k = c_k\phi_k \ \text{ με } \ c_k \in \mathbb{C} \ \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Αν

$$x = \begin{pmatrix} \cos t & -sint \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

τότε

$$(A\pi_n(x)\phi_n)(z_1, z_2) = A(z_1 \cos t + z_2 \sin t)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot A\phi_k(z_1, z_2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot c_k\phi_k(z_1, z_2)$$

και

$$(\pi_n(x)A\phi_n)(z_1, z_2) = (\pi_n(x)c_n\phi_n)(z_1, z_2) = c_n(\pi_n(x)\phi_n)(z_1, z_2)$$

$$= c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot \phi_k(z_1, z_2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t \cdot c_n\phi_k(z_1, z_2).$$

Άρα

$$c_n = c_k$$

$\forall k = 0, 1, 2, ..., n.$ $\square$

Πρόταση

$$\widehat{SU(2)} = \{\pi_n : n = 0, 1, 2, ...\}$$

Παραδείγματα

- $SO(3)$

  $l = 0, 1, \ldots,$

  P_l: μιγαδικός χώρος των ομογενών πολυωνύμων βαθμού l τριών πραγματικών μεταβλητών.

$$\dim P_l = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$$

$$P_2 = \{c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{23}x_2x_3 + c_{31}x_3x_1 \,:\, c_{ij} \in \mathbb{C}\}$$

Παραδείγματα

Η $SO(3)$ δρα στον P_l: Αν

$$A \in SO(3), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad f \in P_l$$

θέτουμε

$$Af(x) = f(xA).$$

Η δράση δεν είναι irreducible.

Παραδείγματα

$$\Delta = \partial^2/\vartheta x_1^2 + \partial^2/\vartheta x_2^2 + \partial^2/\vartheta x_3^2$$

Αρμονικά πολυώνυμα βαθμού l.

$$H_l = \{f \in P_l : \Delta f = 0\}$$

$$\dim H_l = 2l + 1$$

$$\Delta A f = A \Delta f$$

$\forall f \in C^\infty$.

Παραδείγματα

Ορίζουμε σ_n στον $\mathcal{H}_l$

$$\sigma_n(A)f(x) = f(xA)$$

Πρόταση

$$\widehat{SO(3)} = \{\sigma_n : n = 0, 1, 2, ...\}$$

Παραδείγματα

$$SU(2)/\{-I, I\} \simeq SO(3)$$

π αναπαράσταση της $SU(2)$ τετριμμένη στο κέντρο, ορίζει μια αναπαράσταση της
$SO(3)$.

$$V_{2l} \longleftrightarrow H_l$$

Παραδείγματα

- Ομάδα του Heisenberg H:
  $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ορίζουμε π_λ στον $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\pi_\lambda(x, y, z)f)(t) = e^{i\lambda z} e^{-i\lambda yt} f(t - x)$$

  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε $\pi_{s,t}$ στον $\mathbb{C}$:

$$\pi_{s,t}(x, y, z) = e^{i(sx+ty)}$$

$$\hat{H} = \{\pi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\pi_{s,t} : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$