Αναπαραστάσεις και χαρακτήρες πεπερασμένων ομάδων

Μιχάλης Ανούσης

Αθήνα, Φεβρουάριος-Μάρτιος 2016

Ορισμός

H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και G ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to B(H)$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \quad \forall x \in G.$

Προβλήματα Θεωρίας Αναπαραστάσεων

1. Να υπολογιστεί το $\hat{G}$.
2. Να μελετηθεί η λ.
3. Για $f \in L^1(G)$ να βρεθεί η f απο τα $\pi(f)$.

όπου αν
(π, H) αναπαράσταση της G, $f \in L^1(G)$.

$$\pi(f) = \sum_{x \in G} f(x)\pi(x)$$

Schur

Πρόταση

G ομάδα, (π_1, H_1), (π_2, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G, και $A \in B(H_1, H_2)$ τ.ω.

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A$$

για κάθε $x \in G$. Τότε

1. *Αν οι π_1, π_2 δεν είναι ισοδύναμες, $A = 0$.*
2. *Αν $\pi_1 = \pi_2$, $A = \lambda I$.*

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.:

1. $A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ *για κάθε* $x \in G$, *τότε* $A = \lambda I$.
2. π *irreducible.*

Απόδειξη Αν π οχι irreducible η προβολή σε έναν αναλλοίωτο υπόχωρο ικανοποιεί $A\pi(x) = \pi(x)A$. □

Πρόταση

G αβελιανή ομάδα, (π, H) irreducible αναπαράσταση της G. Τότε $\dim H = 1$.

Πρόταση

G ομάδα, (π, H_1), (ρ, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G. Τότε

1. *Αν οι π, ρ δεν είναι ισοδύναμες,*

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

2. $$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{kl}(x^{-1}) = \delta_{il}\delta_{kj}|G|/d_\pi$$

   όπου d_π είναι η διάσταση του χώρου της αναπαράστασης π.

Απόδειξη

Έστω $A \in B(H_2, H_1)$ και

$$A_G = \sum_{x \in G} \pi(x) A \rho(x^{-1}).$$

Έχουμε

$$\pi(y) A_G = \sum_{x \in G} \pi(yx) A \rho(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \pi(x) A \rho(x^{-1}) \rho(y) = A_G \rho(y).$$

Άρα $A_G = 0$. Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1, παίρνουμε $(A_G)_{il} = 0$ και

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x) \rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

Έστω $A \in B(H_1)$ και

$$A_G = \sum_{x \in G} \pi(x) A \pi(x^{-1}).$$

Έχουμε

$$\pi(y) A_G = \sum_{x \in G} \pi(yx) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \pi(x) A \pi(x^{-1}) \pi(y) = A_G \pi(y).$$

Άρα $A_G = \lambda I$.
Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1 και $i \neq l$, τότε $(A_G)_{il} = 0$ και άρα
$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x) \pi_{kl}(x^{-1}) = 0$ αν $i \neq l$.
Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1 και $j \neq k$ παίρνουμε

$$\operatorname{tr}(A_G) = \sum_{x \in G} \operatorname{tr} \pi(x) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \operatorname{tr} A = 0.$$

Άρα επειδή ο A_G είναι διαγώνιος, $(A_G)_{ii} = 0$, δηλαδή $\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{ki}(x^{-1}) = 0$ αν $j \neq k$.
Τέλος αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jj όπου έχει 1 έχουμε

$$\operatorname{tr}(A_G) = \sum_{x \in G} \operatorname{tr} \pi(x) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \operatorname{tr} A = |G|$$

και άρα επειδή ο A_G είναι διαγώνιος, $(A_G)_{ii} = |G|/d_\pi$, δηλαδή $\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{ji}(x^{-1}) = |G|/d_\pi$.

$\square$

χαρακτήρες

Ορισμός

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Λέμε χαρακτήρα της π την συνάρτηση $\chi_\pi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, που ορίζεται

$$\chi_\pi(x) = \operatorname{tr} \pi(x)$$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G.

1. $\chi_\pi(e) = d_\pi$
2. $\chi_\pi(x^{-1}) = \overline{\chi_\pi(x)}$
3. $\chi_\pi(yxy^{-1}) = \chi_\pi(x)$
4. *Αν οι π και οι ρ είναι ισοδύναμες, $\chi_\pi(x) = \chi_\rho(x)$.*

Ορίζουμε το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(G)$:

$$(f|g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Πρόταση

G ομάδα, π, ρ unitary irreducible αναπαραστάσεις της G.

1. *Αν οι π και ρ δεν είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 0$.*
2. *Αν οι π και ρ είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 1$.*

Απόδειξη

Αν οι π και ρ δεν είναι ισοδύναμες έχουμε $\pi(x) = \pi_{ij}(x)$, $\rho(x) = \rho_{kl}(x)$, $\chi_\pi(x) = \sum_i \pi_{ii}(x)$, $\chi_\rho = \sum_k \rho_{kk}(x)$ και

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_\pi(x)\overline{\chi_\rho(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_i \pi_{ii}(x)\right)\left(\overline{\sum_k \rho_{kk}(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_k\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\overline{\rho_{kk}(x)}\right)$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i\sum_k\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\rho_{kk}(x^{-1})\right) = 0.$$

Αν οι π και ρ είναι ισοδύναμες έχουμε

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = (\chi_\pi|\chi_\pi) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_\pi(x)\overline{\chi_\pi(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_i \pi_{ii}(x)\right)\left(\overline{\sum_j \pi_{jj}(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_j\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\overline{\pi_{jj}(x)}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_j\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\pi_{jj}(x^{-1})\right)$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\pi_{ii}(x^{-1})\right) = \frac{1}{|G|}\sum_i(|G|/d_\pi) = 1.$$

$\square$

Πόρισμα

G ομάδα, (ρ, H) unitary αναπαράσταση τ.ω.

$$\rho = \pi_1^{n_1} \oplus \pi_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{n_k}$$

με π_i unitary irreducible αναπαραστάσεις μη ισοδύναμες ανά δύο. Τότε

1. $(\chi_{\pi_i}|\chi_\rho) = n_i$.
2. $(\chi_\rho|\chi_\rho) = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2$.

Πόρισμα

G ομάδα, ρ unitary αναπαράσταση. Τότε η ρ είναι irreducible αν και μόνον αν $(\chi_\rho|\chi_\rho) = 1$.

Πόρισμα

G ομάδα, π, ρ unitary αναπαραστάσεις. Τότε οι π και ρ είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν $\chi_\pi = \chi_\rho$.

Απόδειξη

$$\pi = \pi_1^{n_1} \oplus \pi_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{n_k}$$

$$\rho = \pi_1^{m_1} \oplus \pi_2^{m_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{m_k}$$

με π_i unitary irreducible αναπαραστάσεις μη ισοδύναμες ανά δύο. Τότε

$$n_i = (\chi_\pi | \chi_{\pi_i}) = (\chi_\rho | \chi_{\pi_i}) = m_i.$$

$\square$

Πρόταση

G ομάδα, π unitary irreducible αναπαράσταση. Τότε η π είναι υποαναπαράσταση της λ με πολλαπλότητα d_π.

Απόδειξη

$\chi_\lambda(x) = \sum_{y\in G}\langle \lambda(x)e_y, e_y\rangle = \sum_{y\in G}\langle e_{xy}, e_y\rangle$.
Άρα $\chi_\lambda(x) = 0$ αν $x \neq e$ και $\chi_\lambda(x) = |G|$ αν $x = e$.
Έχουμε

$$(\chi_\lambda|\chi_\pi) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_\lambda(x)\overline{\chi_\pi(x)} = \frac{1}{|G|}\chi_\lambda(e)\overline{\chi_\pi(e)} = d_\pi.$$

□

Πρόταση

G ομάδα. Τότε

$$\lambda = \sum_{\pi \in \hat{G}} \oplus \pi^{d_\pi}$$

Πόρισμα

G έχει πεπερασμένο πλήθος unitary irreducible αναπαράστάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. *Επιπλέον*

$$|G| = d_{\pi_1}^2 + d_{\pi_2}^2 + \ldots + d_{\pi_k}^2$$

Ποιό είναι το k;

Συμβολίζουμε $H(G)$ τον χώρο των class functions.

$$H(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : f(yxy^{-1}) = f(x), \forall x, y \in G\}$$

Οι χαρακτήρες ανήκουν στον $H(G)$.

Πρόταση

$\dim H(G) = c$, *όπου c το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.*

Πρόταση

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ *οι unitary irreducible αναπαραστάσεις της G και* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ *οι αντίστοιχοι χαρακτήρες. Τότε οι* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ *αποτελούν βάση του* $H(G)$.

Λήμμα

$f \in H(G)$, π unitary αναπαράσταση. Τότε $\pi(f) \in \{\pi(x) : x \in G\}'$. Αν π irreducible τότε

$$\pi(f) = \frac{(\chi_\pi|\bar{f})|G|}{d_\pi} I$$

Απόδειξη του Λήμματος

$$\pi(x)(\sum_{g\in G} f(g)\pi(g)) = \sum_{g\in G} f(g)\pi(xg) = \sum_{g\in G} f(x^{-1}g)\pi(g)$$

$$= \sum_{g\in G} f(gx^{-1})\pi(g) = \sum_{g\in G} f(g)\pi(gx) = (\sum_{g\in G} f(g)\pi(g))\pi(x)$$

Αν π irreducible τότε

$$\pi(f) = \lambda I$$

είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού και $\lambda = \operatorname{tr} \pi(f)/d_\pi$. Έχουμε

$$\operatorname{tr} \pi(f) = \operatorname{tr}(\sum_{g \in G} f(g)\pi(g)) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_\pi(g) = (\chi_\pi | \bar{f})|G|$$

$\square$

Απόδειξη της Πρότασης

Από το Λήμμα

$$(\chi_\pi | \bar{f}) = 0 \Rightarrow \pi(f) = 0$$

για κάθε $\pi \in \hat{G}$. Άρα $\lambda(f) = 0$. Έχουμε

$$\lambda(f) e_e = 0 \Rightarrow \sum_{x \in G} f(x) \lambda(x) e_e \Rightarrow \sum_{x \in G} f(x) e_x = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$\square$

Θεώρημα

$|\hat{G}| = |S|$, όπου S το σύνολο των κλάσεων συζυγίας της G.

Πόρισμα

G αβελιανή αν και μόνον αν $|\hat{G}| = |G|$.

Απόδειξη

Αν $|\hat{G}| = |G|$, τότε οι κλάσεις συζυγίας είναι όσες η τάξη της G. Άρα κάθε κλάση συζυγίας περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.

$\square$

Παραδείγματα

- $$G =< a > \text{τ.ω.} a^4 = e$$
  $$\pi_0(a) = 1$$
  $$\pi_1(a) = i,$$
  $$\pi_2(a) = -1,$$
  $$\pi_3(a) = -i$$

Παραδείγματα

G	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
e	1	1	1	1
a	1	i	-1	$-i$
a^2	1	-1	1	-1
a^3	1	$-i$	-1	i

Παραδείγματα

- $$G =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^2 = e, ab = ba$$
$$G = \{e, a, b, ab\}$$
$$\pi_0(a) = 1, \pi_0(b) = 1$$
$$\pi_1(a) = 1, \pi_1(b) = -1,$$
$$\pi_2(a) = -1, \pi_2(b) = 1,$$
$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(a) = -1,$$

Παραδείγματα

G	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
e	1	1	1	1
a	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1
ab	1	-1	-1	1

Παραδείγματα

- $$D_4 =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^4 = e, aba = b^{-1}$$

$$\pi_0(a) = \pi_0(b) = 1$$

$$\pi_1(a) = -1, \pi_1(b) = 1$$

$$\pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1$$

$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = -1$$

$$\pi_4(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

D_4	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
e	1	1	1	1	2
b	1	1	-1	-1	0
b^2	1	1	1	1	-2
b^3	1	1	-1	-1	0
a	1	-1	1	-1	0
ba	1	-1	-1	1	0
b^2a	1	-1	1	-1	0
b^3a	1	-1	-1	1	0

Fourier

Πρόταση

G ομάδα. Τότε η $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : \pi \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d_\pi\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$.

Απόδειξη

Αν οι π, ρ δεν είναι ισοδύναμες,

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\overline{\rho_{lk}(x)} = \sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

και

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\overline{\pi_{lk}(x)} = \sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{kl}(x^{-1}) = \delta_{il}\delta_{kj}|G|/d_\pi.$$

Αν $(f|\pi_{ij}) = 0$, τότε

$$\pi(\bar{f}) = 0$$

για κάθε $\pi \in \hat{G}$.

΄Αρα

$$\lambda(\bar{f}) = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0 \Rightarrow f = 0$$

γιατί

$$\lambda(\bar{f})e_e = 0 \Rightarrow \sum_{x \in G} \overline{f(x)} \lambda(x) e_e \Rightarrow \sum_{x \in G} \overline{f(x)} e_x = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0.$$

$\square$

Πρόταση

$$f \in L^2(G)$$

Θέτουμε

$$\hat{f}(\pi) = (1/|G|) \sum_{x \in G} f(x)\pi(x^{-1}).$$

Τότε

$$f(x) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x)).$$

($L^2(G)$ σύγκλιση)

Μέτρο Plancherel του π είναι d_π.

Παράδειγμα

- $\mathbb{Z}_n$

  $\mathbb{Z}_n$, ορίζουμε για $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

  $\pi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

$$\pi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}}$$

$$\widehat{\mathbb{Z}_n} = \{\pi_k : k = 0, 1, 2, \ldots n-1\}$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \oplus \pi_k$$

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$$

Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f

$$\hat{f} : \widehat{\mathbb{Z}_n} \to \mathbb{C},$$

$$\hat{f}(\pi_k) = \frac{1}{n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m)\pi_k(-m).$$

Παράδειγμα

Τύπος της αντιστροφής:

$$\sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \hat{f}(\pi_k)\pi_k(m_0) = \sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m)\pi_k(-m) \right) \pi_k(m_0)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m) \left(\frac{1}{n} \sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \pi_k(-m)\pi_k(m_0) \right)$$

Παράδειγμα

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m) \left(\frac{1}{n} \sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} e^{2\pi i \frac{(m_0 - m)k}{n}} \right) = f(m_0).$$

Άρα

$$\sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \hat{f}(k) \rho_{m_0}(k) = f(m_0).$$

Κάθε σημείο του $\widehat{\mathbb{Z}_n}$ έχει μάζα

$$1.$$

(Μέτρο Plancherel).

Παρατήρηση

Αν G αβελιανή, τότε $\hat{G}$ αβελιανή όμάδα με πράξη τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό. Αν $x \in G$, τότε η $\rho_x : \hat{G} \to \mathbb{C}$, που ορίζεται

$$\rho_x(\pi) = \pi(x)$$

είναι unitary irreducible αναπαράσταση της $\hat{G}$.
Κάθε unitary irreducible αναπαράσταση της $\hat{G}$ είναι της μορφής ρ_x για κάποιο $x \in G$. Άρα $\hat{\hat{G}} = G$ (Pontryagin duality).