Αναπαραστάσεις και χαρακτήρες πεπερασμένων ομάδων

Μιχάλης Ανούσης

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016

πεπερασμένες ομάδες

Παραδείγματα

- $(\mathbb{Z}_n, +)$
- $S_n = \{\phi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n,\ 1-1 \text{ και επί}\}$, όπου $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$, με πράξη την σύνθεση
- $D_n =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1}$

Ορισμός

H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και G ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to B(H)$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \quad \forall x \in G.$

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Ένας διανυσματικός υπόχωρος V του H λέγεται αναλλοίωτος αν

$$\pi(x)v \in V, \ \forall v \in V, \ \forall x \in G.$$

Πρόταση

V αναλλοίωτος, τότε $V^{\perp}$ αναλλοίωτος.

Απόδειξη

$w \in V^{\perp}$, $x \in G$, τότε $\forall v \in V$,

$$\langle \pi(x)w, v\rangle = \langle w, \pi(x)^{*}v\rangle = \left\langle w, \pi(x)^{-1}v\right\rangle = 0.$$

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Η π λέγεται irreducible αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο H και ο $\{0\}$.

Ορισμός

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός $\pi_V(g)$ του $\pi(g)$ στον V, ορίζει ένα στοιχείο του $B(V)$. Η $g \to \pi_V(g)$ είναι μια απεικόνιση $G \to B(V)$ και λέγεται υποαναπαράσταση της π.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Η απεικόνιση $x \to (\pi_1 \oplus \pi_2)(x) : G \to B(H_1 \oplus H_2)$ που ορίζεται $(\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(v_1 + v_2) = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2$ λέγεται ευθύ άθροισμα των π_1, π_2.

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός π_V της π στον V και ο περιορισμός $\pi_{V^\perp}$ της π στον $V^\perp$ είναι υποαναπαραστάσεις της G, και $\pi = \pi_V \oplus \pi_{V^\perp}$.

Πρόταση

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Τότε η π είναι ευθύ άθροισμα από irreducible αναπαραστάσεις.

Ορισμός

$(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2)$ αναπαραστάσεις της G. Λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει $U : H_1 \to H_2$ ισομετρία επί, τέτοια ώστε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

$\forall x \in G$.

Η ισοδυναμία αναπαραστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός

$\hat{G}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των unitary irreducible αναπαραστάσεων της G.

Παραδείγματα

- Η τετριμμένη: G στον $\mathbb{C}$ με $\pi(x) = 1$ για κάθε $x \in G$.
- $L^2(G)$ ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \sum f(x)\overline{g(x)}.$$

Η αναπαράσταση λ που ορίζεται

$$\lambda(y)f(x) = f(y^{-1}x)$$

λέγεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.
Αν $e_x : G \to \mathbb{C}$ που ορίζεται $e_x(y) = 1$ αν $y = x$ και $e_x(y) = 0$ αν $y \neq x$ τότε $\lambda(y)e_x = e_{yx}$.

Παραδείγματα

- $\mathbb{Z}_2$ στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $\mathbb{Z}_4$ στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- D_4 στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

- $\mathbb{Z}_n$, ορίζουμε για $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$
  $\pi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$
  $$\pi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}}$$
- S πεπερασμένο σύνολο στο οποίο δρα η G. $\mathbb{C}(S)$ δ.χ. πάνω στο $\mathbb{C}$ με βάση $(e_s)_{s\in S}$. Ορίζουμε
  $$\left\langle \sum \lambda_s e_s, \sum \mu_s e_s \right\rangle = \sum \lambda_s \overline{\mu_s}.$$
  $$\pi(x) e_s = e_{xs}.$$

Παράδειγμα (ευθύ άθροισμα)

- $\mathbb{Z}_2$ στον $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
  $\pi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $H_1 = \{\lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον H_1: ορίζουμε $\pi_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $H_2 = \{\lambda(1,-1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον H_2: ορίζουμε $\pi_2(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Τότε

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2.$$

Παραδείγματα (ισοδυναμία)

- $H_1 = \{\lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον H_1: ορίζουμε $\pi_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $V_1 = \mathbb{C}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον $\mathbb{C}$: ορίζουμε $\rho_1(1) = 1$

Αν $A : V_1 \to H_1$

$$A\lambda = \lambda(1,1)$$

τότε

$$A\rho_1(x) = \pi_1(x)A$$

για κάθε $x \in \mathbb{Z}_2$ και

$$\rho_1 \sim \pi_1.$$

Παραδείγματα (ισοδυναμία)

- $H_2 = \{\lambda(1, -1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον H_2: ορίζουμε $\pi_2(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $V_1 = \mathbb{C}$
  $\mathbb{Z}_2$ στον $\mathbb{C}$: ορίζουμε $\rho_1(1) = -1$

Αν $B : V_2 \to H_2$

$$B\lambda = \lambda(1, -1)$$

τότε $B\rho_2(x) = \pi_2(x)B$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}_2$ και

$$\rho_2 \sim \pi_2.$$

Προβλήματα Θεωρίας Αναπαραστάσεων

1. Να υπολογιστεί το $\hat{G}$.
2. Να μελετηθεί η λ.
3. Για $f \in L^1(G)$ να βρεθεί η f απο τα $\pi(f)$.

όπου αν
(π, H) αναπαράσταση της G, $f \in L^1(G)$.

$$\pi(f) = \sum_{x \in G} f(x)\pi(x)$$

Schur

Πρόταση

G ομάδα, (π_1, H_1), (π_2, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G, και $A \in B(H_1, H_2)$ τ.ω.

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A$$

για κάθε $x \in G$. Τότε

1. *Αν οι π_1, π_2 δεν είναι ισοδύναμες, $A = 0$.*
2. *Αν $\pi_1 = \pi_2$, $A = \lambda I$.*

Απόδειξη Αν π irreducible και $A\pi(x) = \pi(x)A$ για κάθε $x \in G$, τότε αν λ είναι ιδιοτιμή του A, ο χώρος των ιδιοδιανυσμάτων για την λ είναι αναλλοίωτος, άρα ίσος με H. 'Αρα $A = \lambda I$.

Έστω A τ.ω.

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A$$

για κάθε $x \in G$. Τότε

$$A^*A\pi_1(x) = \pi_1(x)A^*A$$

και άρα $A^*A = \lambda I$. 'Ομοια $AA^* = \mu$. 'Αρα $\lambda = \mu$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε ο $U = cA$ οπου $c = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ είναι ισομετρία επί και ικανοποιεί

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U.$$

Αρα οι π_1, π_2 είναι ισοδύναμες. $\square$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.:

1. $A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ *για κάθε* $x \in G$, *τότε* $A = \lambda I$.
2. π *irreducible.*

Απόδειξη Αν π οχι irreducible η προβολή σε έναν αναλλοίωτο υπόχωρο ικανοποιεί $A\pi(x) = \pi(x)A$. $\square$

Πρόταση

G αβελιανή ομάδα, (π, H) irreducible αναπαράσταση της G. Τότε $\dim H = 1$.

Πρόταση

G ομάδα, (π, H_1), (ρ, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G. Τότε

1. *Αν οι π, ρ δεν είναι ισοδύναμες,*

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

2. $$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{kl}(x^{-1}) = \delta_{il}\delta_{kj}|G|/d_\pi$$

όπου d_π είναι η διάσταση του χώρου της αναπαράστασης π.

χαρακτήρες

Ορισμός

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Λέμε χαρακτήρα της π την συνάρτηση $\chi_\pi : G \longrightarrow$, που ορίζεται

$$\chi(x) = \operatorname{tr} \pi(x)$$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G.

1. $\chi_\pi(e) = d_\pi$
2. $\chi_\pi(x^{-1}) = \overline{\chi_\pi(x)}$
3. $\chi_\pi(yxy^{-1}) = \chi_\pi(x)$
4. *Αν οι π και οι ρ είναι ισοδύναμες, $\chi_\pi(x) = \chi_\rho(x)$.*

Ορίζουμε το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(G)$:

$$(f|g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Πρόταση

G ομάδα, π, ρ unitary irreducible αναπαραστάσεις της G.

1. *Αν οι π και ρ δεν είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 0$.*
2. *Αν οι π και ρ είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 1$.*

Πόρισμα

G ομάδα, ρ unitary αναπαράσταση. Τότε η ρ είναι irreducible αν και μόνον αν $(\chi_\rho|\chi_\rho) = 1$.

Πόρισμα

G έχει πεπερασμένο πλήθος unitary irreducible αναπαράστάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. Επιπλέον

$$|G| = d_{\pi_1}^2 + d_{\pi_2}^2 + \ldots + d_{\pi_k}^2$$

Ποιό είναι το k;

Θεώρημα

$|\hat{G}| = |S|$, όπου S το σύνολο των κλάσεων συζυγίας της G.

Πόρισμα

G αβελιανή, $|\hat{G}| = |G|$.

Παραδείγματα

- D_4

$$\pi_0(a) = \pi_0(b) = 1$$

$$\pi_1(a) = -1, \pi_1(b) = 1$$

$$\pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1$$

$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = -1$$

$$\pi_4(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

D_4	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
e	1	1	1	1	2
b	1	1	-1	-1	0
b^2	1	1	1	1	-2
b^3	1	1	-1	-1	0
a	1	-1	1	-1	0
ba	1	-1	-1	1	0
b^2a	1	-1	1	-1	0
b^3a	1	-1	-1	1	0

Παραδείγματα

- S_3

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$K_1 = \{e\}$$

$$K_2 = \{(12), (13), (23)\}$$

$$K_3 = \{(123), (132)\}$$

$$\pi_1(\sigma) = 1$$

$$\pi_2(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

Παραδείγματα

Η S_n δρά στον $\mathbb{C}^3$ με την permutation representation π. Ο

$$\{\lambda(1,1,1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

είναι αναλλοίωτος. Άρα και ο

$$V = \{(1,1,1)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x+y+z=0\}$$

είναι αναλλοίωτος.

$$\pi_3 = \pi_V$$

Βάση του V

$$\{e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$$

Παραδείγματα

$$\pi_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3(13) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3(123) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_3(132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_3(e) = 2, \ \chi_3(12) = 0, \ \chi_3(23) = 0$$

$$\chi_3(13) = 0, \ \chi_3(123) = -1, \ \chi_3(132) = -1.$$

Παραδείγματα

$$(\chi_3|\chi_3) = \frac{1}{|S_n|}\sum_{x\in G}\chi_3(x)\overline{\chi_3(x)}$$

$$= \frac{1}{|S_n|}\sum \chi_3(x)^2 = \frac{1}{|S_n|}\left(\chi_3(e)^2 + \chi_3(123)^2 + \chi_3(132)^2\right) =$$

$$\frac{1}{6}\left(2^2 + 1^2 + 1^2\right) = 1$$

Άρα η π_3 είναι irreducible.

$$\pi_1 : \quad \text{trivial}$$

$$\pi_2 : \quad \text{alternating}$$

$$\pi_3 : \quad \text{standard}$$

Παραδείγματα

S_3	χ_1	χ_2	χ_3
e	1	1	2
(12)	1	-1	0
(13)	1	-1	0
(23)	1	-1	0
(123)	1	1	-1
(132)	1	1	-1

young tableaux

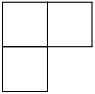
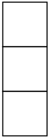
partition του n

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_l$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_l = n$$

Young diagram, $n = 3$

-  $\longleftrightarrow$ trivial representation,
-  $\longleftrightarrow$ standard representation,
-  $\longleftrightarrow$ alternating representation.

Young tableau, $n = 3$, $\lambda = (2, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$\lambda = (3)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 2 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$\lambda = (1, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$$

Δύο Young tableaux λέγονται ισοδύναμα αν έχουν τους ίδιους αριθμούς σε κάθε γραμμή.
Η κλάση ισοδυναμίας ενός Young tableau λέγεται Young tabloid

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}\;, t_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}\;, t_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$t_1 \sim t_2, t_1 \nsim t_3$$

Η S_n δρά στα Young tabloids.
Αν λ είναι partition συμβολίζουμε

$$M^\lambda$$

τον διανυσματικό χώρο που έχει για βάση τα Young tabloids, εφοδιασμένο με την επαγόμενη δράση της S_n.
Ο M^λ λέγεται permutation module που αντιστοιχεί στην partition λ.

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_l!}$$

Αν $\lambda = (n)$ ο M^λ έχει διάσταση 1 και η αναπαράσταση της S_n που αντιστοιχεί είναι η τετριμμένη.
Αν $\lambda = (1, 1, ..., 1)$ ο M^λ έχει διάσταση $n!$ και η αναπαράσταση της S_n που αντιστοιχεί είναι η left regular.
Αν $\lambda = (n-1, 1)$ ο M^λ έχει διάσταση n και η αναπαράσταση της S_n που αντιστοιχεί είναι η defining.

Αν t είναι ένα Young tableau η column group C_t του t είναι η υποομάδα της S_n που διατηρεί τα στοιχεία κάθε στήλης.
Αν t είναι ένα Young tableau το αντίστοιχο Young polytabloid είναι

$$e_t = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}$$

Παράδειγμα

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$C_t = S_{\{4,3\}} \times S_{\{1,5\}} \times S_{\{2\}}$$

$$e_t = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 1 & \\ \cline{1-2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & \\ \cline{1-2} \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_3 - e_1$$

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_3 - e_2$$

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_2 - e_1$$

Παράδειγμα

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_2 - e_3$$

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_1 - e_2$$

$$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad e_t = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = e_1 - e_3$$

Πρόταση

$$\pi e_t = e_{\pi(t)}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
e_{\pi(t)} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi(t)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi(t)\} \\
&= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi(t)\} \\
&= \sum_{\sigma' \in C_t} \operatorname{sgn}(\pi\sigma'\pi^{-1})\pi\sigma'\pi^{-1}\{\pi(t)\} \\
&= \pi \sum_{\sigma' \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma')\sigma'\{t\} = \pi e_t
\end{aligned}$$

Αν λ είναι partition συμβολίζουμε S^λ τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα Young polytabloids, όπου t Young tableau που αντιστοιχεί στην partition, εφοδιασμένο με την επαγόμενη δράση της S_n.
Ο χώρος S^λ λέγεται Specht module.

Θεώρημα

Η δράση της S_n είναι μια irreducible αναπαράσταση της S_n και κάθε irreducible αναπαράσταση της S_n είναι αυτής της μορφής για ένα μοναδικό Young diagram.

$$\dim S^{\lambda} = \frac{n!}{\prod_{u \in \lambda} h(u)}$$

όπου h είναι η hook length συνάρτηση.

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \dim S^{\lambda} = \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\lambda = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \dim S^{\lambda} = \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \dim S^{\lambda} = \frac{6}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 2$$

$$\lambda = \begin{array}{ccccc} 9 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & \\ 6 & 4 & 2 & 1 & \\ 3 & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

$$\dim S^{\lambda} = \frac{16!}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} =$$

$$= \frac{20922789888000}{38102400} = 549120.$$

$$S^{\lambda} = \ydiagram{3,1}$$

$$\mathrm{ind} S^{\lambda} = \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{3,2} \oplus \ydiagram{3,1,1}$$

$$\mathrm{Res} S^{\lambda} = \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{3}$$