ΠΡΟΤΑΣΗ 4:

$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s., $\mu(X)=1$.

(1) Αν σύστημα εργοδικό τότε: $f = f\circ T$ μ-σ.π., f μετρήσιμη $\Rightarrow$ $f = ct$ μ-σ.π.

(2) Αν $f \in L^\infty$ κ' $f\circ T = f \Rightarrow f =$ σταθερά σ.π., τότε σύστημα εργοδικό.

Απόδειξη:

(1) Έστω ότι $f = f\circ T$ σ.π., f μετρήσιμη.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ κ' $A = \{x \in X : f(x) > a\}$.

Τότε $A \triangle T^{-1}A \subseteq \{x \in X : f\circ T(x) \neq f(x)\}$ κ' άρα $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$.

Άρα $\mu(\{f > a\}) \in \{0, 1\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Αν $c = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{f > a\}) = 0\}$, τότε $f = c$ σ.π.

(2) Έστω $A \in \mathcal{B}$ με $A = T^{-1}A$. Τότε $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ T$ κ' άρα $\mathbb{1}_A = 0$ μ-σ.π. ή $\mathbb{1}_A = 1$ μ-σ.π. Άρα $\mu(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Από το (2) έπεται ότι, για $p \geq 1$

$(2)_p$: Αν $f \in L^p$ κ' $f\circ T = f \Rightarrow f =$ σταθερά σ.π., τότε σύστημα εργοδικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(1.) Στροφές του κύκλου: $T(x) = x+\alpha \pmod 1$, $x\in[0,1)$ ή $T(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, $z\in S^1$.

Η T είναι εργοδική ανν $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

Απόδειξη: Έστω πρώτα ότι $\alpha\in\mathbb{Q}$ κ' έστω $\alpha = m/n$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $(m,n)=1$.

Η συνάρτηση $f(x) = \exp(2\pi i[x + T(x) + \dots + T^{n-1}(x)])$ είναι T-αναλλοίωτη:

$$f(T(x)) = \exp(2\pi i[T(x) + T^2(x) + \dots + T^{n-1}(x) + T^n(x)]) =$$
$$= \exp(2\pi i[T(x) + T^2(x) + \dots + T^{n-1}(x) + x + n\alpha])$$
$$= f(x).$$

Αλλά δεν είναι σταθερή:

$$f(x) = \exp(2\pi i[x + x+\alpha + \dots + x+(n-1)\alpha]) = \exp(2\pi i(nx + \tfrac{n(n-1)}{2}\alpha)) =$$
$$= \exp(2\pi i \tfrac{m(n-1)}{2})\exp(2\pi i n x). \qquad (\exp(2\pi i n \tfrac{1}{n}) = 1,\ \exp(2\pi i n\tfrac{1}{2n}) = -1)$$

Αντίστροφα έστω ότι $\alpha\notin\mathbb{Q}$. Έστω $f\in L^2$ με $f\circ T = f$.

$$f\in L^2 \implies f \overset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(k)\, e_k$$

όπου $e_k(x) = \exp(2\pi i k x)$ κ' $\hat f(k) = \langle f, e_k\rangle = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i k x}\,dx$.

Τότε
$$\widehat{f\circ T}(k) = \int_0^1 f(T(x))\, e^{-2\pi i k x}\,dx =$$
$$= \int_0^1 f(x+\alpha)\, e^{-2\pi i k x}\,dx \qquad (\text{επεκτείνω } f \text{ περιοδικά: } f(x+k) = f(x)\ \forall k\in\mathbb{Z}\ \forall x\in[0,1)$$
$$= e^{2\pi i k\alpha}\hat f(k)$$

$f\circ T \overset{L^2}{=} f$ σημαίνει ότι $\widehat{f\circ T}(k) = \hat f(k)\quad \forall k\in\mathbb{Z}$

$$\iff \hat f(k)\,(e^{2\pi i k\alpha} - 1) = 0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή $\alpha\notin\mathbb{Q}$, $e^{2\pi i k\alpha}\neq 1$ $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ κ' άρα $\hat f(k) = 0$ $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Αυτό σημαίνει ότι $f = \hat f(0)$ στον L^2 κ' άρα μ-σ.π., δηλ. f σταθερά σ.π.

Παρένθεση: Αν G τοπικά συμπαγής ομάδα κ' H κλειστή υπο-ομάδα έστω $\pi: G\to G/H$ η προβολή $\pi(g) = gH$. Η τοπολογία που επάγεται στο G/H είναι μικρότερη τοπολογία που κάνει την π συνεχή. $A\subseteq G/H$ ανοικτό ανν $\pi^{-1}(A)$ ανοικτό στην G. Η τοπολογία αυτή (τοπολογία πηλίκο) είναι τοπικά συμπαγής κ' αν $H \trianglelefteq G$ τότε G/H είναι τοπολογική ομάδα.

G τοπολογική ομάδα.

Χαρακτήρες: $\gamma: G \to S^1$ συνεχείς ομομορφισμοί: $\gamma(xy)=\gamma(x)\gamma(y)$

Για τοπ. συμπ. αβελ. ομάδες, $\hat{G} = \{$χαρακτήρες της $G\}$ είναι τοπικά συμπαγής αβελιανή ομάδα

→ Για συμπαγείς αβελιανές ομάδες οι χαρακτήρες αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(Haar)$.

Άρα για $f\in L^2$ $\quad f \stackrel{L^2}{=} \sum_{\gamma\in\hat{G}} \langle f,\gamma\rangle \gamma \quad , \quad \langle f,g\rangle = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx$.

Π.χ. $G=\mathbb{R}$, χαρακτήρες: εκθετικά $e_\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $e_\xi(x)=e^{2\pi i\xi x}$, $\xi\in\mathbb{R}$

Δηλ. $\hat{G}\simeq \mathbb{R}$

$G=\mathbb{R}^n$, χαρακτήρες: $e_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(x_1,\dots,x_n)=\exp(2\pi i\sum_{i=1}^n x_i\xi_i)$, $(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

Δηλ. $\hat{G}\cong\mathbb{R}^n$

$G=\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\mathbb{T}=S^1$, χαρακτήρες: $e_k(x)=e^{2\pi i kx}$, $x\in[0,1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Δηλ. $\hat{G}\cong \mathbb{Z}$

$G=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n=\mathbb{T}^n$ χαρακτήρες: $e_{\underline{k}}(\underline{x})=e^{2\pi i\langle \underline{k},\underline{x}\rangle}$, $k\in\mathbb{Z}^n$, $x\in[0,1)^n$

Δηλ. $\hat{G}\simeq\mathbb{Z}^n$.

(2) Γενικές στροφές συμπαγών ομάδων

G συμπαγής ομάδα, $\mathcal{B}=Borel(G)$, $\lambda=Haar(G)$

$T(x)=gx$, $x\in G$ (όπου $g\in G$).

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) T εργοδική

(ii) $\overline{\{g^n: n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=G=\overline{\{g^n:n\in\mathbb{Z}\}}$

(iii) G αβελιανή κ' $\gamma\in\hat{G}$, $\gamma(g)=1\Rightarrow\gamma\equiv1$

Παρατήρηση: Το (i)⇒(ii) δείχνει ότι μόνο σε αβελιανή ομάδα μπορεί να υπάρχει εργοδική "στροφή".

Απόδειξη: Έστω $g\in G$ κ' $T:G\to G$ η απεικόνιση $T(x)=gx$, $x\in G$

(i)⇒(ii) Έστω ότι T εργοδική. Θέτω $H:=\overline{\{g^n: n\in\mathbb{Z}\}}$ κ' έστω ότι $x\in G\setminus H\neq\emptyset$

Το $G\setminus H$ ανοικτό ⇒ υπάρχει περιοχή U του $1\in G$, ανοικτή, τ.ω. $xU\cap H=\emptyset$

Υπάρχει ανοικτή περιοχή V του $1\in G$, τ.ω., $V=V^{-1}$ κ' $V\cdot V\subseteq U$. Τότε

$xV\cap T^{-n}V=\emptyset$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Πράγματι: $y\in xV\cap T^{-n}V \Rightarrow x^{-1}y\in V$ κ' $a^n y\in V \Rightarrow x^{-1}y\in V$ κ' $y^{-1}a^{-n}\in V^{-1}=V$

$\Rightarrow x^{-1}a^{-n}\in U\Rightarrow a^{-n}\in xU$ άτοπο

Αυτό όμως αντικειται στην εργοδικότητα του T από Πρόταση 3 (iv).

(iii) Έστω $\gamma\in\hat{G}$ με $\gamma(g)=1$. Τότε $\gamma(g^n)=1$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ κ' από πυκνότητα κ' συνέχεια $\gamma\equiv1$.

(iii)⇒(i) Έστω $f\in L^2(G)$ με $f\stackrel{L^2}{=}f\circ T$

$\hat{f}(\gamma)=\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx$. $\qquad \widehat{f\circ T}(\gamma)=\int_G f(gx)\overline{\gamma(x)}\,dx=\int_G f(gx)\overline{\gamma(gx)}\,dx\,\gamma(g)=\gamma(g)\hat{f}(\gamma)$.

Πρέπει $\hat{f}(\gamma)[\gamma(g)-1]=0$ $\forall\gamma\in\hat{G}$. Έπεται $\hat{f}(\gamma)=0$ $\forall\gamma\in\hat{G}\setminus\{1\}$ κ' άρα

$f=\hat{f}(1)$ $\quad f=\hat{f}(1)=$ σταθερά σ.π. □

Παρατήρηση: Αν $\gamma(g)=1$ για κάποιο $\gamma\not\equiv1$, η συνάρτηση $x\mapsto\gamma(x)$ είναι στον L^2