(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$A, B \in \mathcal{B}$ $\mu(A)\mu(B) > 0$

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}B) = 1$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}B \cap A) = \mu(A)$

Αν $\mu(T^{-n}B \cap A) = 0 \ \forall n$ τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}B \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = 0$

Άτοπο.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $A \in \mathcal{B}$ τ.ω. $A = T^{-1}A$, $\mu(A) \in (0,1)$. Άρα και $\mu(A^c) > 0$

Για κάποιο n $\mu(\underbrace{T^{-n}A}_{A} \cap A^c) > 0 \Rightarrow \mu(A \cap A^c) > 0$. Άτοπο

14/11/2014

$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s.

i) T εργοδικός

ii) $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0 \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$

iii) $\forall A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$

iv) $\forall A, B \in \mathcal{B}$ $\mu(A)\mu(B) > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(A \cap T^{-n}B) > 0$

- Αν T εργοδικός, $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$ τότε $\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}A) = 1$

  Απόδ

  $\mu(\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}A) = \mu(T^{-n}\bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}A) = \mu(\bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}A) = 1$

  $\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}A) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}A) = 1$

- Αν T εργοδικό τότε:

  $A \in \mathcal{B}$, $T^{-1}A \subseteq A \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$

  Απόδ

  $T^{-n}A \subseteq A \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(A) \in (0,1) \Rightarrow \mu(A^c) > 0$

  $\mu(A^c \cap T^{-n}A) > 0$ από Πρόταση. Άτοπο ($T^{-n}A \subseteq A$)

  (Μάλιστα αρκεί $\mu(A \setminus T^{-1}A) = 0$)

  ↳ Δηλαδή $T^{-1}A \subseteq A$ σχεδόν παντού

Πόρισμα

Αν T εργοδικός, $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$. Αν $TA \subseteq A \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$

(Δεν υποθέτουμε ότι TA μετρήσιμ

Απόδειξη

$TA\subseteq A \Rightarrow T^{-1}(A^c)\subseteq A^c$. Αν $\mu(A)\in(0,1) \Rightarrow \mu(A^c)\in(0,1)$

άτοπο από προηγούμενο.

Πρόταση 4:

$(X,\mathcal{B},\mu,T)$ m.p.s., $\mu(X)=1$

(i) Αν T εργοδικός τότε αν $f=f\circ T$ μ-σ.π., f μετρήσιμη $\Rightarrow f=$σταθερή μ-σ.π.

(ii) Αν $f\in L^\infty$, $f=f\circ T$ σ.π. $\Rightarrow f=$σταθερή μ-σ.π. τότε T εργοδικός.

Παρατήρηση: Στο (ii) μπορώ να αντικαταστήσω L^∞ με L^p όπου $p\geq 1$. (αφού $L^\infty\subseteq L^p$)

Απόδ

(i) f μετρήσιμη $f=f\circ T$ μ-σ.π.

$F_a:=\{x\in X: f(x)>a\}=f^{-1}(a,+\infty)$

$T^{-1}(F_a)=\{x\in X: f(T(x))>a\}$

$F_a\,\Delta\, T^{-1}(F_a)\subseteq\{x\in X: f(x)\neq f(T(x))\}$

Άρα $\mu(F_a\,\Delta\, T^{-1}(F_a))=0 \Rightarrow \mu(F_a)\in\{0,1\}$

$c=\inf\{a:\mu(F_a)=0\}$

$\mu(\{x\in X: f(x)>c\})=\lim_{a\downarrow c}\mu(\{x\in X: f(x)>a\})=0$

$\mu(\{x\in X: f(x)\geq c\})=\lim_{a\uparrow c}\mu(\{x\in X: f(x)>a\})=1$

$\quad =1\ (a<c)$

Άρα $\mu\{x\in X: f(x)=c\}=1$

ii) Έστω $A\in\mathcal{B}$ τ.ω. $T^{-1}A=A$, $f=\mathbb{1}_A$ $f\circ T=\mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$

Άρα $f=f\circ T$. Άρα $f=$σταθ. σ.π.

Άρα ή $f=1$ μ-σ.π. οπότε $\mu(A)=1$ ή $f=0$ μ-σ.π. οπότε $\mu(A)=0$

Παραδείγματα

(1) $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 \cong [0,1)$

$T_\alpha x = x+\alpha \pmod 1 = x+\alpha - [x+\alpha]$

$\left(T_\alpha z = e^{2\pi i \alpha} z \right)$

Ισχυρισμός : T_α εργοδική ανν $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Αν $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$

$f : [0,1) \to \mathbb{C}$, επεκτείνω : $f(x+k) = f(x)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x \in [0,1)$

Έστω $\alpha = \frac{m}{n}$. Ορίζω $f(x) = \exp(2\pi i [x + T(x) + \ldots + T^{n-1}(x)])$

$\exp(2\pi i T(x)) = \exp(2\pi i (x+\alpha))$

$\exp(2\pi i T^2(x)) = \exp(2\pi i (x+2\alpha))$

$f \circ T(x) = \exp(2\pi i [T(x) + T^2(x) + \ldots + T^{n-1}(x)]) \cdot \exp(2\pi i T^n(x))$

$= \exp(\ldots) \cdot \exp(2\pi i (x+n\alpha)) = \cancel{\exp(2\pi i (x+m))}$

$= \exp(\ldots) \exp(2\pi i (x+m)) = \exp(\ldots) \exp(2\pi i x) = f(x)$

$f(x) = \exp(2\pi i (nx + \frac{n(n-1)}{2} \frac{m}{n})) = \exp(\pi i (n-1) m) \exp(2\pi i n x)$

$f(\frac{1}{n}) = 1$, $f(\frac{1}{2n}) = -1$

Άρα f όχι σταθερή.

Έστω $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Θα δείξουμε ότι T_α εργοδική.

Έστω $f \in L^2$ τ.ω. $f = f \circ T$

$e_k(x) = \exp(2\pi i k x)$, $x \in [0,1)$, $k \in \mathbb{Z}$

$f \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$, $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$

(Fourier)

$\widehat{f \circ T}(k) = \int_0^1 f(x+\alpha) e^{-2\pi i k (x+\alpha)} dx \, e^{2\pi i k \alpha} =$

$= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx \, e^{2\pi i k \alpha} = \hat{f}(k) e^{2\pi i k \alpha}$

Πρέπει $\hat{f}(k) = \hat{f}(k) e^{2\pi i k \alpha}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\hat{f}(k)(1 - e^{2\pi i k \alpha}) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Άρα $\hat{f}(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $(\alpha \notin \mathbb{Q})$

$f \overset{a}{=} \hat{f}(0)$ άρα $f =$ σταθερή σ.π. T εργοδικός

(2) G συμπαγής, $\alpha \in G$ $\underline{T(x)=\alpha\cdot x}$ $x\in G$

(i) T εργοδικός ανν (ii) $\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\} = G$ ανν (iii) G αβελιανή κ' χ χαρακτήρας κ' $\chi(\alpha)=1 \Longrightarrow \chi\equiv 1$

<u>Χαρακτήρες</u>

G αβελιανή κ' τοπικά συμπαγής

Χαρακτήρας : $\chi : G \to \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$

χ ομομορφισμός ομάδων και συνεχής

<u>π.χ</u> $G=\mathbb{T}$ $\chi(x)=\exp(2\pi i k x)$, $k\in\mathbb{Z}$

$G=\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$: $\chi(x)=\exp(2\pi i\, \overset{\text{ρ πίνακας γραμμή}}{\underset{\sim}{k}^{*}}\cdot \underset{\sim}{x})$ $\underset{\sim}{k}\in\mathbb{Z}^n$

$G=\mathbb{R}$ $\chi(x)=\exp(2\pi i \xi x)$ $\xi\in\mathbb{R}$

$G=\mathbb{R}^n$ $\chi(x)=\exp(2\pi i \underset{\sim}{\xi}^{*}\cdot\underset{\sim}{x})$ $\xi^n\in\mathbb{R}^n$

G αβελιανή συμπαγής, $\hat{G}=\{$χαρακτήρες$\}$

Οι χαρακτήρες είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$

$f\in L^2$ $f \overset{L^2}{=} \sum_{\chi\in\hat{G}} \underbrace{\langle f,\chi\rangle}_{\hat{f}(\chi)}\cdot\chi$

$\hat{f}(\chi)=\int f(x)\overline{\chi(x)}\,dx$

(i) T εργοδικός $H=\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}\subsetneq G$

$x\in G\setminus H$ Έστω U ανοικτή περιοχή του $1\in G$ τ.ω. $xU\cap H=\varphi$

$\exists\, V$ ανοικτή του $1\in G$ $V^{-1}=V$ τ.ω. $VV\subseteq U$

$V^{-1}=\{x^{-1} : x\in V\}$ $VV=\{x\cdot y : x\in V, y\in V\}$

<u>Ισχυρίζομαι</u>

$\underline{x\cdot V\cap T^{-k}V=\varphi}$;

$y\in xV\cap\alpha^{-k}V \Rightarrow x^{-1}y\in V$ $\alpha^k y\in V$

$y^{-1}\alpha^{-k}\in V$ $(V^{-1}=V)$

$x^{-1}\alpha^{-k}\in U$ $(V\cdot V\subseteq U)$ $\Rightarrow \alpha^{-k}\in xU$

~~Άρα~~

$\mu(\underset{xV}{A}\cap T^{-k}V)=0$ $\forall k$ αντίκειται στην εργοδικότητα του T.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$\gamma(a)=1 \Rightarrow \gamma(a^n)=\gamma(a)^n=1 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

Λόγω πυκνότητας του $\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ και συνέχειας της γ έπεται $\gamma\equiv 1$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$f \overset{L^2}{=} f\circ T, \quad f\in L^2(G)$

$f \overset{L^2}{=} \sum_{\gamma\in\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\cdot\gamma$

$\widehat{f\circ T}(\gamma) = \int f(ax)\overline{\gamma(x)}\,dx = \int f(ax)\cdot\overline{\gamma(ax)}\,dx\cdot\gamma(a) =$

$= \int f(Tx)\overline{\gamma(Tx)}\,dx =$
$= \int f(x)\overline{\gamma(x)}\,dT_*\lambda(x)\;\gamma(a) =$
$= \int f(x)\overline{\gamma(x)}\,d\lambda(x)\;\gamma(a) =$
$= \hat{f}(\gamma)\,\gamma(a)$

$\overline{\gamma(a^{-1}ax)} = \overline{\gamma(a^{-1})\gamma(ax)} = \overline{\gamma(a)^{-1}}\cdot\overline{\gamma(ax)} = \gamma(a)\,\overline{\gamma(ax)}$

$f\circ T \overset{L^2}{=} f \iff \hat{f}(\gamma)=\hat{f}(\gamma)\gamma(a) \quad \forall\gamma\in\hat{G}$

$\iff \hat{f}(\gamma)(\gamma(a)-1)=0 \quad \forall\gamma\in\hat{G}$

Από υπόθεση $\gamma(a)\neq 1 \;\forall\gamma\neq 1$ άρα $\hat{f}(\gamma)=0 \;\forall\gamma\neq 1$

άρα $f=\hat{f}(1)=$ σταθ. σ.π.

Άρα T εργοδικός

Γ Ισχύει $\exists I_\varepsilon\subseteq\hat{G}$ πεπερασμένο τ.ω. $\left\|\sum_{\gamma\in J}\hat{f}(\gamma)\gamma - f\right\|_2<\varepsilon$ $\forall J$ πεπ. $J\supseteq I_\varepsilon$.

Συνεπώς το πλήθος των $\gamma\in\hat{G}$ με $\hat{f}(\gamma)\neq 0$ είναι αριθμήσιμο και συνεπώς ορίζεται το $\sum_{\gamma\in\hat{G}}\hat{f}(\gamma)\cdot\gamma$ ┘