Καλημέρα.

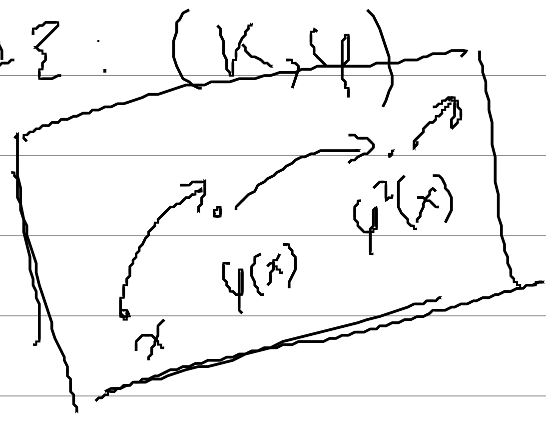
Σήμερα είναι Παρασκευή, 27 Φεβρουαρίου.

1. Εισαγωγή

DS

K : συμπ. (τοπ.) (μετρικ.)
$\varphi : K \to K$ συνεχής

ΔΣ: (K, φ)



αντιστρέψιμο: φ ομοιομορφ.

$A = C(K)$: C^*-αλγ.

$\alpha : A \to A$
$\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$

$\alpha_\varphi \in Aut(A)$

[C^*-DS: (A, α) A: C^*-alg
$\alpha : A \to A$ αυτομορφ.]

Παρ: (i) $\alpha_\varphi(A) \subseteq A$
$\Uparrow$
φ συνεχής

(ii) Αν $\beta : A \to A$
ομομορφ. της A
με $\beta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
τότε
$\exists\, \varphi : K \to K$ συνεχής
ώστε
$\beta = \alpha_\varphi$

MPS

$(\underbrace{\Omega, \mathcal{S}, \mu}_{\mu(\Omega)=1}, \varphi)$, $\varphi : \Omega \to \Omega$ μετρήσιμη

και $\varphi_* \mu = \mu$ $(\varphi_*\mu(B) = \mu(\varphi^{-1}B)$, $B \in \mathcal{S})$

ή

$\to$ $\varphi_* \mu \sim \mu$

($\forall (K, \varphi)$ κ μετρ. ομοιομ.
$\exists$ αναλλοίωτο κανονικό
μέτρο Borel)

Αν $\mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$
δηλ. $\forall B \in \mathcal{S}$
$\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(\varphi^{-1}(B)) = 0$
τότε: η α_φ όπου
$\alpha_\varphi(f) \doteq f \circ \varphi$
στέλνει κλάσεις
συναρτ. σε κλάσεις
(ν) $f = g$ μ-σ.π. $\Rightarrow$

$\alpha_\varphi(f) = \alpha_\varphi(g)$ μ-σ.π.

Οπότε επάγει
$\alpha_\varphi : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^\infty(\Omega, \mu)$

$\alpha_\varphi \in Aut(L^\infty(\Omega, \mu))$
vN algebra

Έστω φ αντιστρέψιμος.
Τότε έχουμε:
$(A, \alpha_\varphi, \mathbb{Z})$ $\alpha_n = \overbrace{\alpha_\varphi \circ \alpha_\varphi \circ \cdots \circ \alpha_\varphi}^{n}$

Γενίκευση:

Ορ: C^*-dynamical system: $(A, G, \alpha : G \to Aut(A))$ ισομετρία (αυτομάτως)
(discrete
$\alpha_t(a)$ $a \in A$, $t \in G$
ορόψε: $t.a$

W^*-dynam. syst: A = alg. vN
α : w^*-homeo.

2. Στόχος (A, G, α) ⇝ αναπαράσταση σε ένα χώρο Hilbert

2.1. G ⇝ groupalgebra : $\mathbb{C}G = (C_{00}(G), \underset{\uparrow \text{συνέλιξη}}{*})$

$C_{00}(G)$: συναρτ. $f : G \to \mathbb{C}$ με supp f πεπερ.

$$= [\delta_t : t \in G]$$

$$\delta_t * \delta_s := \delta_{ts} \qquad \delta_t^* := \delta_{t^{-1}}$$

δηλ. αν $f = \sum f(t)\delta_t$
$g = \sum g(s)\delta_s$

τότε $f * g = \sum_{s,t} f(t) g(s) \delta_{ts} \quad (r = ts)$

$$= \sum_r \Big(\sum_t f(t) g(t^{-1} r) \Big) \delta_r$$

άρα $(f*g)(r) = \sum_t f(t) g(t^{-1} r)$, $f^*(s) = \overline{f(s^{-1})}$

ορ $C^*(G)$ = η πλήρωση της $(C_{00}(G), *)$ ως προς

$$\|f\| = \sup\{ \|\pi(f)\| : \pi \text{ αναπαρ. σε χώρο Hilbert } H\}$$

όπου: $\pi(f) = \sum f(t) \pi(\delta_t)$ $\pi(\delta_t)$ = unitary (γιατί;)

$$\Rightarrow \|\pi(f)\| \le \sum |f(t)| = \|f\|_1 \quad \forall \pi$$

$$\Rightarrow \|f\| \le \|f\|_1$$

γιατί η $\|\ \|$ είναι νόρμα;

γιατί ∃ μια π που είναι 1-1 : είναι η left regular

$\pi_\lambda(f) = \sum f(t) \lambda_t$: δρα στον $\ell^2(G)$

με : $\lambda_t(\delta_s) = \delta_{ts}$, $s \in G$

ισοδύναμα: $(\lambda_t(h))(s) = h(t^{-1}s)$, $h \in \ell^2(G)$

$$\|\lambda_t h\|_2 = \|h\|_2$$

Ισχ: η π_λ είναι 1-1.

Αποδ: αν $\pi_\lambda(f) = 0$ τότε $\pi_\lambda(f)\delta_e = 0$

$$\Rightarrow \sum f(t) \lambda_t(\delta_e) = \sum f(t) \delta_t = 0$$

$$\Downarrow \quad f = 0 \quad \blacksquare$$

η πλήρωση της $(C_{00}(G), *)$ ως προς τη νόρμα $\|f\|_r = \|\pi_\lambda(f)\|$

ονομάζεται $C_r^*(G)$ (είναι ένα πηλίκο της $C^*(G)$)

ταυτίζονται όταν G είναι αβελιανή ή G συμπαγής
(γενικότερα G amenable)

όχι όμως όταν $G = \mathbb{F}_n$, $n \geq 2$

2.2. Συντελεστές από την A:

$\cancel{C_{00}(G)}$ (βαθμωτές από το $\mathbb{C}$)

$$AG = \{ f : G \to A \text{ με supp} f \text{ πεπερ.} \}$$

$$\| \quad C_{00}(G, A) = A \otimes C_{00}(G)$$

$$f = \sum \cancel{f(t)\delta_t} \overset{\text{γράφω}}{=} \sum_t f(t) \otimes \delta_t$$

$f(t) \in A$

Επιχειρώ να ορίσω:

δομή $*$-αλγ στο $A \otimes C_{00}(G)$: κατά συντεταγμένη

$$(a \otimes \delta_t) * (b \otimes \delta_s) = ab \otimes \delta_{ts}$$

Αν (π, U) είναι αναπαράσταση του (A, G) στον H

$\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ $*$-αναπ

$U : G \to \mathcal{U}(H)$ unitary αναπ

μπορώ να ορίσω;

$$(\pi \times U) f = \sum \pi(f(t)) U_t \in \mathcal{B}(H)$$

$$(\pi \times U)(f * g) = \sum_{s,t} \pi(f(t)) \pi(g(s)) U_{ts}$$

$$(\pi \times U)(f) (\pi \times U)(g) = \sum_{s,t} \pi(f(t)) U_t \, \pi(g(s)) U_s$$

Πρέπει: $\forall a \in A, \forall t \in G \;\; \pi(a) U_t = U_t \pi(a)$

⇝ η σχέση αυτή αγνοεί την ύπαρξη δράσης της G στην άλγεβρα A.

2.3 Όταν $\exists$ δράση $\alpha_t : A \to A$ της G στη A:

συμβολίζω: $\alpha_t(a) = t\cdot a$

Θέλω στην αναπαράσταση (π, U) στον H να υλοποιείται (implement) η δράση α ως εξής:

$\rightsquigarrow$ $\pi(t\cdot a) = U_t\,\pi(a)\,U_{t^{-1}}$ $\quad \forall t\in G, \forall a\in A$ covariance condition

[παρ. $A = C_0(K)$, μ: αναλλοίωτο μέτρο, $H = L^2(K,\mu)$, $U_t f = f\circ t^{-1}$, $t\in G$, $f\in L^2(K,\mu)$
$\pi(a)\in B(H)$: $\pi(a)f = af$]

Πρέπει να αλλάξω τον ορισμό της πράξης $*$ στην $A \otimes C_{00}(G)$

ορίζω: $(a\otimes \delta_t) * (b\otimes \delta_s) = (a(t\cdot b))\otimes \delta_{ts}$

ισοδύναμα: αν $f = \sum f(t)\otimes \delta_t$, $g = \sum g(s)\otimes \delta_s$

ορίζω $(f*g)(r) = \sum_t f(t)\,(t\cdot g(t^{-1}r))$ (twisted convolution)

και: $f^*(s) = \cancel{(f(s^{-1}))^*} = s\cdot(f(s^{-1}))^*$

Ορίζω τώρα $(\pi\times U)f = \sum_t \pi(f(t))\,U_t \in B(H)$

↳ $*$-αναπαράσταση της $A\otimes C_{00}(G)$

Ορίζω crossed product $A\rtimes_\alpha G$ τη πλήρωση ↑
ως προς τη νόρμα

$\|f\| = \sup\{\|(\pi\times U)(f)\| : (\pi,U)$ covariant rep των (A,G) στον $H\}$

3. Ύπαρξη (πιστών) συναλλοίωτων αναπαρ.

Έστω τυχούσα αναπ. $\pi_0 : A \to B(H_0)$
(πιστή, αν θέλετε)

Θα ορίσω covariant αναπ (π, U) του (A, G, α)
στον χώρο $H_0 \otimes \ell^2(G)$

$L = \ell^2(G, H_0)$

δηλαδή:
$$H_0 \otimes \ell^2(G) = \{ \xi : G \to H_0 : \sum_{t \in G} \|\xi(t)\|^2_{H_0} < +\infty \}$$

παράγεται από: $\{ \xi \otimes \delta_t : \xi \in H_0,\ t \in G \}$

όπου
$$\xi \otimes \delta_t : G \to H_0 : \quad (\xi \otimes \delta_t)(s) = \begin{cases} \xi, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

Ορίζω: $\pi : A \to B(H)$:
$$\pi(a)(\xi \otimes \delta_t) = \pi_0(t^{-1} \cdot a)\xi \otimes \delta_t$$
$$\text{"} = \mathrm{diag}(\pi_0(t^{-1} \cdot a))_{t \in G} \text{"}$$

και $U : G \to \mathcal{U}(H)$
$$U_t(\xi \otimes \delta_s) = \xi \otimes \delta_{ts}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το (π, U) είναι covariant
και είναι 1-1 όταν η π_0 είναι 1-1.

η πλήρωση της $A \otimes C_{00}(G)$ ως προς την νόρμα
$$\|f\|_r = \|(\pi \times U)(f)\|$$
λέγεται reduced crossed product:
$$A \rtimes_r G$$

Αποδ ότι 1-1:
Αν $f = \sum f(t) \otimes \delta_t$ έχει $(\pi \times U)(f) = 0$ τότε:
$$0 = (\pi \times U)(f) = \sum \pi(f(t)) U_t$$
οπότε $(\pi \times U)(f)(\xi \otimes \delta_e) = 0$
$$\| \quad \sum \pi(f(t))(\xi \otimes \delta_t)$$
$$= \sum_t \pi_0(t^{-1} \cdot f(t))\xi \otimes \delta_t = 0$$
$$\Rightarrow \forall t,\ \pi_0(t^{-1} \cdot f(t))\xi = 0 \quad \forall \xi$$
(γιατί;)
$$\Rightarrow \forall t,\ \pi_0(t^{-1} \cdot f(t)) = 0$$
$$\xRightarrow{\pi_0\ 1-1} t^{-1} \cdot f(t) = 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow f = 0 \quad \blacksquare$$