Xed products: (A, G, α) ← ομάδα (ίσως αριθμ.)

C^*-dynamical system ; A: C^*-alg (ίσως με 1)

$$\alpha : G \to Aut(A)$$

$$\forall t \in G \quad \alpha_t : A \to A$$

A = alg vN $\forall \alpha_t$: normal
(w^*-w^* συνεχής)

(A, G, α): W^*-dynamical system

και ~~με~~

$(\pi, U; H)$; $\pi : A \to B(H)$ $*$-αναπ.
$U : G \to \mathcal{U}(H)$ αναπ.

να φτιάξω μια άλγεβρα τελεστών
στον H:
να "περιέχει" και την A και την G

έτσι ώστε implementation

$$\pi(\alpha_t(a)) = U_t \pi(a) U_t^{-1}$$

$$\forall t \in G, \ \forall a \in A$$

$$A \otimes C_{00}(G) = \{ f : G \to A \ \text{supp πεπ.} \}$$

$$f = \sum_t f(t) \otimes \delta_t \quad \text{γραμμικός χώρος}$$

$$\{ a \otimes \delta_t : a \in A, t \in G \}$$

$$\pi : A \longrightarrow B(H)$$
$$U : G \longrightarrow B(H) \quad \rightsquigarrow \quad \pi \times U$$

twisted convolution $\quad (a \otimes \delta_t) * (b \otimes \delta_s) = c \otimes \delta_{ts}$, $\quad c = a\alpha_t(b)$

$$(\pi(a) U_t)(\pi(b) U_s)$$

$$\pi(a)\, \pi(\alpha_t(b))\, U_t U_s$$
$$\|$$
$$\pi(a\alpha_t(b))\, U_{ts}$$

$(a \otimes \delta_t)^*$

$$(\pi(a) U_t)^* = U_t^* \pi(a^*) = U_{t^{-1}} \pi(a^*)$$
$$= \pi(\alpha_{t^{-1}}(a^*))\, U_{t^{-1}}$$

$$= \quad \alpha_{t^{-1}}(a^*) \otimes \delta_{t^{-1}} \quad \text{: involution}$$

$(\pi, U ; H)$ covariant : $\pi(\alpha_t(c)) = U_t \pi(c) U_t^*$

$\forall f \in A \otimes C_{00}(G)$:

$$\|f\| = \sup \Big\{ \|(\pi \times U)(f)\| \quad \underset{\text{covariant}}{\forall (\pi, U ; H)} \Big\}$$

$$(\pi \times U)\Big(\sum f(t) \otimes \delta_t\Big) := \sum \pi(f(t))\, U_t$$

$*$ - hom

$$\Big\| \qquad \Big\| \le \sum \|\pi(f(t))\|$$

$$\le \|f\|_1 < +\infty$$

- $\exists$ αναπαραστάσεις;
- $\exists$ αρκετές; (ώστε $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$;)

Η αριστερή κανονική είναι!

Έστω ότι η A δρα στον H_0 μέσω π

ορίζω $H = H_0 \otimes \ell^2(G) = \ell^2(G, H_0)$

$= \{ \xi : G \to H_0 : \sum_t \|\xi(t)\|^2_{H_0} < \infty \}$

παράγεται από $\{ x \otimes \delta_t : x \in H_0, t \in G \}$

δράσεις στη A, και στη G στον H

$a \in A$ $\quad \tilde{\pi}(b)(x \otimes \delta_t) = \pi(\alpha_{t^{-1}}(b))x \otimes \delta_t$

όταν $G = \mathbb{Z}$ $\quad H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_0$

$$\tilde{\pi}(c) = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \pi(\alpha(b)) & & 0 \\ & & \pi(b) & \\ & 0 & & \pi(\alpha^{-1}(b)) \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left(\pi(\alpha_t^{-1}(b))\right)$$

$\Lambda_s(x \otimes \delta_t) = \underline{x \otimes \delta_{st}}$ left regular

$(\tilde{\pi}, \Lambda_s)$: covariant

όπως ορίζουμε η $(\tilde{\pi} \times \Lambda)(f) = \sum \tilde{\pi}(f(t))\Lambda_t$

ελέγχεις ότι $\uparrow$ είναι 1-1

στον $A \otimes C_{00}(G)$

$\Rightarrow \| \quad \|$ είναι νόρμα στο $\uparrow$

Ορισμός crossed product $A \rtimes_\alpha G$

Είναι η πλήρωση της $A \odot C_{00}(G)$ ως προς την $\| \ \|$

Καθολική ιδιότητα: $\forall (\pi, U)$ covariant pair της A και της G στον H

$\exists$ αναπαράσταση $\pi \times U$ της $A \rtimes_\alpha G$

Ορίζω στην $A \odot C_{00}(G)$

$$\|f\|_2 = \sup\{\|(\tilde{\pi} \times \lambda)(f)\| : \pi \text{ αναπ. της } A\}$$

Είναι νόρμα γιατί είναι 1-1

$$\|f\|_2 \le \|f\|$$

Ορ. reduced crossed product: $A \rtimes_r G$

είναι η πλήρωση της $A \odot C_{00}(G)$ ως προς τη $\| \ \|_2$

Συμπίπτουν όταν G αβελιανή, συμπαγής

Όχι πάντα $G = \mathbb{F}_2$

<u>Παρδγ</u> $G = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{C}$, $\alpha = id$

$A_n = U^n$ όπου $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}$

$Ue_n = e_{n+1}$

$$A \otimes C_{00}(\mathbb{Z}) = C_{00}(\mathbb{Z})$$

$$\left(\sum f(n) e_n\right)\left(\sum g(m) e_m\right)$$

$$\| $$

$$\sum f(n+m) e_{n+m}$$

$$(\pi \times \Lambda)\left(\sum f(n) e_n\right)$$

$$= \sum f(n) U^n$$

$$A \times_\alpha \mathbb{Z} = C(\mathbb{T})$$

πολυώνυμα με τα $\sum_{n=-N}^{N} f(n) z^n$ στον $L^2(\mathbb{T})$

Συντελεστές Fourier $\quad A \otimes C_{00}(\mathbb{Z})$

$$f = \sum f(t) \otimes \delta_t \in \qquad f \text{ πεπερ. φορέα}$$

τα $f(t) \in A$ λέγονται t-συντελεστές Fourier της f

όμως, $\forall (\pi, U)$

$$\|\tilde{\pi}(\underbrace{f(t)}_{\in A})\| \leq \|(\tilde{\pi} \times U)(f)\| \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow \quad \|f(t)\|_A = \sup\{\|\tilde{\pi}(f(t))\| : \forall \tilde{\pi}\} \leq \|f\|$$

$\forall t \in G$

$$A \otimes C_{00}(G) \longrightarrow A$$
$$f \longmapsto f(t) \quad \text{είναι συνεχής}$$

άρα επεκτείνεται σε όλο!

$$E_t : A \times_\alpha G \longrightarrow A \quad \text{~~ΦΦ~~ απεικ. συστολή}$$

$$\left(E_n : f \longmapsto \hat{f}(n)\right)$$

Παρ. Αν $(\tilde{\pi} \times A)(f) = 0 \Rightarrow \forall E_t(f) = 0$

Επομένως, αν ισχύει ότι στην $A \times_\alpha G$

ότι: $E_t(f) = 0 \ \forall t \Rightarrow f = 0$

τότε $\tilde{\pi} \times A$ είναι 1-1 στην

και άρα $A \times_\alpha G = A \times_r G$

G: αβελιανή $\Gamma = \hat{G} = \{\gamma : G \to \mathbb{T}$ συνεχείς ομομορφισμοί$\}$

αβελ. συμπαγής, άρα έχει ένα αναλλοίωτο μέτρο

(gauge action) A_0,

$\forall \gamma \in \Gamma$, $\theta_\gamma : A \otimes C_{00}(G) \longrightarrow A \otimes C_{00}(G)$

$a \otimes \delta_t \longmapsto a \otimes \gamma(t)\delta_t$

επεκτείνω γραμμικά $\forall \gamma \in \Gamma$

Ισχ. θ_γ επεκτείνεται σε $*$-αυτομ. του $A \rtimes_\alpha G$

Αποδ. Προφανώς, θ_γ είναι $*$-μορφ. της A_0

άρα, $\forall\, \pi$ $*$-αναπ. της A_0,

$\pi \circ \theta_\gamma$ είναι $*$-αναπ. της A_0

άρα $\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\| \ \pi$: cov. αναπ.$\}$

$\|\pi(\theta_\gamma(f))\| \le \|f\|$ $\forall \pi$ cov. αναπ.

$\Downarrow$

$\sup \|\pi(\quad)\| \le \|f\|$

$\|$

$\|\theta_\gamma(f)\| \le \|f\|$ θ_γ: συστολή

$\theta_\gamma^{-1} = \theta_{\gamma^{-1}}$

άρα θ_γ ισομετρία επί

άρα θ_γ επεκτείνεται σε (ισομ.) $*$-αυτομ. της $A \rtimes_\alpha G$.

Παρ/ν $\quad \sum \hat f(n) z^n \rightsquigarrow \sum \hat f(n) e^{int} z^n$

$$\int \Big(\qquad \Big) dt$$

$$\hat f(n)$$

$$\varphi = \sum_t \varphi(t) \otimes d_t$$

$$\int_\Gamma \theta_\gamma(\varphi)\gamma(s^{-1})\,d\gamma = \sum_t \int_\Gamma \big(\varphi_t \otimes \gamma(s^{-1}t) d_t\big)\, d\gamma$$

$$\theta_\gamma(\varphi) = \sum \varphi(t) \otimes \gamma(t) d_t$$

$$= \sum_t \varphi(t) \otimes \underbrace{\Big(\int_\Gamma \gamma(s^{-1}t)\,d\gamma\Big)}_{=0 \text{ εκτός αν } s^{-1}t=1} d_t$$

$$\int \gamma(s^{-1}t)\,d\gamma = \begin{cases} 0, & s^{-1}t \neq 1 \\ 1, & s^{-1}t = 1 \end{cases}$$

$$= \varphi(s) \otimes d_s$$

Τώρα, να δείξω $\quad \varphi \in A_0$

$$\int \theta_\gamma(\varphi)\gamma(s^{-1})\,d\gamma = \varphi(s) \otimes d_s$$

$$\theta_\gamma(a)\gamma(s^{-1})\,d\gamma = E_s(\varphi) \otimes d_s$$

επεκτείνεται λόγω συνέχειας $\quad E_s(\cdot)$

Πο $A \times_\alpha G \ni a \Longleftarrow \varphi_n$

$$\underline{\int_\Gamma \theta_\gamma(a)\,\gamma(s^{-1})\,d\gamma} = E_s(a)\otimes\delta_s \quad \forall s\in G$$

Hahn-Banach:

Έστω $\xi : A \rtimes_\alpha G \to \mathbb{C}$ συνεχής, γραμμική

ορίζουμε $f(\gamma) = \xi(\theta_\gamma(a))$. $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ συνεχής

$$\hat{f}(t) = \int_\Gamma f(\gamma)\,\gamma(t^{-1})\,d\gamma =$$

$$\int_\Gamma \xi(\theta_\gamma(a))\,\gamma(t^{-1})\,d\gamma = \xi\Big(\int \theta_\gamma(a)\,\gamma(t^{-1})\,d\gamma\Big)$$

$$= \xi(E_t(a)\otimes\delta_t)$$

Αν $E_t(a)=0 \ \forall t\in G$ τότε $\hat{f}(t)=0 \ \forall t\in G$

$$\Downarrow$$

$f=0$ διότι $f\mapsto\hat{f}$ είναι 1-1.

άρα $\xi(\theta_\gamma(a))=0 \quad \forall\gamma,\ \forall\xi$

άρα (H-B) $\theta_\gamma(a)=0 \quad \forall\gamma$

$\Downarrow$ $a=0$ $\blacksquare$