$$A \rtimes_\alpha G \longrightarrow A$$

$$E_t \quad \varphi = \sum \varphi_t \otimes \delta_t \longrightarrow \varphi_t$$

$$\|E_t(\varphi)\|_A \leq \|\varphi\| \quad \text{επεκτείνεται}$$

$$A \in A \rtimes_\alpha G \longrightarrow \left(E_t(A)\right)_{t \in G} \in A \otimes c_0(G)$$

$$A \sim \sum_t E_t(A) \otimes \delta_t$$

"Σειρά Fourier του A"

$$L^1(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto \int_\Gamma f(\gamma)\gamma(t^{-1})\,d\gamma \quad (:= \hat{f}(t))$$

είναι χαρακτήρας : γραμμική, πολλ/κή, $\neq 0$

δείχνει κανείς ότι $\forall$ χαρακτήρας της $L^1(\Gamma)$ είναι αυτής της μορφής

συνεπώς: $\hat{f}(t) = 0 \;\; \forall t \Rightarrow f \in \bigcap \operatorname{Ker}\varphi$ $\quad$ (φ: χαρακτ.)

(διότι $L^1(\Gamma)$ ημιαπλή) $\quad \Downarrow$

$f = 0$

$$E_e(B) = \int \Theta_\gamma(B)\,d\gamma$$

$$B = a \otimes \delta_e \qquad \Theta_\gamma(B) = a \otimes \underbrace{\gamma(e^{-1})}_{=1}\delta_e$$

$$\Theta_\gamma(B) = a \otimes \delta_e$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{E_e(a \otimes \delta_e)}_{= a} = \int (a \otimes \delta_e)\,d\gamma = a \otimes \delta_e$$

$$E_e : A \rtimes G \longrightarrow A$$

Είναι προβολή πάνω στο A

επιπλέον $\|E_e(B)\| \leq \|B\|$

(άρα $\|E_e\| = 1$)

: conditional expectation.

Faithful: Έστω $E_\alpha(B^*B)=0$, δ.ο. $B=0$.

Θεωρώ $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$$0 = \int_\Gamma \theta_\gamma(B^*B)\,d\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \int_\Gamma \underbrace{\langle \theta_\gamma(B^*B)\xi, \xi\rangle}_{\geq 0}\,d\gamma \quad \forall \xi \in H.$$

≥ 0, συνεχής συνάρτηση του γ

$$\Downarrow$$

$$\langle \theta_\gamma(B^*B)\xi, \xi\rangle = 0 \quad \forall \gamma \text{ και } \forall \xi$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_\gamma(B^*B) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Κλασσικό

Δυναμικό σύστημα (X, φ) : X συμπαγής

$\varphi : X \to X$

ομοιομ.

• <u>Πρόταση</u> $\exists\ \mu$ Borel σ/ο X που είναι

(i) αναλλοίωτο : $\mu(\varphi(E)) = \mu(E)$ $\forall E \subseteq X$

(ii) Εργοδικό ;

$\mu(E \,\Delta\, \varphi(E)) = 0$

$\Downarrow$

$\mu(E) \in \{0, 1\}$

Θέτω:

$Ug = g \circ \varphi^{-1}$ και $\pi(f)g = fg$

$A \otimes C_{00}(\mathbb{Z})$

$$f = \sum_{|k| \leq n} f_k \otimes \delta_k \xrightarrow{(\pi \times U)} \sum_k \pi(f_k) U^k$$

covariant αναπαράσταση

<u>πρέπει</u> $\left\| \sum \pi(f_k) U^k \right\| \leq \sup_{(\rho, V)} \left\| \sum \rho(f_k) V^k \right\| = \|f\|$

άρα επεκτείνεται σε αναπαράσταση του $A \times_\alpha \mathbb{Z}$

Ονομάζω A^{μ}_{φ} την $\| \ \|$-κλειστή άλγεβρα που παράγει η $\pi \times U$

- Πότε είναι 1-1 ;;

Εδώ η $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ είναι <u>απλή</u> (δεν έχει ιδεώδη) ανν

το ΔΣ (X, φ) είναι <u>ελαχιστικό</u>

<u>δηλ</u> $\nexists$ μη τετριμμένα κλειστά σύνολα

$F \subseteq X$ με $\varphi(F) \subseteq F$ (αναλλοίωτα).

Στόχος: $F \subseteq X$ κλειστό αναλλοίωτο

$$\Updownarrow$$

κλειστά ιδεώδη J_F του $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$

Τότε $\Rightarrow$ minimal $\Rightarrow$ $\nexists$ ιδεώδη σε ...

$$\Downarrow$$

κάθε αναπαράσταση είναι πιστή

$$\Downarrow$$

$$A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong A^{\mu}_{\sigma}$$

Πρότ. $F \subseteq X$ κλειστό και αναλλοίωτο. Τότε το

$$I(F) := \{ f \in C(X) : f|_F = 0 \}$$

(κάθε κλειστό ιδεώδες της $C(X)$)

γεννά ένα κλ. γνήσιο ιδ. J_F της $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ ως εξής:

$$J_F = \{ B \in C(X) \rtimes \mathbb{Z} : E_n(B)|_F = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \}.$$

Απόδ. Ορίζω $J_F^0 := \{ f = \sum_{|k| \le n} f_k \otimes \delta_k : f_k \in I(F) \}$

είναι κατάλληλος πυκνός υπόχωρος του J_F

διότι, αν $A \in J_F$, και ορίσω $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \sum_{|k| \le n} E_k(A) \otimes \delta_k$$

τότε οι μέσοι όροι:

$$\sigma_n(A) := \frac{1}{n+1} (f_0 + f_1 + \dots + f_n)$$

συγκλίνουν στο A ως προς τη νόρμα του $C(X) \rtimes \mathbb{Z}$.

Άρα, αρκεί νδο ότι το J_F^0 είναι ιδεώδης στην convolution algebra

$$(C(X) \otimes C_{00}(\mathbb{Z}), *), \text{ δηλ:}$$

$\forall f \in J_F^0, \ \forall g \in C(X) \otimes C_{00}(\mathbb{Z})$

νδο $f * g, \ g * f \in J_F^0$

Έστω $f = \sum_n f_n \otimes \delta_n$, $g = \sum g_m \otimes \delta_m$ (πεπ.)

$$f * g = \sum_{n,m} (f_n \otimes \delta_n) * (g_m \otimes \delta_m)$$

$$= \sum_{n,m} (f_n \alpha_n(g_m)) \otimes \delta_{n+m}$$

όμως: $f_n\big|_F = 0 \Rightarrow f_n \alpha_n(g_m)\big|_F = 0$

άρα $f * g \in J_F^0$.

Επίσης: $g * f = \sum_{n,m} (g_n \alpha_n(f_m)) \otimes \delta_{n+m}$

όμως $f_m\big|_F = 0$

άρα $\alpha_n(f_m) = f_m \circ \varphi^{-n}\big|_F = 0$

άρα $g * f \in J_F^0$ επειδή F αναλλοίωτο.

Τέλος, το $E_0(A)$ για $A \in J_F$ αναγκαστικά $= 0$ στο F.

Συνεπώς ένα A με $E_0(A)\big|_F \neq 0$ δεν ανήκει στο J_F.

Άρα J_F γνήσιο ιδεώδες. ■

$$\forall \sum_{|u|\le n} \pi(f_u) V^u$$

ορίζει $\Psi\Big(\sum_{|u|\le n} \pi(f_u) V^u\Big) = f_0$

δηλ. $= E_0\Big(\sum f_u \otimes \delta_u\Big)$

Παρ. Όταν μ εργοδικό και συμμ. άπειρο σύνολο, τότε η Ψ είναι συνεχής, άρα επεκτείνεται σε $\Psi : \mathcal{A}^{\mu}_{\varphi} \to C(X)$.

[Παρ.: Οι Ψ και E_0 συμφωνούν στα "πολυώνυμα":

$$A \rtimes G \qquad\qquad \mathcal{A}^{\psi}_{\varphi} \subseteq B(L^2(\mu))$$

$$\begin{tikzcd}
\sum f_u \otimes \delta_u \arrow[rr] \arrow[dr, "E_0"'] & & \sum \pi(f_u) V^u \arrow[dl, "\Psi"] \\
& f_0 &
\end{tikzcd}$$
]

Απόδ. Έστω $A = \sum \pi(f_u) V^u$ και $\epsilon > 0$

Θέτω: $E = \{ t \in X : |f_0(t)| > \|f_0\|_\infty - \epsilon \}$

Λόγω εργοδικότητας (Λήμμα Rohlin)

Επειδή $\exists$ F Borel $\mu(F) > 0$ ώστε $\mu(F \cap E) > 0$ και τα σύνολα $\{\varphi^j(F) : j = -n, \dots, n\}$ ξένα ανά δύο

με $\mu\Big(\bigcup_{j=-n}^{n} \varphi^j(F)\Big) > 1 - \epsilon$.

Παίρνω $g \in L^2(\mu)$, $\|g\|_2 = 1$ που ζει στο $F \cap E$

και $U^j g = g \circ \varphi^{-j}$ ζει στο $\varphi^j(F)$

άρα οι $U^j g$ έχουν ξένους φορείς.

Τώρα:

$$Ag = \sum_{|u|\le n} \pi(f_u) U^u g = \sum_u f_u \cdot \underbrace{(g \circ \varphi^{-j})}_{\text{ξένους φορείς}}$$

$$\|Ag\|^2 \overset{(\text{Πυθ.})}{=} \sum_u \|f_u U^u g\|_2^2$$

$$\ge \|f_0 g\|_2^2$$

επειδή στο $F \cap E$

$$\ge (\|f_0\|_\infty - \epsilon)^2$$

$\Rightarrow$

$$\|A\| \ge \|f_0\| - \epsilon$$

επομένως $\|f_0\|_0 \le \|A\|$.

Θεωρώ την

$$\sum f_n \otimes \delta_n \xrightarrow{\varphi} \sum \lambda(f_n) V^n$$

Ξέρω ότι είναι $*$-ομομορφισμός και
συστολή

οπότε επεκτείνεται σε $*$ ομομορφισμό:

$$A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} A^{\psi}_{\varphi}$$

Στα πολυώνυμα:

$$(\psi_\varphi)\left(\sum f_n \otimes \delta_n\right) = f_0$$

Άρα $\forall A \in A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ έχω:

$$(\psi_\varphi)(A) = E_0(A)$$

Όμως η E_0 είναι πιστή

άρα και η φ είναι πιστή

άρα η $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} A^{\psi}_{\varphi}$

είναι ισομορφισμός!