Εργοδικότητα: περίληψη 4ης διάλεξης

Υπενθύμιση:

Ορισμός 1. *Ένα m.p.s.* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *λέγεται* εργοδικό *(ή ο* T *λέγεται εργοδικός) αν δεν υπάρχουν μη τετριμένα* αναλλοίωτα *σύνολα, δηλαδή αν ένα αναλλοίωτο σύνολο ή έχει μέτρο μηδέν ή το συμπλήρωμά του έχει μέτρο μηδέν:*

$$A \in \mathcal{B},\ T^{-1}A = A \ \Rightarrow\ \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Πρόταση 1. *Έστω* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *ένα m.p.s.* $(\mu(X) = 1)$.

(1) Αν το σύστημα είναι εργοδικό, τότε:

$$f \text{ μετρήσιμη},\ f = f \circ T \ \mu\text{-σ.π.} \ \Rightarrow\ f \text{ σταθερή } \mu\text{-σ.π.}$$

(2) Αν

$$f \in L^\infty(X, \mu),\ f = f \circ T \ \mu\text{-σ.π.} \ \Rightarrow\ f \text{ σταθερή } \mu\text{-σ.π.},$$

τότε το σύστημα είναι εργοδικό.

Παράδειγμα 1. *Στροφές του κύκλου: Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *και* $T(x) = x + a \,(\mathrm{mod} 1)$, $x \in [0, 1)$ *ή* $T(z) = e^{2\pi i a} z$, $z \in S^1$.

Ο T *είναι εργοδικός αν και μόνον αν* $a \notin \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα 2. *Γενικές στροφές συμπαγών ομάδων: Έστω* G *συμπαγής τοπολογική ομάδα και* $a \in G$. *Θεωρούμε το m.p.s.* $(G, \mathcal{B}, \lambda, T)$ *όπου* $\mathcal{B} = \mathrm{Borel}(G)$, $\lambda = \mathrm{Haar}(G)$ *και* $T(x) = ax$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Ο T *είναι εργοδικός.*

(β) $\overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}} = G$ *(ισοδ.* $\overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}_+\}} = G$*).*

(γ) Η G *είναι αβελιανή και αν ένας χαρακτήρας* γ *ικανοποιεί* $\gamma(a) = 1$ *τότε* $\gamma(x) = 1$ *για κάθε* $x \in G$.

(Χαρακτήρας μιάς τοπ. συμπαγούς ομάδας G είναι ένας συνεχής ομομορφισμός ομάδων $\gamma : G \to S^1$.)