$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s. 31/10/14

$T$ διατηρεί ν μέτρο

Πρόταση: $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$ χώροι πιθανότητας

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \ , \quad \mathcal{B} = \sigma\{\underbrace{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots}\}$$ μετρήσιμα ορθογ.

όπου $B_i \in \mathcal{B}_i$, $\forall i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$

τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mu$ όπου

$$\mu(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(B_i)$$

ή // $\pi_i : X \longrightarrow X_i$

$\pi_i(x_1, \dots, x_n, \dots) = x_i$, $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ = η μικρότερη

σ-άλγεβρα ως προς την οποία όλες οι $\pi_i$ συν.

μετρήσιμες

Παραδείγματα:

7) a) Μονόπλευρο, shift, Bernoulli

$X_i = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $\mathcal{B}_i = 2^{X_i}$

$(p_0, \dots, p_{k-1})$, $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \, \delta_{\{j\}} \qquad \mu_i(A) = \sum_{j \in A} p_j$$

$$X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i = \{(x_0, x_1, \dots) : x_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$$

$$\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

~~Κύλινδρα ... ~~

$T : X \to X$ shift

$T(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$

$\mu\left(T^{-1}\{x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}\right) = \mu\{x_1 = i_0, x_2 = i_1, \ldots, x_{n+1} = i_n\}$

$= \sum_{i=0}^{k-1} \mu\{x_0 = i, x_1 = i_0, \ldots, x_{n+1} = i_n\}$

$= \underbrace{\left(\cancel{\sum_{i=0}^{k-1} p_i}\right)}^{1} p_{i_0} \ldots p_{i_n} = \mu\left(\{x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}\right)$

$= \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} \mu(\{x_0 = i, x_1 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}) = \sum_{i=0} p_i p_{i_0} \ldots p_{i_n} = p_{i_0} \ldots p_{i_n}}$

b) Μονόπλευρος, shift, Markov

Χώρος ίδιος

$P = (p_{ij})$, $k \times k$ (στοχαστικός $=$ $p_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$

και $\sum_{j=0}^{k-1} p_{ij} = 1$

Υπάρχει αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $P$

$\pi P = \pi$, $\pi_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i = 1$

$\mu\left(\{x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}\right) = \pi_{i_0} \underbrace{p_{i_0 i_1}} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$

$P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)$

Το ότι ορίζει μέτρο στη $\mathcal{B}$ βγαίνει από το Kolmogorov consistency thrm.

$\mu\left(T^{-1}\{x_0 = i_0, \ldots, x_n = i_n\}\right)$

$\sum_{i=0}^{k-1} \mu(x_0 = i, x_1 = i_0, \ldots, x_{n+1} = i_n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i p_{i i_0}}_{\pi_{i_0}} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$

c) $X_i = \{0,\dots,k-1\}$, $\mathcal{B}_i = 2^{X_i}$, $i \in \mathbb{Z}$ — Bernoulli shift αμφίπλευρο

$T$ shift στον $X := \prod_{i\in\mathbb{Z}} X_i$

$(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \longmapsto (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$

θέση 0 θέση 0

Αυτό είναι αντιστρέψιμο.

ορίζουμε: $\mu = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \mu_i$, $\mu_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \delta_{\{j\}}$

$\mu(\{x_m = i_m, \dots, x_{m+n} = i_{m+n}\}) = p_{i_m} p_{i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n}}$

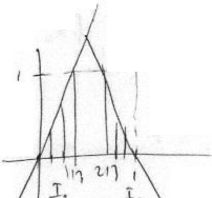
(επειδή τα μετρήσιμα ορθογώνια είναι π-σύστημα που παράγει τη σ-άλγεβρα, το μ είναι T-αναλλοίωτο.)

δ) Markov shift αμφίπλευρο

$\mu(\{x_m = i_m, \dots, x_{n+m} = i_{n+m}\}) = \pi_{i_m} p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{n+m}}$ □

γ)

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \le \frac{1}{2} \\ 3-3x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$




$X = \{x \in \mathbb{R}: f^n(x) \in [0,1]\ \forall n = 0,1,\dots\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([0,1]) = \mathcal{C}$ (= σύνολο Cantor)

$T = f|_X \Rightarrow T: X \to X$

Θα μετρήσω την

$\mu(I_1) = \frac{1}{2}$ $\mu(I_2) = \frac{1}{2}$

Αν $(i_1, i_2, \dots) \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ τότε $I_{i_1 i_2 \dots i_n} = I_{i_1} \cap f^{-1}(I_{i_2}) \cap f^{-2}(I_{i_3}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{i_n}) = \{x : x \in I_{i_1}, f(x) \in I_{i_2}, \dots, f^{n-1}(x) \in I_{i_n}\}$

$I_{i_1 i_2 \dots i_n} = \{x : x \in I_{i_1}, f(x) \in I_{i_2}, \dots, f^{(n-1)}(x) \in I_{i_n}\}$

$|I_{i_1\ldots i_n}| = 3^{-n}$ , $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \{x\}$

$$\Pi : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to X$$

$$\{\Pi(i_1, i_2, \ldots)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1\ldots i_n}$$ επί. (εδώ κ 1-1)

$$T(\Pi(i_1, i_2, \ldots)) = \Pi(i_2, i_3, \ldots)$$

shift

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

$T \circ \Pi = \Pi \circ \sigma$

$\Downarrow$

semi conjugacy

$\mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ μέτρο γινόμενο στο $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$

με $\mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\{x_n = 1\} = \mu\{x_n = 2\} = \frac{1}{2}$

$\Pi_* \mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \mu$ $\qquad A \subseteq X$

$\mu(A) = \mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\Pi^{-1}(A))$ Επειδή το shift σ αφήνει αναλλοίωτο το $\mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$,

T αφήνει αναλλοίωτο το μ

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\Pi^{-1}(T^{-1}(A))) = \mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(A)))$$

$$= \mu_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A)$$

9) Subshift of finite ~~space~~ type 

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, k-1\}$$

$T$ shift

Δίνεται πίνακας $A$, $k \times k$ με στοιχεία $\in \{0,1\}$

$$\tilde{X} = \{ \underset{\sim}{x} \in X : A(x_i, x_{i+1}) = 1 \quad \forall i \}$$

π.χ. $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \phi & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ η [illegible] $x_0 = 0$ $x_1 = 0$ επιτρέπεται

ενώ η $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ όχι.

Αντιστοιχούν μέτρα τα Markov
με πίνακα $P$ που να έχει 0 στις
θέσεις που έχει ο $A$ 0.