ΠΟΡΙΣΜΑ:

Στροφές του $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \dots \times S^1 \cong [0,1)^n$

$T(\underset{\sim}{x}) = (x_1 + a_1 \pmod 1, \dots, x_n + a_n \pmod 1)$, $\underset{\sim}{x} \in [0,1)^n$,

$T(\underset{\sim}{z}) = (e^{2\pi i a_1} z_1, \dots, e^{2\pi i a_n} z_n)$, $\underset{\sim}{z} \in \mathbb{C}^n$, $|z_i| = 1$ $\forall i = 1, \dots, n$.

T εργοδική ανν $1, a_1, \dots, a_n$ γραμμικά ανεξάρτητα επί του $\mathbb{Q}$ ανν $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^n k_i a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$.

(3) Μετρήσιμοι (συνεχείς) επιμορφισμοί της συμπαγούς αβελιανής ομάδας $\mathbb{T}^n$.

A: $n \times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{Z}$, $\det(A) \neq 0$.

$T(\underset{\sim}{x}) = A\underset{\sim}{x} \pmod 1$, $x \in [0,1)^n$. (Δηλ.: $[T(\underset{\sim}{x})]_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j - \lfloor \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \rfloor$, $i = 1, \dots, n$

T εργοδικός ανν ο A δεν έχει ιδιοτιμή που να είναι ρίζα της μονάδας.

Απόδειξη: Χαρακτήρες της $G = \mathbb{T}^n$: $e_{\underset{\sim}{k}}$, $\underset{\sim}{k} \in \mathbb{Z}^n$, όπου $e_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{x}) = \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot \underset{\sim}{x})$, $x \in [0,1)^n$.

Έστω $f \in L^2(G)$ με $f = f \circ T$.

Επεκτείνω f στον $\mathbb{R}^n$ περιοδικά: $f(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{k}) = f(\underset{\sim}{x})$, $\forall \underset{\sim}{x} \in [0,1)^n$, $\underset{\sim}{k} \in \mathbb{Z}^n$.

$$\widehat{f \circ T}(\underset{\sim}{k}) = \int_{[0,1)^n} f(T(\underset{\sim}{x})) \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot \underset{\sim}{x}) \, d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_{[0,1)^n} f(A\underset{\sim}{x}) \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot \underset{\sim}{x}) \, d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_{[0,1)^n} f(A\underset{\sim}{x}) \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* A^{-1} A \underset{\sim}{x}) \, d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_{A[0,1)^n} f(\underset{\sim}{x}) \exp(2\pi i [(A^{-1})^* \underset{\sim}{k}]^* \cdot \underset{\sim}{x}) \, d\underset{\sim}{x} \; [\det(A)]^{-1}.$$

$$= \hat{f}((A^{-1})^* \underset{\sim}{k}). \quad (\text{επειδή } T \text{ είναι } \det(A) - 1.).$$

Πρέπει $\hat{f}(\underset{\sim}{k}) = \hat{f}((A^{-1})^* \underset{\sim}{k})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

άρα πρέπει $\hat{f}(A^* \underset{\sim}{k}) = \hat{f}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Αν $\{(A^*)^m \underset{\sim}{k} : m \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο τότε $\sum_{\underset{\sim}{j} \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\underset{\sim}{j})|^2 = \infty$, αν $\hat{f}(k) \neq 0$, άτοπ

Άρα πρέπει $(A^*)^m \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.

Αν $\underset{\sim}{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underset{\sim}{0}\}$ τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του $(A^*)^m$ κ' άρα κ' του A^m.

Άρα αν ο A δεν έχει ιδιοτιμές ρίζες της μονάδας, πρέπει $\hat{f}(\underset{\sim}{k}) = 0$ $\forall \underset{\sim}{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underset{\sim}{0}\}$ κ' άρα $f \overset{L^2}{=} \hat{f}(0) =$ σταθερά.

Αντίστροφα: $A^m \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$ για κάποιο $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ κ' $m \in \mathbb{N}$, τότε κ' $(A^*)^m \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}$ για κάποιο $\underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n$ κ' το ίδιο m. Επειδή ο A έχει στοιχεία στο $\mathbb{Z}$, έπεται ότι υπάρχει $\underset{\sim}{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ τ.ω. $(A^*)^m \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}$.

Τότε η συνάρτηση: $f(\underset{\sim}{x}) = \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot \underset{\sim}{x}) + \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T(\underset{\sim}{x})) + \dots + \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T^{m-1}(\underset{\sim}{x}))$ είναι αναλλοίωτη:

$$f(T(x)) = \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T(\underset{\sim}{x})) + \dots + \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T^{m-1}(\underset{\sim}{x})) + \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T^m(\underset{\sim}{x})) =$$

$$= \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T(x)) + \dots + \exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot T^{m-1}(\underset{\sim}{x})) + \underbrace{\exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* A^m \underset{\sim}{x})}_{\exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \cdot \underset{\sim}{x})}$$

$$= f(\underset{\sim}{x}),$$

αλλά δεν είναι σταθερή γιατί είναι άθροισμα ορθογωνίων στον L^2 συναρτήσεων; οι συναρτήσεις: 1, $\exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* \underset{\sim}{x})$, $\exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* A \underset{\sim}{x})$, ..., $\exp(2\pi i \underset{\sim}{k}^* A^{m-1} \underset{\sim}{x})$ είναι ορθογώνιες (κ' άρα γραμμικά ανεξάρτητες), επειδή $\underset{\sim}{k}^*, \underset{\sim}{k}^* A, \ldots, \underset{\sim}{k}^* A^{m-1}$, όλα διαφορετικά.

(7.) (α) Μονόπλευρο Bernoulli shift.

$X = \{0,1,\ldots,k-1\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} = \{\underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, \ldots) : x_i \in \{0,1,\ldots,k-1\}\ \forall i = 0,1,\ldots\}$.

$\mathcal{B} = \otimes\, 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}$

$\underset{\sim}{p}^* = (p_0, \ldots, p_{k-1})$, $p_i \geq 0$, $i = 0,1,\ldots,k-1$, $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$.

$\mu = \otimes \sum_{j=0}^{k-1} p_j \delta_{\{j\}}$

$T : X \to X$ shift : $T(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$.

Ορισμός: X σύνολο, $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. $\mathcal{S}$ ημιάλγεβρα αν
(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$ (ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$ (iii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A =$ ξένη πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{S}$.

$\mathcal{A}$ άλγεβρα αν $\mathcal{A}$ ημιάλγεβρα κ' (αντί του (iii)) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: X σύνολο, $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ ημιάλγεβρα. Τότε η άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{S}$ (μικρότερη άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{S}$) αποτελείται από ξένες πεπερασμένες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{S}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{A}$ άλγεβρα που παράγει την $\mathcal{B}$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}$, $\exists A \in \mathcal{A}$ τ.ω. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Στο χώρο $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ shift: τα μετρήσιμα ορθογώνια

$$A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \{0,1,\ldots,k-1\} \times \{0,1,\ldots,k-1\} \times \cdots,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, $A_0, \ldots, A_n \subseteq \{0,1,\ldots,k-1\}$, αποτελούν ημιάλγεβρα που παράγει την $\mathcal{B}$.
Έστω $A \in \mathcal{B}$ τ.ω. $A = T^{-1}A$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει B πεπερασμένη ξένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων τ.ω. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Τότε κ'

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \cup B) \setminus \mu(A \cap B) = \mu(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Έστω n αρκούντως μεγάλο ώστε $T^{-n}B$ κ' B εξαρτώνται από ξένα σύνολα δεικτών.
Τότε: $\mu(T^{-n}B \cap B) = \mu(B)^2$.
Επίσης: $\mu(A \triangle T^{-n}B) = \mu(T^{-n}A \triangle T^{-n}B) = \mu(A \triangle B) < \varepsilon$.
Άρα:

$$|\mu(A) - \mu(B \cap T^{-n}B)| \leq \mu(A \triangle (B \cap T^{-n}B)) \leq \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap T^{-n}B) < 2\varepsilon.$$

Άρα τελικά:

$$|\mu(A) - \mu(A)^2| \leq |\mu(A) - \mu(B \cap T^{-n}B)| + |\mu(B \cap T^{-n}B) - \mu(A)^2| < 2\varepsilon + |\mu(B)^2 - \mu(A)^2| < 4\varepsilon.$$

Αφού ε αυθαίρετο, $\mu(A) = \mu(A)^2$ κ' άρα $\mu(A) \in \{0,1\}$. □

(6) Απεικόνιση Gauss: βλέπε κεφ 3 Einsiedler, Ward ή Billingsley κεφ. 24(i).