$(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας

$T: X \to X$ μετρήσιμη

$T_*\mu = \mu \quad \left(T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) \right)$

<u>Θεώρημα</u> (Poincaré recurrence) επαναφοράς

$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s. $(\mu(X) = 1)$

$A \in \mathcal{B}, \ \mu(A) > 0$

$\mu\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m} A\right) = \mu(A)$ ΔΔΔ σχεδόν κάθε σημείο του A επανέρχεται στο A ∞ φορές.

<u>Αποδ:</u> Ορίζουμε $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m} A, \ n = 0, 1, \ldots$

Τα $A \cap A_1^c, \ T^{-1}(A \cap A_1^c), \ T^{-2}(A \cap A_1^c), \ldots$

είναι ξένα ανά 2. Αν $\mu(A \cap A_1^c) > 0$

$\mu(T^{-n}(A \cap A_1^c)) = \mu(A \cap A_1^c) > 0$

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A \cap A_1^c)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_1^c) = \infty$. <u>Άτοπο</u>.

Άρα $\mu(A) = \mu(A \cap A_1)$

Αυτό δείχνει ότι μ-σχεδόν κάθε $x \in A$ επανέρχεται τουλάχιστον μία φορά.

η $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. $T^{-1} A_n = A_{n+1}$

άρα $\mu(A_n) = \mu(T^{-1} A_{n-1}) = \mu(A_{n-1}) = \ldots = \mu(A_0)$

$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A_0)$

$\mu(A \cap A_0) = \mu\left(A \cap A_0 \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) + \mu\left(A \cap A_0 \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c\right)$

$\mu\left(A \cap A_0 \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c\right) \leq \mu\left(A_0 \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0$

Άρα $\mu(A \cap A_0) = \mu\left(A \cap A_0 \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right)$

$\quad\;\; \| $

$\;\; \mu(A).$

<u>Παράδειγμα:</u> $X = \mathbb{Z}$, $T(x) = x+1$,

$\mu(A) = $ πληθάριθμος (A)

Αν $A = \{0\}$ τότε $T^{-n} A \cap A = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$

κ' $\mu(A) > 0$.

Δεν ισχύει το Poincaré αφού $\mu(X) = \infty$.

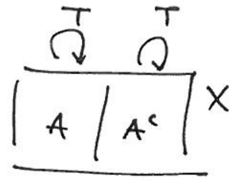
<u>Θεώρημα:</u> (Furstenberg) $\forall A \in \mathcal{B}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. $\exists n \in \mathbb{N}$:

$\mu(A \cap T^{-n} A \cap T^{-2n} A \cap \ldots \cap T^{-(k-1)n} A) > 0$

<u>Ορισμός:</u> $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s. Σύστημα εργοδικό αν

$\forall A \in \mathcal{B} : T^{-1}A = A \Rightarrow \mu(A) \in \{0,1\}$

(Αν $T^{-1}A = A$ το A λέγεται αναλλοίωτο.)



(εργοδική υπόθεση: x, $T(x)$, ...

μια κατάσταση

$f(x)$, $f(T(x))$

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \longrightarrow \int f \, d\mu$)

Δεν μπορεί να ισχύει αν υπάρχει A με $T^{-1}A = A$ κ' $\mu(A) > 0$, $\mu(A^c) > 0$: δεξί μέλος εξαρτάται από τιμές της f σε όλο το X, αριστερό μόνο από τιμές της f στο A, αν $x \in A$.

• Αναλλοίωτο mod μ $\quad \mu(A \,\Delta\, T^{-1}A) = 0$

Πρόταση 3: $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ m.p.s. $(\mu(X)=1)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) T εργοδικός

ii) $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0 \Rightarrow \mu(A) \in \{0,1\}$

iii) $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A\right) = 1$

iv) $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A), \mu(B) > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \mu(A \cap T^{-n}B) > 0$.

Απόδ:

i) $\Rightarrow$ ii) $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}A, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \qquad T^{-1}B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq B \quad \text{επειδή } A_n \supseteq A_{n+1}$$

και $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ άρα $B = T^{-1}B$

Συμπέρασμα: $\mu(B) \in \{0,1\}$, $A \triangle T^{-n}A \subseteq (A \triangle T^{-1}A)$
$\cup (T^{-1}A \triangle T^{-2}A) \cup \ldots \cup (T^{-(n-1)}A \triangle T^{-n}A)$

Αν $x \in A \triangle T^{-n}A \Leftrightarrow$ είτε $x \in A \cap T^{-n}A^c$, ορίζω k:

$x \in T^{-(k-1)}A$, $x \notin T^{-k}A$

άρα $x \in T^{-(k-1)}A \cap T^{-k}A^c \subseteq T^{-(k-1)}A \triangle T^{-k}A$

$\Leftrightarrow$ είτε $x \in A^c \cap T^{-n}A$, είτε k: $x \notin T^{-(k-1)}A$, $x \in T^{-k}A$.

άρα $x \in T^{-(k-1)}A^c \cap T^{-k}A \subseteq T^{-(k-1)}A \triangle T^{-k}A$

$$\mu(A \triangle T^{-n}A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-(k-1)}A \triangle T^{-k}A) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-(k-1)}(A \triangle T^{-1}A)) = n \cdot 0 = 0.$$

και $\mu\left(A \triangle \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m} A_m\right) \leq \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} (A \triangle T^{-m} A_m)\right) = 0.$

A_i, B_i τότε $\bigcup A_i \triangle \bigcup B_i \subseteq \bigcup (A_i \triangle B_i)$

$$\mu(A) = \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m} A\right)$$

άρα $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} T^{-m} A\right) = \lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$

$$\underset{B}{\shortparallel}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n} A$

$T^{-1} B \subseteq B$ άρα $B \triangle T^{-1} B = B \setminus T^{-1}(B)$

$\mu(B \triangle T^{-1} B) = \mu(B) - \mu(T^{-1} B) = 0$. Άρα $\mu(B) \in \{0, 1\}$

αλλά $\mu(B) \neq 0$ αφού $B \supseteq T^{-1} A \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(T^{-1} A) =$

$\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(B) = 1.$

iii) $\Rightarrow$ iv) $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A), \mu(B) > 0$

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n} B\right) = 1 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n} B \cap A\right) = \mu(A)$

Αν $\mu(T^{-n} B \cap A) = 0 \ \forall n \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n} B \cap A\right) \leq$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n} B) = 0. \Rightarrow \mu(A) = 0$ άτοπο

iv) $\Rightarrow$ i) Έστω $A \in \mathcal{B}$: $A = T^{-1} A$ έστω

$\mu(A) \in (0,1)$. Άρα $\mu(A), \mu(A^c) > 0$.

A αναλλοίωτο

$\Rightarrow$ Για κάποιο n $\mu(T^{-n} A \cap A^c) > 0 \Rightarrow \mu(A \cap A^c) > 0$

άτοπο