1 Συστήματα που διατηρούν ένα μέτρο

Ορισμός. *Σύστημα που διατηρεί το μέτρο* (*measure preserving system* (m.p.s.)).
Μία τετράδα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$, όπου:
$(X, \mathscr{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας·
$T\colon X \to X$ μετρήσιμη, δηλ. $T^{-1}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{B}$·
$T_*\mu = \mu$, δηλ. $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)\ \forall\, B \in \mathscr{B}$.

Συμβολισμοί. $T^{-1}(\mathscr{B}) := \{T^{-1}(B)\colon B \in \mathscr{B}\}$.
$T_*\mu(B) := \mu(T^{-1}(B))\ \forall\, B \in \mathscr{B}$.

Η ιδιότητα $T_*\mu = \mu$ αναφέρεται ως *η T διατηρεί το μέτρο* ή ως *το μ είναι T-αναλλοίωτο*.

Ορισμός. Ένα m.p.s. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ είναι *αντιστρέψιμο* αν T είναι 1–1 και επί, και T^{-1} μετρήσιμη (δηλ. $T(\mathscr{B}) = \{T(B)\colon B \in \mathscr{B}\} \subseteq \mathscr{B}$).

Ορολογία. Έστω X μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathscr{P}$ υποσυνόλων του X καλείται π-σύστημα αν είναι μη κενή και κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

Ορολογία. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathscr{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του X. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathscr{C}$ είναι η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathscr{C}$, δηλ. η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{C}$.
Συμβολίζεται με $\sigma(\mathscr{C})$.

Παρατήρηση. Η τομή (οποιουδήποτε πλήθους) σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα· άρα η $\sigma(\mathscr{C})$ είναι καλά ορισμένη.

Λήμμα 1. *$(X, \mathscr{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $T\colon X \to X$ μετρήσιμη, $\mathscr{P} \subseteq 2^X$ ένα π-σύστημα που παράγει την $\mathscr{B}$. Τότε $T_*\mu = \mu$ ανν $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ $\forall\, A \in \mathscr{P}$.*

Απόδειξη. $\nu := T_*\mu$ είναι μέτρο πιθανότητας. Αν δύο μέτρα πιθανότητας συμφωνούν σε ένα π-σύστημα, τότε συμφωνούν και στην σ-άλγεβρα που αυτό παράγει (βλ. [1, Θεώρημα 3.3] και [1, Θεωρήματα 10.3, 10.4] για επεκτάσεις). $\square$

Ορολογία. $(X, \mathscr{B}, \mu)$ χώρος μέτρου.
$f\colon X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$ αν:
$\exists\, a \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $\mu(\{x \in X\colon |f(x)| > a\}) = 0$.
Για μια τέτοια f: $\|f\|_\infty := \inf\{a > 0\colon \mu(\{x \in X\colon |f(x)| > a\}) = 0\}$.

Συμβολισμός. Αν X σύνολο και $A \subseteq X$, $\mathbf{1}_A$ θα συμβολίζει την χαρακτηριστική συνάρτηση του A: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\mathbf{1}_A(x) = 0$ αν $x \notin A$.

Λήμμα 2. $(X,\mathscr{B},\mu)$ *χώρος πιθανότητας,* $T\colon X\to X$ *μετρήσιμη. Τότε:*
$\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu\quad\forall\, f\in L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)\quad\Longrightarrow\quad T_*\mu=\mu.$
$T_*\mu=\mu\quad\Longrightarrow\quad\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu\quad\forall\, f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ *και επίσης για κάθε* f *μετρήσιμη και μη αρνητική* $(f\geqslant 0)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu\quad\forall\, f\in L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)$.
Έστω $B\in\mathscr{B}$. Τότε $f=\mathbf{1}_B\in L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)$ και

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\mu(B),$$

$$\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int_X \mathbf{1}_{T^{-1}(B)}\mathrm{d}\mu=\mu(T^{-1}(B))=T_*\mu(B).$$

Άρα $T_*\mu(B)=\mu(B)$.

Αντίστροφα. Έστω ότι $T_*\mu=\mu$. Τότε $\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ για $f=\mathbf{1}_B$ με $B\in\mathscr{B}$. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος αυτό έπεται και για κάθε f απλή (γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων), και από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης και για κάθε $f\geqslant 0$ μετρήσιμη, και εν τέλει για κάθε $f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$. □

Παρατήρηση. Στην προηγούμενη απόδειξη αποδείχθηκε ουσιαστικά το εξής: σε κάθε χώρο μέτρου $(X,\mathscr{B},\mu)$,

$$\int_X f\,\mathrm{d}(T_*\mu)=\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu$$

για κάθε $f\geqslant 0$ μετρήσιμη και κάθε $f\in L^1(X\mathscr{B},\mu)$.

Πρόταση (Μέτρο Haar). *G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τότε υπάρχει μη μηδενικό μέτρο Radon λ τέτοιο ώστε*

$$\lambda(xB)=\lambda(B)\qquad\forall\, x\in G\quad\forall\, B\in\mathscr{B}(G),$$

όπου $\mathscr{B}(G)$ η Borel σ-άλγεβρα της G, και $xB=\{xy\colon y\in B\}$ (*δηλ. το λ είναι αναλλοίωτο ως προς αριστερές μεταφορές*).
Κάθε τέτοιο μέτρο καλείται αριστερό μέτρο Haar της G.
Για κάθε δύο τέτοια μέτρα λ_1 και λ_2 υπάρχει $c>0$ τέτοια ώστε $\lambda_2(B)=c\lambda_1(B)$ $\forall\, B\in\mathscr{B}(G)$.
Κάθε ανοικτό υποσύνολο της G έχει (*γνήσια*) *θετικό μέτρο Haar.*
Αν G συμπαγής, κάθε μέτρο Haar είναι πεπερασμένο, και άρα υπάρχει ένα για το οποίο $\lambda(G)=1$, το οποίο και εφεξής θα καλείται το μέτρο Haar της G.
Τέλος, σε συμπαγείς ομάδες τα αριστερά μέτρα Haar είναι και δεξιά μέτρα Haar, δηλ. ισχύει $\lambda(Bx)=\lambda(B)\ \ \forall\, x\in\ G\ \ \forall\, B\in\mathscr{B}(G)$.

Ορολογία. Μία τοπολογική ομάδα είναι μία ομάδα G, εφοδιασμένη με μία τοπολογία Hausdorff, ως προς την οποία οι πράξεις είναι συνεχείς: η απεικόνιση $G \times G \ni (x,y) \mapsto xy \in G$ είναι συνεχής (με την τοπολογία γινόμενο στην $G \times G$) και η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι επίσης συνεχής.

Αν G τοπολογική ομάδα και H κλειστή κανονική υπο-ομάδα, έστω $\pi\colon G \to G/H$ η προβολή $\pi(x) := xH$. Εφοδιάζουμε την G/H με την τοπολογία πηλίκο: $A \subseteq G/H$ είναι ανοικτό ανν $\pi^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στην G. Με αυτήν την τοπολογία η ομάδα G/H καθίσταται τοπολογική ομάδα (που είναι και Hausdorff αν η G είναι Hausdorff, όπως υποθέσαμε εδώ), η δε απεικόνιση π είναι συνεχής και ανοικτή. Αν η G είναι τοπικά συμπαγής το ίδιο ισχύει και για την G/H.

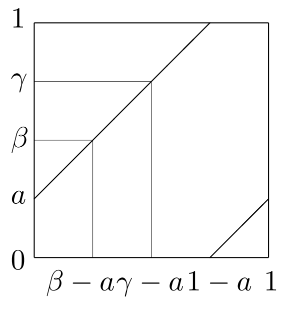
Ταυτίζουμε τις ομάδες $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ με τα $[0,1)^n$. Η τοπολογία στο $[0,1)$ είναι αυτή που έχει ως βάση περιοχών σε ένα $x \in (0,1)$ τα ανοικτά διαστήματα (δ, ϵ) με $0 < \delta < x < \epsilon$, και στο 0 τα σύνολα $[0,\epsilon) \cup (1-\delta, 1)$, $0 < \delta, \epsilon < 1$ (ταυτίζουμε δηλαδή τα άκρα του διαστήματος $[0,1)$)· με την τοπολογία αυτή η απεικόνιση $[0,1) \ni x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} \in \mathbb{S}^1$, όπου

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$$

ο μοναδιαίος κύκλος, είναι ομοιομορφισμός. Η τοπολογία στα $[0,1)^n$ είναι η τοπολογία γινόμενο, και καθιστά τα $[0,1)^n$ ομοιομορφικά με το $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.

Παραδείγματα m.p.s.

1. *Στροφές του κύκλου*: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)$.
   $a \in [0,1)$.
   $T(x) := x + a \pmod 1 = x + a - \lfloor x + a \rfloor$, $x \in [0,1)$, ή
   $T(z) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a} z$, $z \in \mathbb{S}^1$, ή ακόμη
   $T(x + \mathbb{Z}) = x + a + \mathbb{Z}$, $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   Διατηρεί το μέτρο Lebesgue στον κύκλο, που είναι το μέτρο Haar της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{S}^1$, ή μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$, που είναι το μέτρο Haar της ομάδας $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Πράγματι, τα διαστήματα $[\beta,\gamma)$, $\beta,\gamma \in [0,1)$, αποτελούν π-σύστημα που παράγει την Borel σ-άλγεβρα του $[0,1)$, και

$$T^{-1}([\beta,\gamma)) = \begin{cases} [\beta - a, \gamma - a) & \text{αν } a \leqslant \beta < \gamma \\ [\beta + 1 - a, \gamma + 1 - a) & \text{αν } \beta < \gamma \leqslant a \\ [0, \gamma - a) \cup (\beta + 1 - a, 1) & \text{αν } \beta < a < \gamma, \end{cases}$$

οπότε $\lambda(T^{-1}([\beta,\gamma))) = \lambda([\beta,\gamma))$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$.

2. *Μεταφορές συμπαγών ομάδων.*
G συμπαγής ομάδα, $\mathscr{B}(G)$ Borel σ-άλγεβρα της G, λ μέτρο Haar.
$a \in G$.
$T(x) = ax$, $x \in G$.
Διατηρεί το μέτρο Haar της ομάδας, εξ' ορισμού.
Στροφές κύκλου ειδική περίπτωση.

Άλλη ειδική περίπτωση:
Στροφές του n-τόρου: $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)^n$.
$a_1, \dots, a_n \in [0,1)$.

$$\begin{aligned} T(x_1,\dots,x_n) :&= (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) \ (\mathrm{mod}\ 1) \\ &= (x_1 + a_1 \ (\mathrm{mod}\ 1), \dots, x_n + a_n \ (\mathrm{mod}\ 1)) \\ &= (x_1 + a_1 - \lfloor x_1 + a_1 \rfloor, \dots, x_n + a_n - \lfloor x_n + a_n \rfloor), \\ &\qquad\qquad (x_1,\dots,x_n) \in [0,1)^n, \end{aligned}$$

ή

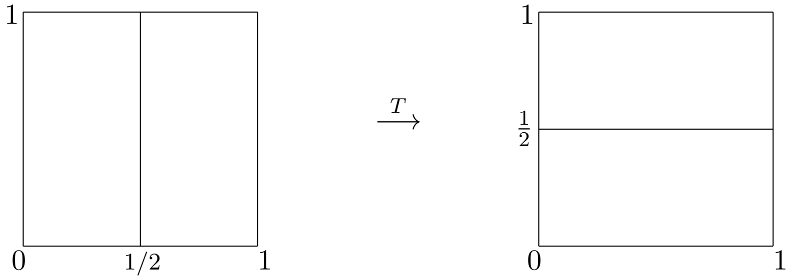
$T(x + \mathbb{Z}^n) = x + a + \mathbb{Z}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$,
a το διάνυσμα με συντεταγμένες $a_1, \dots, a_n$, ή

$$T(z) := (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a_1} z_1, \dots, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a_n} z_n), \quad (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

Διατηρεί το μέτρο Lebesgue $\lambda \times \cdots \times \lambda$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον κύκλο $\mathbb{S}^1$, που είναι το μέτρο Haar της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, ή n-διάστατο μέτρο Lebesgue στο $[0,1)^n$, που είναι το μέτρο Haar της ομάδας $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

3. *Απεικόνιση του φούρναρη* (*Baker's transformation*):
$X = [0,1]^2$, $\mathscr{B} = \mathrm{Borel}([0,1]^2)$, $\mu = \mathrm{Lebesgue}$. $T\colon X \to X$,

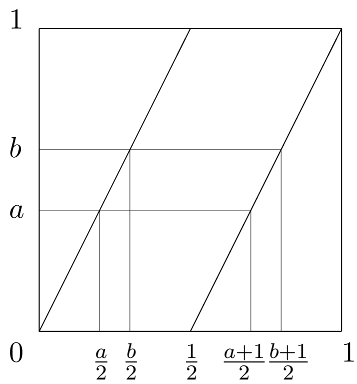
$$T(x,y) := \begin{cases} (2x, y/2) & \text{αν } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ (2x-1, (y+1)/2) & \text{αν } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$



Η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue μ. Πράγματι, αν $f \in L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(T(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{1/2} f(T(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_{1/2}^1 f(T(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

4. (α) $T_2(x) = 2x \pmod 1$, $x \in [0,1)$, ή
$T_2(z) = z^2$, $z \in \mathbb{S}^1$, ή
$T(x+\mathbb{Z}) = 2x + \mathbb{Z}$, $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Διατηρεί το μέτρο Lebesgue.
Πράγματι, τα διαστήματα $[a,b)$, $a,b \in [0,1)$, αποτελούν π-σύστημα που παράγει την Borel σ-άλγεβρα του $[0,1)$, και



$$T^{-1}([a,b)) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right),$$

οπότε $\lambda(T^{-1}([a,b))) = \lambda([a,b))$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$.

(β) Γενικότερα, για $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$:
$T_k(x) = kx \pmod 1$, $x \in [0,1)$, ή
$T_k(x+\mathbb{Z}) = kx + \mathbb{Z}$, $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ή
$T_k(z) = z^k$, $z \in \mathbb{S}^1$.
Διατηρεί το μέτρο Lebesgue.

Ανοικτό πρόβλημα (Furstenberg)**:** Αν μ είναι αναλλοίωτο ως προς T_2 και T_3 και δεν έχει σημειακές μάζες, τότε είναι *αναγκαστικά* το μέτρο Lebesgue.
[Εικασία σωστή αν $h_\mu(T_2) > 0$ και $h_\mu(T_3) > 0$ (Rudolph).]
(h_μ: μετροθεωρητική εντροπία.)

(γ) *Συνεχείς επιμορφισμοί συμπαγών ομάδων.*
G συμπαγής ομάδα.
$T\colon G \to G$ μετρήσιμος (αυτομάτως συνεχής) επιμορφισμός.
Διατηρεί το μέτρο Haar.

Απόδειξη. Έστω λ το μέτρο Haar της G και ορίζουμε

$$\mu(B) := \lambda(T^{-1}(B))$$

για $B \subseteq G$ Borel. Έστω $y \in G$· επειδή T επιμορφισμός, υπάρχει $x \in G$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$. Τότε $T^{-1}(yB)) = x\,T^{-1}(B)$, και άρα

$$\mu(yB) = \lambda(T^{-1}(yB)) = \lambda(x\,T^{-1}(B)) = \lambda(T^{-1}(B)) = \mu(B),$$

για οποιαδήποτε Borel B. Αφού το y ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι το μ είναι αναλλοίωτο ως προς αριστερές μεταφορές και επομένως $\mu = \lambda$, από την μοναδικότητα του μέτρου Haar. $\square$

Οι T_k παραπάνω είναι παραδείγματα συνεχών επιμορφισμών συμπαγών ομάδων. Άλλη μία κατηγορία παραδειγμάτων:

(δ) *Επιμορφισμοί του n-τόρου*:
$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)^n$.
A: $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Ο A επάγει μία απεικόνιση του n-τόρου στον εαυτό του:

$$T(x) := Ax \pmod 1 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \pmod 1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{nj}x_j \pmod 1 \end{pmatrix},$$

ή

$$T(x + \mathbb{Z}^n) = Ax + \mathbb{Z}^n,$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)^* \in [0,1)^n$ και $*$ συμβολίζει ανάστροφο· τα διανύσματα δηλαδή θεωρούνται πίνακες $n \times 1$ (δηλ. διανύσματα στήλες) και για ένα τέτοιο x το x^* θα είναι το διάνυσμα γραμμή. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι, αν $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)^*$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ των οποίων οι συντεταγμένες διαφέρουν κατά ακέραιο, δηλ. $y_i = x_i + k_i$ με $k_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε i, αν δηλαδή x και y ορίζουν το ίδιο στοιχείο $x + \mathbb{Z}^n = y + \mathbb{Z}^n$ του $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, τότε και οι συντεταγμένες των εικόνων τους Ax και Ay διαφέρουν κατά ακέραιο, ορίζουν δηλαδή το ίδιο στοιχείο $Ax + \mathbb{Z}^n = Ay + \mathbb{Z}^n$ του $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$: πράγματι, η i συντεταγμένη του Ay θα είναι $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}k_j$, που είναι η i συντεταγμένη του Ax συν $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}k_j$, και το τελευταίο άθροισμα δίνει ακέραιο αφού τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι. Ο T είναι ομομορφισμός, και είναι επιμορφισμός ανν $\det(A) \neq 0$, είναι δε $\det(A)$-προς-ένα[1]· ειδικότερα, είναι αυτομορφισμός όταν $\det(A) = 1$.

Άσκηση: Έστω G ομάδα, H υπο-ομάδα, $\varphi\colon G \to G$ ομομορφισμός τέτοιος ώστε $\varphi(H) \subseteq H$. Τότε $\tilde{\varphi}\colon G/H \to G/H$ με τύπο $\tilde{\varphi}(gH) := \varphi(g)H$ είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός. Επιπλέον, $\tilde{\varphi}$ είναι επιμορφισμός αν φ επιμορφισμός.

Η T παραπάνω διατηρεί το μέτρο Lebesgue στον n-τόρο. Αυτό συνάγεται απ' ευθείας από το (γ).

[1]Πράγματι. Επειδή T ομομορφισμός, $T^{-1}(\{y\})$ έχει τον ίδιο πληθάριθμο για κάθε $y \in [0,1)^n$, ίσο με την τάξη του πυρήνα $\ker(T)$ της T· ο πληθάριθμος αυτός, έστω m, είναι πεπερασμένος αφού $T^{-1}(\{0\})$ έχει πληθάριθμο όσα και τα διανύσματα στο $\mathbb{Z}^n \cap A[0,1)^n$, όπου $A[0,1)^n$ συμβολίζει την εικόνα του $[0,1)^n$ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού που επάγει ο πίνακας A στον $\mathbb{R}^n$. Το $A[0,1)^n$ τώρα έχει μέτρο Lebesgue $\det(A)$, και η προβολή $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x + \mathbb{Z}^n \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq [0,1)^n$ βάζει το $A[0,1)^n$ στο $[0,1)^n$ ακριβώς m φορές, κάθε σημείο δηλαδή του $[0,1)^n$ καλύπτεται ακριβώς m φορές. Αφού το μέτρο Lebesgue του $[0,1)^n$ είναι 1 και του $A[0,1)^n$ είναι $\det(A)$, έπεται ότι $m = \det(A)$.

Για παράδειγμα, έστω

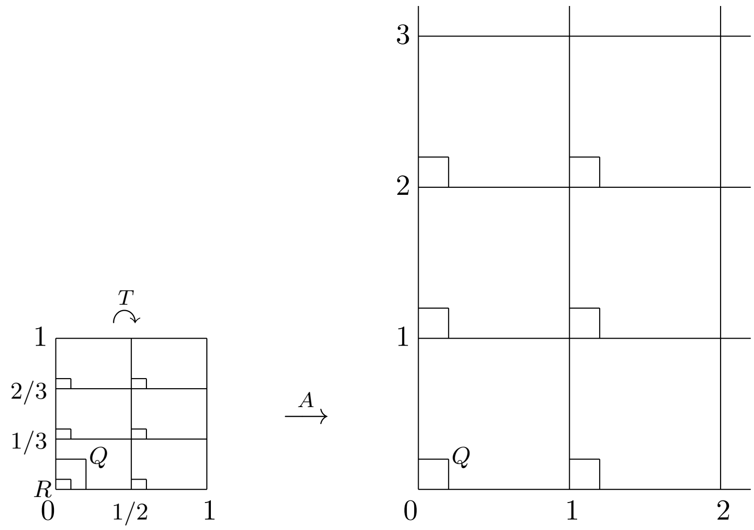
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Έστω Q ένα ορθογώνιο στο $[0,1)^2$ (στο σχήμα το Q είναι το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)^*, (\frac{1}{5},0)^*, (0,\frac{1}{5})^*, (\frac{1}{5},\frac{1}{5})^*$). Ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζει ο πίνακας A στον $\mathbb{R}^2$ απεικονίζει κατ' αρχήν το $[0,1)^2$ στο ορθογώνιο $A[0,1)^2$ με κορυφές

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

άρα το $T^{-1}(Q)$ θα είναι η αντίστροφη εικόνα μέσω του A (στον $\mathbb{R}^2$) των έξι ορθογωνίων

$$Q\ ,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Q\ ,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + Q\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Q\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Q\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + Q.$$



Αν $R := A^{-1}Q$, τότε οι αντίστροφες εικόνες μέσω του A των έξι αυτών ορθογωνίων $(k,n)^* + Q$ είναι τα ορθογώνια

$$R\ ,\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + R\ ,\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + R\ ,\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + R\ ,\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + R\ ,\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + R,$$

και άρα αυτά τα τελευταία έξι ορθογώνια είναι το $T^{-1}(Q)$. Οι διαστάσεις του R είναι: η οριζόντια $\frac{1}{2}$ επί την οριζόντια διάσταση του Q και η κατακόρυφη $\frac{1}{3}$ επί την κατακόρυφη διάσταση του Q, αφού

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot$$

επομένως το εμβαδόν του R είναι $\frac{1}{6}$ επί το εμβαδόν του Q, και άρα το εμβαδόν του $T^{-1}(Q)$ είναι

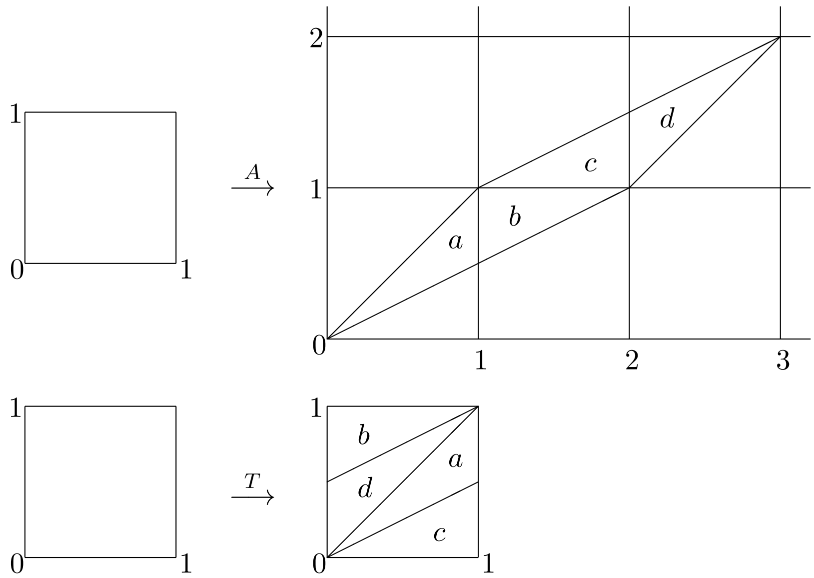
$$6 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \text{εμβαδόν}(Q) = \text{εμβαδόν}(Q).$$

Επειδή τα ορθογώνια είναι π-σύστημα που παράγει την Borel σ-άλγεβρα του $[0,1)^2$, το Λήμμα 1 δίνει ότι η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue στον $[0,1)^2$.

Άλλο ένα παράδειγμα, με τον πίνακα A όχι διαγώνιο:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

αυτός ο πίνακας ορίζει αυτομορφισμό του τόρου, αφού $\det(A) = 1$.



Στην περίπτωση που ο A δεν είναι διαγώνιος, το σχήμα είναι λιγότερο καθαρό και ο καλύτερος τρόπος να δει κανείς απ' ευθείας, χωρίς αναφορά στο γενικό αποτέλεσμα του (γ), ότι ένας τέτοιος T διατηρεί το μέτρο Lebesgue είναι μέσω του Λήμματος 2.

Έστω f στον L^∞ του $[0,1)^n$. Επεκτείνουμε την f περιοδικά:

$$f(x+k) = f(x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} \quad \forall\, x \in [0,1)^n.$$

Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n} f(T(x))\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1)^n} f(Ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\det(A)} \int_{A[0,1)^n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\det(A)\int_{[0,1)^n} f(x)\,\mathrm{d}x$, επειδή η f έχει επεκταθεί περιοδικά και το $T([0,1)^n)$ καλύπτει το $[0,1)^n$ ακριβώς $\det(A)$ φορές (ο T είναι $\det(A)$-προς-ένα).

5. *Απεικόνιση του Gauss* (*Gauss map*):
$X = (0,1]$, $\mathscr{B} = \mathrm{Borel}((0,1])$.

$$T(x) := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$

$$T(x) = \frac{1}{x} - n, \qquad \text{για} \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

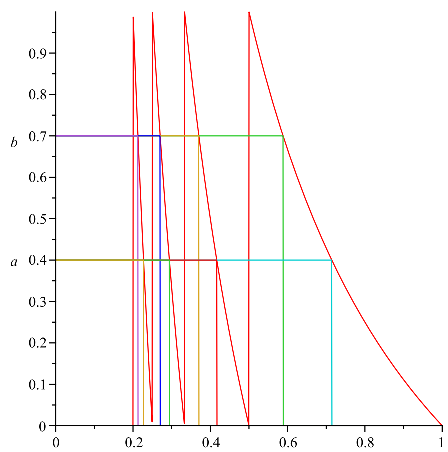
Η T διατηρεί το μέτρο

$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\ln 2}\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

Πράγματι, για $a, b \in (0,1)$,

$$a < T(x) < b \quad \text{και} \quad \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \quad \iff \quad \frac{1}{b+n} < x < \frac{1}{a+n},$$

άρα



$$T^{-1}(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(T^{-1}(a,b) \cap \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b+n}, \frac{1}{a+n} \right).$$

άρα

$$\mu(T^{-1}(a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(b+n)^{-1}}^{(a+n)^{-1}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \frac{1}{\ln 2} = \ln \frac{b+1}{a+1} \frac{1}{\ln 2} = \mu((a,b)).$$

Το Λήμμα 1 τώρα δίνει ότι η T διατηρεί το μ.

Η απεικόνιση Gauss σχετίζεται με τα συνεχή κλάσματα.
Αν $x \in (0,1] \setminus \mathbb{Q}$,

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

με $a_i \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\frac{1}{x} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}} \qquad \text{και} \qquad a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

άρα

$$T(x) = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}.$$

Δηλαδή αν $x = [a_1, a_2, \ldots]$, τότε $T(x) = [a_2, a_3, \ldots]$.

6. *Χώροι shift*:
$(X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$, $i \in I$, χώροι πιθανότητας, I αυθαίρετο σύνολο δεικτών.
$X := \prod_{i \in I} X_i$.
Μετρήσιμα ορθογώνια: σύνολα της μορφής

$$\prod_{i \in I} B_i,$$

όπου

$$B_i \in \mathscr{B}_i \quad \forall\, i \in I \quad \text{και} \quad B_i = X_i \text{ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος } i.$$

$\mathscr{B} = \bigotimes_{i \in I} \mathscr{B}_i$ η σ-άλγεβρα γινόμενο: η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια.

Θεώρημα. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu\left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} \mu_i(B_i)$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο $\prod_{i\in I} B_i$. Το μ καλείται μέτρο γινόμενο των μ_i, $i \in I$, και συμβολίζεται ως $\mu = \times_{i\in I}\mu_i$.

Σημείωση. Αφού για ένα μετρήσιμο ορθογώνιο $\prod_{i\in I} B_i$ $B_i \neq X_i$ μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος δεικτών $i \in I$, και αφού $\mu(X_i) = 1\ \forall\, i \in I$, το γινόμενο στο δεξί μέλος είναι τελικά ένα πεπερασμένο γινόμενο.

Η πρώτη (σωστή) απόδειξη αυτού του Θεωρήματος οφείλεται στον Kakutani. Για την απόδειξη βλ. [5, §38]· για την ειδικότερη περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί εδώ βλ. και [1]σελ. 27 και το Παράρτημα αυτών των σημειώσεων για μία απ' ευθείας απόδειξη.

(α) *Μονόπλευρο Bernoulli shift*:
$(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$ διάνυσμα πιθανότητας,
δηλ. $p_j \geqslant 0\ \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\sum_{j=0}^{k-1} p_j = 1$.
$X_i = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$\mathscr{B}_i = 2^{X_i} = 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$\mu_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \delta_{\{j\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, όπου $\delta_{\{j\}}$ σημειακή μάζα Dirac στο $\{j\}$· δηλ.

$$\mu_i(A) = \sum_{j\in A} p_j \qquad \forall A \in 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}.$$

$(X, \mathscr{B}, \mu) := \bigotimes_{i=0}^{\infty}(X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$ ο χώρος γινόμενο
(όπου όλοι οι παράγοντες $(X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$ είναι ίδιοι).
$T\colon X \to X$ το shift: $T(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$.
Η T διατηρεί το μέτρο γινόμενο μ.
Πράγματι, τα μετρήσιμα ορθογώνια της μορφής

$$B = \{i_0\} \times \{i_1\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, μαζί με το κενό σύνολο, αποτελούν π-σύστημα που παράγει την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B}$. Από το Θεώρημα παραπάνω,

$$\mu(B) = p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_n}$$

για ένα τέτοιο B. Όμως

$$T^{-1}(B) = \{0,1,\dots,k-1\} \times \{i_0\} \times \{i_1\} \times \cdots \times \{i_n\} \\ \times \prod_{i=n+2}^{\infty} \{0,1,\dots,k-1\}$$

για ένα τέτοιο B, οπότε πάλι από το Θεώρημα,

$$\mu(T^{-1}(B)) = 1\, p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_n} = p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_n}$$

επίσης.

(β) *Αμφίπλευρο Bernoulli shift*:
$(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$, $(X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$ όπως στο (α) παραπάνω.
$(X, \mathscr{B}, \mu)$ ο χώρος γινόμενο $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$
(που περιέχει αμφίπλευρες ακολουθίες $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$).
$T\colon X \to X$ το shift:

$$(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \underset{\wedge}{x_0}, x_1, x_2 \dots) \overset{T}{\longmapsto} (\dots, x_{-1}, x_0, \underset{\wedge}{x_1}, x_2, x_3 \dots),$$

όπου το σύμβολο $\wedge$ δηλώνει την θέση 0 της αμφίπλευρης ακολουθίας.
Η T διατηρεί το μέτρο γινόμενο μ και πάλι.

Παρατήρηση. Το αμφίπλευρο Bernoulli shift $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ είναι αντιστρέψιμο m.p.s.

Παρένθεση: Θεώρημα συνέπειας Kolmogorov
(Kolmogorov Consistency Theorem)

Απαιτεί κάποια τοπολογική δομή επί των χώρων πιθανότητας X_i.
Εδώ θα υποτεθεί[2] X_i, $i \in I$: πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι (δηλ. πολωνικοί χώροι) (το I αυθαίρετο σύνολο δεικτών).
$\mathscr{B}_i := \mathrm{Borel}(X_i)$, $i \in I$.
$X := \prod_{i\in I} X_i$, $\mathscr{B} = \bigotimes_{i\in I} \mathscr{B}_i$,
$(X, \mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο πάλι.

Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο δεικτών $F \subseteq I$, θα συμβολίζουμε με $\mathscr{B}^{(F)}$ την σ-άλγεβρα σε όλο το γινόμενο X, που αντιστοιχεί στην σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{i\in F} \mathscr{B}_i$ στο πεπερασμένο γινόμενο

[2] Το θεώρημα του Kolmogorov ισχύει πιο γενικά: αρκεί κάθε X_i να είναι τοπολογικός χώρος Hausdorff και κάθε μ_F να είναι tight: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K \in \mathscr{B}^{(F)}$ συμπαγές, τέτοιο ώστε $\mu_F(K) > 1 - \varepsilon$.

$\prod_{i\in F} X_i$· δηλ., συγκεκριμένα, η $\mathscr{B}^{(F)}$ αποτελείται από όλα τα σύνολα

$$\{x = (x_i)_{i\in I} \in X\colon (x_i)_{i\in F} \in A\}, \qquad A \in \bigotimes_{i\in F} \mathscr{B}_i\cdot$$

τα σύνολα αυτής της μορφής ονομάζονται κύλινδροι[3]. Το ότι η $\mathscr{B}^{(F)}$ είναι σ-άλγεβρα φαίνεται άμεσα αφού ταυτοποιείται με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{i\in F} \mathscr{B}_i$. Είναι δε προφανές ότι αν F_1, F_2 είναι δύο πεπερασμένα υποσύνολα του I με $F_1 \subseteq F_2$, τότε $\mathscr{B}^{(F_1)} \subseteq \mathscr{B}^{(F_2)}$, αφού ένας κύλινδρος

$$\{x = (x_i)_{i\in I} \in X\colon (x_i)_{i\in F_1} \in A\}$$

με $A \in \bigotimes_{i\in F_1} \mathscr{B}_i$ μπορεί να γραφεί και ως κύλινδρος

$$\begin{aligned}
&\{x = (x_i)_{i\in I} \in X\colon (x_i)_{i\in F_1} \in A\}\\
&\qquad = \{x = (x_i)_{i\in I} \in X\colon (x_i)_{i\in F_1} \in A,\ x_i \in X_i\ \forall\, i \in F_2 \smallsetminus F_1\}\\
&\qquad = \{x = (x_i)_{i\in I} \in X\colon (x_i)_{i\in F_2} \in B\}
\end{aligned}$$

με $B \in \bigotimes_{i\in F_2} \mathscr{B}_i$ (συγκεκριμένα, $B = \pi^{-1}(A)$, όπου π η προβολή $\pi\colon \prod_{i\in F_2} X_i \to \prod_{i\in F_1} X_i$, $\pi((x_i)_{i\in F_2}) = (x_i)_{i\in F_1}$).

Θεώρημα (Θεώρημα Συνέπειας Kolmogorov (Kolmogorov Consistency Theorem)· βλ. [2]). *Έστω ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο δεικτών $F \subseteq I$ μας έχει δοθεί ένα μέτρο πιθανότητας μ_F επί της σ-άλγεβρας $\mathscr{B}^{(F)}$ και ότι τα μ_F ικανοποιούν τις συνθήκες συνέπειας του Kolmogorov: αν $F_1 \subseteq F_2$ για δύο πεπερασμένα υποσύνολα $F_1, F_2 \subseteq I$, τότε*

$$\mu_{F_2}(A) = \mu_{F_1}(A) \qquad \forall\, A \in \mathscr{B}^{(F_1)}.$$

Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί της $\mathscr{B}$ που επεκτείνει κάθε μ_F: για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq I$,

$$\mu(A) = \mu_F(A) \qquad \forall\, A \in \mathscr{B}^{(F)}.$$

[3]Υπενθυμίζεται ότι ο σωστός, φορμαλιστικά, τρόπος να βλέπει κανείς τα στοιχεία ενός αυθαίρετου γινομένου $\prod_{i\in I} X_i$ είναι ως συναρτήσεις $x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ με $x_i \in X_i\ \forall\, i \in I$· τότε $(x_i)_{i\in F}$ συμβολίζει το στοιχείο του γινομένου $\prod_{i\in F} X_i$ που είναι ο περιορισμός $x|_F$ της συνάρτησης $x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ στο υποσύνολο F: $x|_F\colon F \to \bigcup_{i\in F} X_i$ η συνάρτηση επί του F που έχει τιμή x_i στο $i \in F$.

Σημείωση. Οι συνθήκες συνέπειας Kolmogorov είναι προφανώς αναγκαίες: αν υπάρχει τέτοιο μέτρο μ, τότε πρέπει να ικανοποιούνται· το θεώρημα Kolmogorov λέει ότι είναι και ικανές.

(γ) *Μονόπλευρο Markov shift*:
$P = (P_{ij})$: $k \times k$ στοχαστικός πίνακας με στοιχεία P_{ij}, $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$·
στοχαστικός σημαίνει ότι $P_{ij} \geqslant 0$ $\forall\, i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ και $\sum_{j=0}^{k-1} P_{ij} = 1$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (κάθε γραμμή αθροίζει σε 1).
$p^* = (p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$ αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1, τέτοιο ώστε $p_i \geqslant 0$ $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ και $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$·
δηλ. $p^* P = p^*$ (ή ισοδύναμα $P^* p = p$, όπου * σημαίνει ανάστροφος)· ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα πάντα υπάρχει από το Θεώρημα Perron–Frobenius.
$X = \prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\}$
$\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}$.
$T\colon X \to X$ το shift: $T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$.

Λήμμα. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου $(X, \mathscr{B})$, τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in X \colon x_m = i_0, x_{m+1} = i_1, \ldots, x_{m+n} = i_n\}) \\ = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Το shift T διατηρεί το μέτρο μ. Πράγματι, αν

$$B = \{i_0\} \times \{i_1\} \times \cdots \times \{i_0\} \times \prod_{m=n+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

ένα μετρήσιμο ορθογώνιο, τότε

$$T^{-1}(B) = \{0, 1, \ldots, k-1\} \times \{i_0\} \times \{i_1\} \times \cdots \times \{i_0\} \\ \times \prod_{m=n+2}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

και από το Λήμμα τα δύο αυτά σύνολα έχουν το ίδιο μέτρο:

$$p_{i_0} P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} \cdots P_{i_{n-1} i_n}.$$

Το Λήμμα 1 τώρα δίνει ότι η T διατηρεί το μ, επειδή τα μετρήσιμα ορθογώνια της μορφής B αποτελούν π-σύστημα του παράγει την $\mathscr{B}$.

Απόδειξη Λήμματος. Θεώρημα συνεπείας του Kolmogorov. Οι υποθέσεις για τα P και p εξασφαλίζουν ακριβώς ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος Kolmogorov ικανοποιούνται. Για μία απ' ευθείας απόδειξη, χωρίς αναφορά στο Θεώρημα Kolmogorov, βλ. Παράρτημα. Κατ' αρχήν ορίζουμε μέτρα $\mu_n = \mu_{F_n}$ επί της σ-άλγεβρας $\mathscr{B}^{(F_n)}$, όπου $F_n := \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X\colon (x_0, x_1, \dots, x_n) \in A\}) \\ = \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in A} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n}$$

για $A \in \mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$· το δεξί μέλος ορίζει μέτρο επί της σ-άλγεβρας $\mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$, γιατί η συνολοσυνάρτηση

$$A \longmapsto \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in A} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n}$$

είναι πεπερασμένα αθροιστική:

$$\sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in A_1\cup A_2} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\ = \left(\sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in A_1} + \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in A_2} \right) p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n}$$

αν A_1, A_2 είναι ξένα υποσύνολα του $\{0, 1, \dots, k-1\}^{n+1}$, άρα και αριθμήσιμα αθροιστική, αφού η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}_0 \otimes \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n = 2^{\{0,1,\dots,k-1\}^{n+1}}$ είναι πεπερασμένη· και το μέτρο αυτό είναι μέτρο πιθανότητας γιατί

$$\sum_{(i_0, i_1, \dots, i_n)\in \{0,1,\dots,k-1\}^{n+1}} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\ = \sum_{i_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\ = \sum_{i_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{k-1} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-2}\, i_{n-1}} \sum_{i_n=0}^{k-1} P_{i_{n-1}\, i_n} \\ = \sum_{i_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{k-1} p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-2}\, i_{n-1}},$$

επειδή $\sum_{j=0}^{k-1} P_{ij} = 1$ για κάθε i, και επαγωγικά

$$\sum_{(i_0,i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1,\ldots,k-1\}^{n+1}} p_{i_0} P_{i_0\,i_1} \cdots P_{i_{n-1}\,i_n} = \sum_{i_0=0}^{k-1} p_{i_0} = 1.$$

Έπεται ότι και τα μ_n είναι μέτρα πιθανότητας επί των $\mathscr{B}^{(F_n)}$.

Έλεγχος των συνθηκών συνέπειας του θεωρήματος Kolmogorov: αν $A \subseteq \{0,1,\ldots,k-1\}^{n-1}$, τότε

$$\begin{aligned}
&\mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A\}) \\
&\qquad = \mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A \times \{0,1,\ldots,k-1\}\}) \\
&\qquad = \sum_{(i_0,\ldots,i_{n-1})\in A} \sum_{j=0}^{k-1} p_{i_0} P_{i_0\,i_1} \cdots P_{i_{n-2}\,i_{n-1}} P_{i_{n-1}\,j} \\
&\qquad = \sum_{(i_0,\ldots,i_{n-1})\in A} p_{i_0} P_{i_0\,i_1} \cdots P_{i_{n-2}\,i_{n-1}} \\
&\qquad = \mu_{n-1}(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A\}).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι τα μέτρα μ_n και μ_{n-1} συμφωνούν επί της $\mathscr{B}^{(F_{n-1})}$ και άρα, επαγωγικά, ότι αν $n < m$ και άρα $F_n \subset F_m$, τα μ_n και μ_m συμφωνούν επί της $\mathscr{B}^{(F_n)}$.

Μπορεί κανείς τώρα να ορίσει μέτρα μ_F για κάθε πεπερασμένο $F \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$: αν F είναι ένα τέτοιο σύνολο και $n = \max F$, τότε

$$\mu_F(A) := \mu_n(A) \qquad \text{για} \quad A \in \mathscr{B}^{(F)} \subseteq \mathscr{B}^{(\{0,1,\ldots,n\})}.$$

Κάθε μ_F είναι μέτρο πιθανότητας, αφού ο περιορισμός μέτρου πιθανότητας σε μια σ-υπο-άλγεβρα είναι μέτρο πιθανότητας. Αν $F_1 \subset F_2$ είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, και $n_1 := \max F_1$ και $n_2 := \max F_2$, τότε πρέπει $n_1 \leqslant n_2$, και άρα

$$\mu_{F_1}(A) = \mu_{n_1}(A) = \mu_{n_2}(A) = \mu_{F_2}(A)$$

$\forall\, A \in \mathscr{B}^{(F_1)} \subseteq \mathscr{B}^{(\{0,1,\ldots,n_1\})}$.

Από το θεώρημα Kolmogorov, υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ επί της σ-άλγεβρας $\mathscr{B} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_n$ που επεκτείνει κάθε μ_F· συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_n = i_n\}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n}
\end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall\, (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{n+1}$. Επειδή δε $\sum_{i=0}^{k-1} p_i P_{ij} = p_j \ \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, έπεται ότι επίσης

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{x = (x_j)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon x_m = i_0, x_{m+1} = i_1, \ldots, x_{m+n} = i_n\}) \\
&= \sum_{i'_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i'_{m-1}=0}^{k-1} \mu(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in X \colon x_0 = i'_0, \ldots, x_{m-1} = i'_{m-1}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_m = i_0, x_{m+1} = i_1, \ldots, x_{m+n} = i_n\}) \\
&= \sum_{i'_0=0}^{k-1} \cdots \sum_{i'_{m-1}=0}^{k-1} p_{i'_0} P_{i'_0\, i'_1} \cdots P_{i'_{m-1}\, i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\
&= \sum_{i'_{m-1}=0}^{k-1} \cdots \sum_{i'_0=0}^{k-1} p_{i'_0} P_{i'_0\, i'_1} \cdots P_{i'_{m-1}\, i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\
&= \sum_{i'_{m-1}=0}^{k-1} \cdots \sum_{i'_1=0}^{k-1} p_{i'_1} P_{i'_1\, i'_2} \cdots P_{i'_{m-1}\, i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n} \\
&= \ldots \\
&= p_{i_0} P_{i_0\, i_1} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n},
\end{aligned}
$$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall\, (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{n+1}$. □

(δ) *Αμφίπλευρο Markov shift*:
P, p όπως στο μονόπλευρο Markov shift (γ).
$X = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \{0, 1, \ldots, k-1\}$
$\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B} = \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}$.
$T \colon X \to X$ το shift:

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \underset{\wedge}{x_0}, x_1, x_2 \ldots) \overset{T}{\longmapsto} (\ldots, x_{-1}, x_0, \underset{\wedge}{x_1}, x_2, x_3 \ldots)$$

($\wedge$ δηλώνει θέση 0 της αμφίπλευρης ακολουθίας).
Από το θεώρημα συνεπείας του Kolmogorov υπάρχει πάλι μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου $(X, \mathscr{B})$, τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
\mu(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X \colon x_m = i_0, x_{m+1} = i_1, \ldots, x_{m+n} = i_n\}) \\
= p_{i_0} P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} \cdots P_{i_{n-1} i_n}
\end{aligned}
$$

$\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και το shift T διατηρεί και πάλι το μέτρο μ.

Η ύπαρξη του παραπάνω μέτρου μπορεί να αποδειχθεί όπως και στην περίπτωση των μονόπλευρων Markov shift, με τις προφανείς αλλαγές που απαιτούνται. Συγκεκριμένα, ορίζει κανείς τώρα τα μέτρα $\mu_n = \mu_{F_n}$ με $F_n = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$, ως

$$\mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in X \colon (x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n) \in A\}) = \sum_{(i_{-n},\dots,i_n)\in A} p_{i_{-n}} P_{i_{-n}\, i_{-n-1}} \cdots P_{i_{n-1}\, i_n}$$

για $A \in \mathscr{B}_{-n} \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$, και κατόπιν για ένα αυθαίρετο $F \subset \mathbb{Z}$ πεπερασμένο,

$$\mu_F(A) := \mu_n(A) \qquad \text{για} \quad A \in \mathscr{B}^{(F)} \subseteq \mathscr{B}^{(F_n)},$$

όπου $n := \max\{|i| \colon i \in F\}$. Το ότι $\mu_n = \mu_{n-1}$ επί της σ-άλγεβρας $\mathscr{B}^{(F_{n-1})}$ επιβεβαιώνεται τώρα ως εξής: αν $A \subseteq \{0, 1, \dots, k-1\}^{2n-1}$, τότε

$$\begin{aligned}
&\mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in X \colon (x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}) \in A\}) \\
&\quad = \mu_n(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in X \colon (x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \\
&\qquad\qquad \{0, 1, \dots, k-1\} \times A \times \{0, 1, \dots, k-1\}\}) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{(i_{-n+1},\dots,i_{n-1})\in A} \sum_{j=0}^{k-1} p_i P_{i\, i_{-n+1}} P_{i_{-n+1}\, i_{-n+2}} \cdots P_{i_{n-2}\, i_{n-1}} P_{i_{n-1}\, j},
\end{aligned}$$

και επειδή ο πίνακας P είναι στοχαστικός και επομένως

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_{i_{n-1}\, j} = 1,$$

αυτό ισούται με

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{(i_{-n+1},\dots,i_{n-1})\in A} p_i P_{i\, i_{-n+1}} P_{i_{-n+1}\, i_{-n+2}} \cdots P_{i_{n-2}\, i_{n-1}}.$$

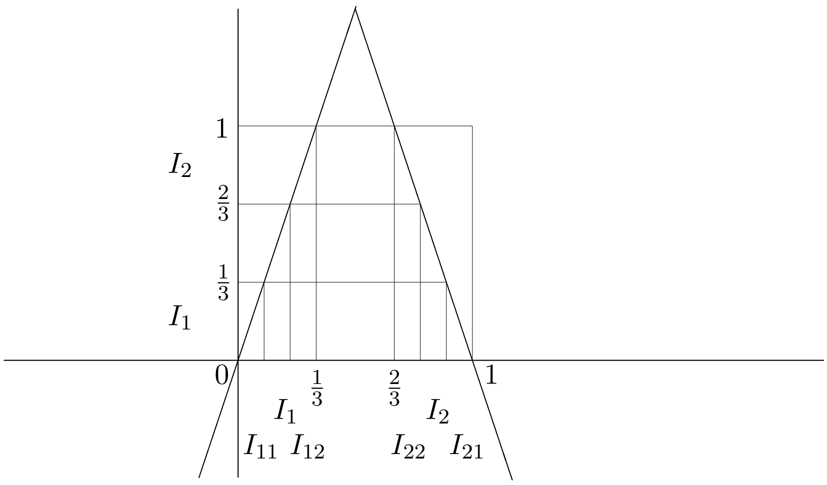
τέλος, επειδή το διάνυσμα p^* είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P, και άρα $\sum_{i=0}^{k-1} p_i P_{i\, i_{-n+1}} = p_{i_{-n+1}}$, αυτό με την σειρά του ισούται με

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(i_{-n+1},\dots,i_{n-1})\in A} p_{i_{-n+1}} P_{i_{-n+1}\, i_{-n+2}} \cdots P_{i_{n-2}\, i_{n-1}} \\
&\qquad = \mu_{n-1}(\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in X \colon (x_{-n+1}, \dots, x_{n-1}) \in A\}).
\end{aligned}$$

7. Έστω $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}3x & \text{αν } x\leqslant \frac{1}{2}\\ 3-3x & \text{αν } x>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Έστω $X:=\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([0,1])=\{x\in[0,1]\colon f^n(x)\in[0,1]\ \forall\, n\in\mathbb{N}\}$, όπου $f^n:=f\circ f\circ\cdots\circ f$ (n φορές) και $f^0=$ ταυτοτική.
Τότε X είναι το σύνολο Cantor.
$T\colon X\to X$, $T:=f|_X$.



Κωδικοποίηση:

$$I_1:=\left[0,\tfrac{1}{3}\right]\quad,\quad I_2:=\left[\tfrac{2}{3},1\right]$$

οπότε

$$f^{-1}([0,1])=I_1\cup I_2.$$

$$I_{11}:=\left[0,\tfrac{1}{9}\right]=I_1\cap f^{-1}(I_1)\quad,\quad I_{12}:=\left[\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}\right]=I_1\cap f^{-1}(I_2)$$

$$I_{21}:=\left[\tfrac{8}{9},1\right]=I_2\cap f^{-1}(I_1)\quad,\quad I_{22}:=\left[\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}\right]=I_2\cap f^{-1}(I_2)$$

οπότε

$$f^{-2}([0,1])=I_{11}\cup I_{12}\cup I_{21}\cup I_{22}.$$

Γενικά, για $(i_1,\dots,i_n)\in\{1,2\}^n$,

$$I_{i_1,\dots,i_n}:=I_{i_1}\cap f^{-1}(I_{i_2})\cap\ldots\cap f^{-(n-1)}(I_{i_n}),$$

δηλ.

$$x\in I_{i_1,\dots,i_n}\quad\Longleftrightarrow\quad x\in I_{i_1},\ f(x)\in I_{i_2},\ \dots,\ f^{n-1}(x)\in I_{i_n}.$$

Τότε μήκος$(I_{i_1,\ldots,i_n}) = 3^{-n}$, γιατί κάθε $f^{-1}(I_{i_1,\ldots,i_k})$ αποτελείται από δύο διαστήματα $I_{i_1,\ldots,i_k,1}$ και $I_{i_1,\ldots,i_k,2}$ μήκους $\frac{1}{3}\cdot$ μήκος$(I_{i_1,\ldots,i_k})$ το καθένα, αφού οι δύο κλάδοι της f έχουν κλίση 3 ο καθένας, και, για μία άπειρη ακολουθία δεικτών $(i_1, i_2, \ldots) \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$,

$$I_{i_1} \supseteq I_{i_1,i_2} \supseteq \ldots \supseteq I_{i_1,\ldots,i_n} \supseteq \ldots,$$

οπότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_n}$ είναι ένα μονοσύνολο το στοιχείο του οποίου ορίζουμε να είναι το $\pi(i_1, i_2, \ldots)$:

$$\{\pi(i_1, i_2, \ldots)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Ορίζεται έτσι μία επί απεικόνιση $\pi\colon \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to X$, επί διότι

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}} I_{i_1,\ldots,i_n},$$

η οποία είναι και συνεχής (με τον χώρο $\{1,2\}$ εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία και τον $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο)· εν προκειμένω μάλιστα, η π είναι ομοιομορφισμός. Ισχύει δε ότι, αν εφοδιάσουμε τον χώρο ακολουθιών $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ με την απεικόνιση shift, $\sigma\colon \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{1,2\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, τότε

$$T \circ \pi = \pi \circ \sigma,$$

δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \{1,2\}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \{1,2\}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "T"'] & X \end{tikzcd}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} x = \pi(i_1, i_2, \ldots) \quad &\iff \quad f^{n-1}(x) \in I_{i_n}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\implies \quad f^{n-1}(f(x)) \in I_{i_{n+1}}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\iff \quad f(x) = \pi(i_2, i_3, \ldots). \end{aligned}$$

Έστω τώρα ένα διάνυσμα πιθανότητας $(p, 1-p)$, $p \in (0,1)$, και έστω ν_p το επαγώμενο μέτρο γινόμενο στο χώρο ακολουθιών $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$· δηλ.,

$\left(\{1,2\}^{\mathbb{N}}, \otimes_{n=1}^{\infty} 2^{\{1,2\}}, \nu_p\right)$ είναι το μονόπλευρο Bernoulli shift που αντιστοιχεί σε αυτό το διάνυσμα πιθανότητας $(p, 1-p)$. Έστω $\mu_p := \pi_* \nu_p$· τότε η T διατηρεί το μ_p για κάθε p, επειδή το shift σ διατηρεί το ν_p για κάθε p:

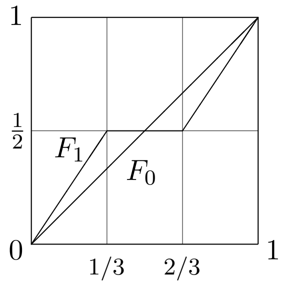
$$\begin{aligned}\mu_p(T^{-1}(B)) &= \nu_p(\pi^{-1}(T^{-1}(B))) \\ &= \nu_p(\sigma^{-1}(\pi^{-1}(B))) = \nu_p(\pi^{-1}(B)) = \mu(B).\end{aligned}$$

Για $p = \frac{1}{2}$, το μ_p είναι το μέτρο Hausdorff στην διάσταση $\log_3 2$, που είναι και η διάσταση Hausdorff του συνόλου Cantor X. (Το μέτρο αυτό είναι το 'ομοιόμορφο' μέτρο πάνω στο σύνολο Cantor, ανάλογο κατά κάποιο τρόπο του μέτρου Lebesgue στο $[0,1]$.)

Άσκηση: Έστω F_0 η συνάρτηση $F_0(x) = x$ στο $[0,1]$, και

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_{n-1}(3x) & \text{για } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{για } \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_{n-1}(3x-2) & \text{για } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Τότε οι F_n συγκλίνουν ομοιόμορφα προς μία συνεχή συνάρτηση F στο $[0,1]$. Η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση Cantor, και το μέτρο $\mu_{1/2}$ παραπάνω είναι το μέτρο στο $[0,1]$ που ορίζεται από την $\mu_{1/2}((a,b]) = F(b) - F(a)$, για $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$.



2 Θεώρημα Επαναφοράς Poincaré

Θεώρημα (Θεώρημα Επαναφοράς Poincaré).
$(X, \mathscr{B}, \mu)$ m.p.s., $\mu(X) = 1$.
$B \in \mathscr{B}$, $\mu(B) > 0$.
Τότε μ-σχεδόν κάθε σημείο του B επιστρέφει στο B άπειρες φορές:

$$\mu\left(B \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(B)\right) = \mu(B).$$

Απόδειξη. Έστω $B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(B)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι μ-σχεδόν κάθε σημείο του B επιστρέφει στο B τουλάχιστον μία φορά, δηλαδή ότι $\mu(B \cap B_1) = \mu(B)$, γιατί φαίνεται εδώ πιο καθαρά ότι χρειάζεται $\mu(X) < \infty$. Πράγματι, τα σύνολα

$$B \cap B_1^{\mathrm{c}},\ T^{-1}(B \cap B_1^{\mathrm{c}}),\ T^{-2}(B \cap B_1^{\mathrm{c}}), \ldots,$$

είναι ξένα ανά δύο ($T^{-k}(B \cap B_1^{\mathrm{c}})$ είναι τα $x \in X$ για τα οποία $T^k(x) \in B$ και $T^m(x) \notin B\ \forall\, m > k$)· αν ήταν $\mu(B \cap B_1^{\mathrm{c}}) > 0$, τότε επειδή

$$\mu\big(T^{-k}(B \cap B_1^{\mathrm{c}})\big) = \mu(B \cap B_1^{\mathrm{c}}) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

τα σύνολα αυτά θα αποτελούσαν μία άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων του ίδιου θετικού μέτρου, που αντίκειται στο γεγονός ότι $\mu(X) < \infty$.

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος. Παρατηρεί κανείς ότι

$$B_n \subseteq B_{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

και ότι

$$T^{-1}(B_{n-1}) = B_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\mu(B_n) = \mu(B_{n-1}) = \cdots = \mu(B_0) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

και επειδή η ακολουθία είναι φθίνουσα και $\mu(X) < \infty$, έχει κανείς ότι

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B_0)\cdot$$

επειδή δε $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq B_0$, έπεται ότι

$$\mu\left(B_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 0.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\mu(B \cap B_0) &= \mu\left(B \cap B_0 \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) + \mu\left((B \cap B_0) \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\
&\leqslant \mu\left(B \cap B_0 \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) + \mu\left(B_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\
&= \mu\left(B \cap B_0 \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\
&= \mu\left(B \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right).
\end{aligned}$$

Όμως $\mu(B \cap B_0) = \mu(B)$ επειδή $B \subseteq B_0$. $\square$

Παρατήρηση. Αν $\mu(X) = \infty$ το Θεώρημα επαναφοράς του Poincaré δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω $X = \mathbb{Z}$, $\mathscr{B} = 2^{\mathbb{Z}}$, μ το μέτρο $\mu(A) =$ πληθάριθμος(A) και $T(x) = x + 1$. Τότε η T διατηρεί το μέτρο μ, αλλά $B := \{0\}$ έχει θετικό μέτρο, $T^{-m}(B) = \{-m\}$ για $m \in \mathbb{N}$, οπότε $B \cap T^{-m}(B) = \varnothing$, και ήδη $B \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(B) = \{0\} \cap \{-1, -2, \ldots\} = \varnothing$, δηλαδή κανένα σημείο του B δεν επανέρχεται στο B ούτε μία φορά.

Παρατήρηση. Στην απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιήθηκε μόνο η ασθενέστερη συνθήκη ότι $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ μόνο για εκείνα τα $B \in \mathscr{B}$ για τα οποία $T^{-1}(B) \subseteq B$ (το σύστημα είναι *ασυμπίεστο*), και όχι ότι το μ είναι T-αναλλοίωτο. Επομένως το Θεώρημα επαναφοράς ισχύει ήδη για τέτοια συστήματα (ασυμπίεστα).

Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος Poincaré είναι ότι, αν $B \in \mathscr{B}$ με $\mu(B) > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu(B \cap T^{-n}(B)) > 0$· πράγματι, αν ήταν $\mu(B \cap T^{-n}(B)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα είχαμε ότι

$$\mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [B \cap T^{-n}(B)]\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap T^{-n}(B)) = 0,$$

και άρα και

$$\mu\left(B \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(B)\right) \leqslant \mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = 0$$

φυσικά. Μια γενίκευση αυτού είναι το επόμενο θεώρημα επαναφοράς του Furstenberg, που έχει σημαντικές εφαρμογές.

Θεώρημα (Furstenberg)**.**
$(X, \mathscr{B}, \mu)$ m.p.s., $\mu(X) = 1$.
$B \in \mathscr{B}$, $\mu(B) > 0$.
Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-2n}(B) \cap \ldots \cap T^{-(k-1)n}(B)) > 0.$$

3 Εργοδικότητα

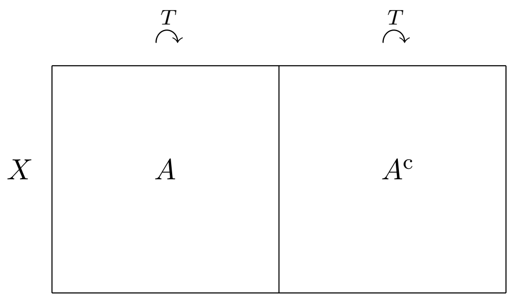
$(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ m.p.s.
Ο χώρος X υποτίθεται πως είναι ο χώρος καταστάσεων ενός φυσικού συστήματος και η απεικόνιση T παριστάνει την εξέλιξη του συστήματος με το χρόνο: αν

το σύστημα ξεκινήσει από μία αρχική κατάσταση $x \in X$, και το παρατηρούμε σε διακριτό χρόνο $n = 0, 1, \ldots,$ τότε $T(x)$ είναι η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $n = 1$, $T^2(x) = T(T(x))$ την χρονική στιγμή $n = 2$, κ.ο.κ. Η διατήρηση του μέτρου πιθανότητας μ εκφράζει το ότι η συνολική συμπεριφορά του συστήματος παραμένει αμετάβλητη με τον χρόνο: η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε μία κατάσταση $x \in A$ είναι αμετάβλητη με τον χρόνο, είναι δηλαδή ίδια την χρονική στιγμή $n = 0$ και την χρονική στιγμή $n = 1$ κ.ο.κ. Μία συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$ ή $f\colon X \to \mathbb{C}$ παριστάνει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος του συστήματος (μία μέτρηση ας πούμε).

Εργοδική Υπόθεση (Boltzmann):

$$n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \xrightarrow{n\to\infty} \int_X f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } x.$$

$\Leftrightarrow$ χρονικοί μέσοι όροι = χωρικοί μέσοι όροι.

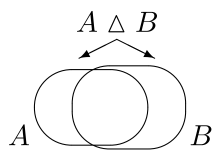


Έστω τώρα ότι υπάρχει ένα αναλλοίωτο σύνολο A, δηλαδή ένα σύνολο με την ιδιότητα $T^{-1}(A) = A$, το οποίο είναι μη τετριμμένο, δηλαδή έχει $\mu(A) \in (0, 1)$. Τότε η εργοδική υπόθεση δεν μπορεί να ισχύει: κατ' αρχήν η ιδιότητα $T^{-1}(A) = A$ συνεπάγεται ότι $T\colon A \to A$ και $T\colon A^{\mathrm{c}} \to A^{\mathrm{c}}$· επομένως, το αριστερό μέλος, $n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$, εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στο A αν το σύστημα ξεκινήσει από μία αρχική κατάσταση $x \in A$ (ή μόνο από τις τιμές της f στο A^{c} αν το σύστημα ξεκινήσει από μία αρχική κατάσταση $x \in A^{\mathrm{c}}$), ενώ το δεξί μέλος, $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$, εξαρτάται από τις τιμές της f σε όλο το X. Για παράδειγμα, αν f είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathbf{1}_{A^{\mathrm{c}}}$ του A^{c}, τότε $\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ για $x \in A$, όμως $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \mu(A^{\mathrm{c}})$ το οποίο υποτίθεται θετικό.

Ορισμός. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ m.p.s.
$A \in \mathscr{B}$ καλείται *αναλλοίωτο* αν $T^{-1}(A) = A$ και *μ-σχεδόν αναλλοίωτο*, ή *αναλλοίωτο* $\operatorname{mod} \mu$, αν $\mu(A \mathbin{\triangle} T^{-1}(A)) = 0$.

Ορισμός. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ m.p.s.
Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{C}$ καλείται *αναλλοίωτη* αν $f \circ T = f$, δηλ. $f(T(x)) = f(x)\ \forall\, x \in X$, και *αναλλοίωτη σχεδόν παντού* αν $f \circ T = f$ σχεδόν παντού.

Συμβολισμός. Για σύνολα A, B, η συμμετρική διαφορά τους είναι το σύνολο $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, ισοδύναμα, $A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$.



Παρατήρηση. Αν $(X, \mathscr{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, και $A, B \in \mathscr{B}$, τότε

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \triangle B)\cdot$$

πράγματι,

$$\begin{aligned} |\mu(A) - \mu(B)| &= \max\{\mu(A), \mu(B)\} - \min\{\mu(A), \mu(B)\} \\ &\leqslant \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A \triangle B). \end{aligned}$$

Ορισμός. Ένα m.p.s. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$, $\mu(X) = 1$, είναι *εργοδικό* αν κάθε αναλλοίωτο σύνολο έχει μέτρο μηδέν ή ένα: $A = T^{-1}(A)$, $A \in \mathscr{B} \implies \mu(A) \in \{0, 1\}$.

Σημείωση. Αν δεν απαιτήσει κανείς $\mu(X) = 1$, αλλά επιτρέπει $\mu(X) = \infty$, τότε η εργοδικότητα ορίζεται ως $A = T^{-1}(A)$, $A \in \mathscr{B} \implies \mu(A) = 0$ ή $\mu(A^c) = 0$, δηλαδή $0 \in \{\mu(A), \mu(A^c)\}$.

Πρόταση 3. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$, $\mu(X) = 1$.
Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) *Το σύστημα είναι εργοδικό.*

(2) $A \in \mathscr{B}$, $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0 \implies \mu(A) \in \{0, 1\}$.

(3) *Για κάθε* $B \in \mathscr{B}$ *με* $\mu(B) > 0$, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = 1$.

(4) *Αν* $A, B \in \mathscr{B}$ *με* $\mu(A)\mu(B) > 0$, *τότε υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0.$$

Απόδειξη. (1) ⇒ (2) Έστω $A \in \mathscr{B}$ με $\mu(A \vartriangle T^{-1}(A)) = 0$. Έστω

$$A_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

και

$$B := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A) = \limsup T^{-n}(A).$$

Τότε $T^{-1}(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq B$, αφού $T^{-1}(A_n) = A_{n+1}$ για κάθε n, και επειδή τα A_n φθίνουν, έπεται ότι $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = T^{-1}(B)$. Άρα, αφού το σύστημα είναι εργοδικό, πρέπει $\mu(B) \in \{0, 1\}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mu(A) = \mu(B)$.

Κατ' αρχήν έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
&A \vartriangle T^{-n}(A)\\
&\quad\subseteq [A \vartriangle T^{-1}(A)] \cup [T^{-1}(A) \vartriangle T^{-2}(A)] \cup \ldots \cup [T^{-(n-1)}(A) \vartriangle T^{-n}(A)].
\end{aligned}$$

Πράγματι, αν $x \in A \vartriangle T^{-n}(A)$ τότε $x \in A \cap [T^{-n}(A)]^{\mathrm{c}} = A \cap T^{-n}(A^{\mathrm{c}})$ ή $x \in A^{\mathrm{c}} \cap T^{-1}(A)$. Στην πρώτη περίπτωση, έστω k ο πρώτος φυσικός αριθμός για τον οποίο $T^{k-1}(x) \in A$ και $T^k(x) \notin A$· υπάρχει ένας τέτοιος k, και μάλιστα $1 \leqslant k \leqslant n$, επειδή υποθέτουμε ότι $x \in A$ και $T^n(x) \notin A$· τότε $x \in T^{-(k-1)}(A) \cap T^{-k}(A^{\mathrm{c}}) \subseteq T^{-(k-1)}(A) \vartriangle T^{-k}(A)$, και άρα x ανήκει και στο δεξί μέλος. Στην δεύτερη περίπτωση, έστω k ο πρώτος φυσικός αριθμός για τον οποίο $T^{k-1}(x) \notin A$ και $T^k(x) \in A$· υπάρχει ένας τέτοιος k, και μάλιστα $1 \leqslant k \leqslant n$, επειδή υποθέτουμε ότι $x \notin A$ και $T^n(x) \in A$· τότε $x \in T^{-(k-1)}(A^{\mathrm{c}}) \cap T^{-k}(A) \subseteq T^{-(k-1)}(A) \vartriangle T^{-k}(A)$, και άρα x ανήκει και στο δεξί μέλος και πάλι.

Έπεται τώρα από αυτόν τον εγκλεισμό ότι

$$\begin{aligned}
\mu(A \vartriangle T^{-n}(A)) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-(k-1)}(A) \vartriangle T^{-k}(A))\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-(k-1)}(A \vartriangle T^{-1}(A)))\\
&= n\mu(A \vartriangle T^{-1}(A)) = 0,
\end{aligned}$$

και επειδή $A \vartriangle \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A) \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A \vartriangle T^{-m}(A))$, έπεται τελικά ότι

$$\mu\left(A \vartriangle \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A \vartriangle T^{-m}(A)) = 0.$$

Άρα $\mu(A_n) = \mu(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\{0\}$, αφού

$$|\mu(A) - \mu(A_n)| \leqslant \mu(A \triangle A_n) = \mu\left(A \triangle \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right) = 0,$$

και επειδή τα A_n φθίνουν στο B και ο χώρος έχει πεπερασμένο μέτρο, έπεται ότι

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω $B \in \mathscr{B}$ με $\mu(B) > 0$, και έστω $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)$. Τότε $T^{-1}(A) = \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(B) \subseteq A$, και άρα $A \triangle T^{-1}(A) = A \setminus T^{-1}(A)$· επομένως

$$\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = \mu(A) - \mu(T^{-1}(A)) = 0.$$

Έπεται ότι $\mu(A) \in \{0, 1\}$, και επειδή $T^{-1}(B) \subseteq A$ και $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) > 0$, πρέπει $\mu(A) = 1$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω $A, B \in \mathscr{B}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$. Τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = 1$ και άρα πρέπει

$$\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \mu(A) > 0.$$

Αν ήταν $\mu(A \cap T^{-n}(B)) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε αντίφαση:

$$\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap T^{-n}(B))\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω $A \in \mathscr{B}$ με $A = T^{-1}(A)$, και έστω ότι $\mu(A) \in (0, 1)$. Τότε $\mu(A) > 0$ και $\mu(A^c) > 0$, και άρα πρέπει $\mu(A^c \cap T^{-n}(A)) > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Όμως $T^{-n}(A) = A$, και επομένως $\mu(A^c \cap T^{-n}(A)) = \mu(A^c \cap A) = 0$. $\square$

Παρατήρηση. Στην παραπάνω απόδειξη, το ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο χρησιμοποιήθηκε μόνο στο τέλος της απόδειξης του (1) $\Rightarrow$ (2), όταν επικαλεστήκαμε το γεγονός ότι $\mu(X) < \infty$ για να συμπεράνουμε, κατ' αρχήν ότι $\mu(A) = \mu(A_n)$ και κατόπιν ότι $\mu(A_n) \downarrow \mu(B)$. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί ως εξής: η ισότητα $\mu(A \triangle A_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}\{0\}$ συνεπάγεται την $\mu(A \triangle \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = 0$, αφού $A \triangle \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(A \triangle A_n)$· δηλαδή $\mu(A \triangle B) = 0$ και άρα $0 \in \{\mu(B), \mu(B^c)\} \Rightarrow 0 \in \{\mu(A), \mu(A^c)\}$. Επομένως η παραπάνω Πρόταση ισχύει και όταν $\mu(X) = \infty$, με την (3) να γίνεται (προφανώς) $B \in \mathscr{B}$, $\mu(B) > 0 \Rightarrow \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right)^c\right) = 0$.

Το (3) της παραπάνω Πρότασης 3 μπορεί να ισχυροποιηθεί ως εξής.

Πόρισμα. *Έστω* $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *εργοδικό σύστημα,* $\mu(X) = 1$. *Τότε* $B \in \mathscr{B},\ \mu(B) > 0 \implies \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(B)\right) = 1.$

Δηλαδή μ-σχεδόν κάθε σημείο $x \in X$ επισκέπτεται το B άπειρες φορές· το (3) της Πρότασης 3 ισχυρίζεται ότι μ-σχεδόν κάθε σημείο $x \in X$ επισκέπτεται το A τουλάχιστον μία φορά.

Απόδειξη. Έστω T εργοδική. Από το (3) της Πρότασης 3

$$B \in \mathscr{B},\ \mu(B) > 0 \implies \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}(B)\right) = 1.$$

Άρα, επειδή μ είναι T-αναλλοίωτο,

$$\mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right) = \mu\left(T^{-n}\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}(A)\right)\right) = 1.$$

Τέλος, επειδή τα $\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)$ φθίνουν καθώς το n αυξάνει,

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right) = 1.$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)\right)^{\mathrm{c}}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A^{\mathrm{c}})\right) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A^{\mathrm{c}})\right) = 0\end{aligned}$$

(για την περίπτωση που έχει κανείς $\mu(X) = \infty$). □

Αν το σύστημα είναι αντιστρέψιμο η Πρόταση 3 μπορεί να ισχυροποιηθεί ως εξής.

Πόρισμα. *Έστω* $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *m.p.s.,* $\mu(X) = 1$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το σύστημα είναι εργοδικό.*

(3') *Για κάθε* $B \in \mathscr{B}$ *με* $\mu(B) > 0$, $\mu\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = 1$.

(4') *Αν* $A, B \in \mathscr{B}$ *με* $\mu(A)\mu(B) > 0$, *τότε υπάρχει* $n \in \mathbb{Z}$ *τέτοιο ώστε*

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0.$$

Απόδειξη. Το ότι (1) $\Rightarrow$ (3′) είναι συνέπεια της Πρότασης 3. Τα (3′) $\Rightarrow$ (4′) και (4′) $\Rightarrow$ (1), αποδεικνύονται ακριβώς όπως και στην Πρόταση 3. □

Τέλος, σε ένα εργοδικό σύστημα δεν μπορεί να έχει κανείς μη τετριμμένα αναλλοίωτα σύνολα· δεν μπορεί να έχει όμως ούτε μη τετριμμένα σύνολα που ικανοποιούν μία από τις $T^{-1}(A) \subseteq A$ ή $T(A) \subseteq A$. Αυτό σημειώνεται γιατί στους περισσότερους κλάδους των Μαθηματικών αναλλοίωτο σημαίνει κάποια τέτοιου είδους συνθήκη.

Πόρισμα. *Αν T εργοδική, τότε $A \in \mathscr{B}$, $T^{-1}(A) \subseteq A \;\Rightarrow\; \mu(A) \in \{0,1\}$.*

Απόδειξη. Αν $A \in \mathscr{B}$, $T^{-1}(A) \subseteq A$, τότε $T^{-n}(A) \subseteq A \;\forall n \in \mathbb{N}$. Αν ήταν $\mu(A) \in (0,1)$, θα είχαμε αντίφαση στο (4) της Πρότασης 3, γιατί θα είχαμε $\mu(A) > 0$, $\mu(A^{\mathrm{c}}) > 0$, και άρα θα έπρεπε

$$\mu(A \cap A^{\mathrm{c}}) \geqslant \mu(T^{-n}(A) \cap A^{\mathrm{c}}) > 0$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. □

Ως Πόρισμα συνάγεται επίσης και το εξής:

Πόρισμα. *Αν T εργοδική, τότε $A \in \mathscr{B}$, $T(A) \subseteq A \;\Rightarrow\; \mu(A) \in \{0,1\}$.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathscr{B}$ με $T(A) \subseteq A$. Τότε $T^{-1}(A^{\mathrm{c}}) \subseteq A^{\mathrm{c}}$. Πράγματι, αν $T(x) \in A^{\mathrm{c}}$, τότε δεν μπορεί $x \in A$, γιατί τότε θα είχαμε και $T(x) \in A$ (αφού $T(A) \subseteq A$)· άρα $x \in A^{\mathrm{c}}$. Τώρα όμως έπεται από το προηγούμενο Πόρισμα ότι $\mu(A^{\mathrm{c}}) \in \{0,1\}$, και άρα και $\mu(A) \in \{0,1\}$. □

Σημείωση. Σημειώνεται ότι στο τελευταίο πόρισμα δεν απαιτείται $T(A) \in \mathscr{B}$ (δηλαδή δεν απαιτείται το $T(A)$ μετρήσιμο). Επίσης, και τα δύο Πορίσματα ισχύουν και όταν $\mu(X) = \infty$ (με $0 \in \{\mu(A), \mu(A^{\mathrm{c}})\}$ αντί του $\mu(A) \in \{0,1\}$).

Ένας άλλος χαρακτηρισμός της εργοδικότητας, πιο χρήσιμος ίσως από την Πρόταση 3, είναι μέσω αναλλοίωτων συναρτήσεων: οι μόνες αναλλοίωτες συναρτήσεις είναι οι σταθερές.

Πρόταση 4. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *m.p.s.*, $\mu(X) = 1$.

(1) *Αν το σύστημα είναι εργοδικό, τότε:*
$f\colon X \to \mathbb{C}$, *f μετρήσιμη*, $f = f \circ T$ *μ-σχεδόν παντού* $\Rightarrow$
$f =$ *σταθερή μ-σχεδόν παντού.*

(2) *Αν* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \in L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$, $f = f \circ T$ *μ-σχεδόν παντού* $\Rightarrow$
$f =$ *σταθερή μ-σχεδόν παντού,*
τότε το σύστημα είναι εργοδικό.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι το σύστημα είναι εργοδικό και έστω $f\colon X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη και αναλλοίωτη μ-σχεδόν παντού: $f = f \circ T$ μ-σχεδόν παντού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση: $f\colon X \to \mathbb{R}$ (για μιγαδικές f θεωρούμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος). Έστω

$$F_a := \{x \in X\colon f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty), \qquad a \in \mathbb{R}\cdot$$

τότε

$$F_a \triangle T^{-1}(F_a) \subseteq \{x \in X\colon f(x) \neq f(T(x))\},$$

και άρα κάθε F_a είναι αναλλοίωτο $\operatorname{mod} \mu$. Από το (2) της Πρότασης 3 έπεται ότι $\mu(F_a) \in \{0, 1\}$ για κάθε a. Έστω

$$c := \inf\{a \in \mathbb{R}\colon \mu(F_a) = 0\}\cdot$$

επειδή η συνάρτηση $a \mapsto \mu(F_a)$ ειναι μη-αύξουσα, έπεται ότι $\mu(F_a) = 0$ $\forall\, a > c$ και $\mu(F_a) = 1$ $\forall\, a < c$. Επειδή $f^{-1}(a, \infty) \uparrow f^{-1}(c, \infty)$ καθώς $a \downarrow c$, έπεται ότι

$$\mu(\{x \in X\colon f(x) > c\}) = \mu(f^{-1}(c, \infty)) = \lim_{a \downarrow c} \mu(F_a) = 0\cdot$$

και επειδή $f^{-1}((-\infty, a]) \uparrow f^{-1}(-\infty, c)$ καθώς $a \uparrow c$, έπεται ότι και

$$\mu(\{x \in X\colon f(x) < c\}) = \mu(f^{-1}(-\infty, c)) = \lim_{a \uparrow c} \mu(F_a^{c}) = 0.$$

(2) Έστω ότι κάθε αναλλοίωτη σχεδόν παντού πραγματική L^∞ συνάρτηση είναι σταθερή σχεδόν παντού. Έστω $A \in \mathscr{B}$ ένα αναλλοίωτο σύνολο: $A = T^{-1}(A)$. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $f := \mathbf{1}_A$ του A είναι αναλλοίωτη και στον $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$, άρα πρέπει να είναι σταθερή σχεδόν παντού. Δηλαδή, ή $f = 1$ σχεδόν παντού, οπότε $\mu(A) = 1$, ή $f = 0$ σχεδόν παντού, οπότε $\mu(A) = 0$. □

Παρατήρηση. Το (2) μπορεί να αντικατασταθεί από το ασθενέστερο: αν κάθε πραγματική σχεδόν παντού αναλλοίωτη L^p συνάρτηση είναι σταθερή σχεδόν παντού τότε το σύστημα είναι εργοδικό, για οποιοδήποτε $p \geqslant 1$. Αυτό επειδή για χώρους πιθανότητας $(X, \mathscr{B}, \mu)$, $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$ για κάθε $p \geqslant 1$, και άρα αν κάθε πραγματική σχεδόν παντού αναλλοίωτη L^p συνάρτηση είναι σταθερή σχεδόν παντού τότε το ίδιο συμβαίνει και για κάθε πραγματική σχεδόν παντού αναλλοίωτη L^∞ συνάρτηση f (αφού αναγκαστικά τότε $f \in L^p$ επίσης).

Παρατήρηση. Η Πρόταση 4 ισχύει και για συστήματα με $\mu(X) = \infty$. Αυτό επιβεβαιώνεται με έναν απλό έλεγχο της απόδειξης, στην οποία η συνθήκη $\mu(X) < \infty$ δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά.

Παραδείγματα

1. *Στροφές του κύκλου*: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)$.
   $a \in [0,1)$.
   $T(x) := x + a \pmod 1 = x + a - \lfloor x + a \rfloor$, $x \in [0,1)$, ή
   $T(z) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a} z$, $z \in \mathbb{S}^1$, ή
   $T(x + \mathbb{Z}) = x + a + \mathbb{Z}$, $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   Όπως είδαμε, μια τέτοια T διατηρεί το μέτρο Lebesgue στον κύκλο, που είναι το μέτρο Haar της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{S}^1$, ή μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$, που είναι το μέτρο Haar της ομάδας $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

   Πρόταση. *Η T είναι εργοδική ανν $a \notin \mathbb{Q}$.*

   Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι a άρρητος. Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4. Έστω $f \in L^2([0,1), \mathscr{B}, \lambda)$ με $f \overset{L^2}{=} f \circ T$ (όπου $\mathscr{B} = \mathrm{Borel}([0,1))$ και λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$). Τότε η f έχει ανάπτυγμα Fourier στον L^2, επειδή οι εκθετικές συναρτήσεις e_k, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}_k \colon [0,1) \to \mathbb{S}^1$, $\mathrm{e}_k(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}$, $x \in [0,1)$, αποτελούν ορθοκανονική βάση του L^2:

   $$f \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}_k, \qquad \widehat{f}(k) = \langle f, \mathrm{e}_k \rangle = \int_{[0,1)} f(x)\, \overline{\mathrm{e}_k(x)}\, \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Τότε

   $$\begin{aligned} (\widehat{f \circ T})(k) = \langle f \circ T, \mathrm{e}_k \rangle &= \int_{[0,1)} f(T(x))\, \overline{\mathrm{e}_k(x)}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[0,1)} f(x + a \pmod 1)\, \overline{\mathrm{e}_k(x)}\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

   και αν επεκτείνουμε την f περιοδικά: $f(x + k) := f(x)$ για $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [0,1)$, αυτό μπορεί να γραφεί ως

   $$\begin{aligned} (\widehat{f \circ T})(k) &= \int_{[0,1)} f(x + a)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,a+1)} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k(x-a)x}\, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ka} \int_{[a,a+1)} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ka} \int_{[0,1)} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ka} \widehat{f}(k), \end{aligned}$$

η προτελευταία ισότητα επειδή η συνάρτηση $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx}$ είναι περιοδική με περίοδο 1. Αν $f \overset{L^2}{=} f \circ T$, τότε πρέπει $\widehat{(f \circ T)}(k) = \widehat{f}(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, και άρα πρέπει

$$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ka}\widehat{f}(k) = \widehat{f}(k) \quad \iff \quad (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ka} - 1)\widehat{f}(k) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\cdot$$

επειδή $a \notin \mathbb{Q}$, $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ka} \neq 1$ $\forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, και άρα πρέπει $\widehat{f}(k) = 0$ $\forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Άρα $f \overset{L^2}{=} \widehat{f}(0)\mathrm{e}_0 = \widehat{f}(0)$, δηλαδή η f είναι σταθερή σχεδόν παντού αν είναι αναλλοίωτη σχεδόν παντού.

Για το αντίστροφο απλά παρατηρεί κανείς ότι η συνάρτηση $f(x) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx}$ είναι αναλλοίωτη αλλά όχι σταθερή αν $a = m/n$, $(m, n) = 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ρητός, και άρα η T δεν μπορεί να είναι εργοδική· πράγματι

$$f(T(x)) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n(x+a)} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(nx+na)} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(nx+m)} = f(x),$$

και $f(0) = 1$, $f(1/(2n)) = -1 \neq f(0)$. $\square$

Είναι φυσικά γνωστό ότι αν $a \notin \mathbb{Q}$, τότε το σύνολο $\{\zeta^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a}$, είναι πυκνό στον κύκλο $\mathbb{S}^1$, ισοδύναμα, $\{na \pmod 1 \colon n \in \mathbb{Z}\}$, είναι πυκνό στο $[0, 1)$. Θα δοθεί εδώ μία απόδειξη μέσω εργοδικότητας και της Πρότασης 3, κυρίως επειδή αποτελεί παράδειγμα της απόδειξης του ανάλογου αποτελέσματος για γενικές συμπαγείς ομάδες, στο επόμενο Παράδειγμα.

Το επιχείρημα έχει ως εξής. Βολεύει εδώ ίσως να θεωρήσουμε μια στροφή του κύκλου στον κύκλο (!), δηλαδή την $T(z) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a} z$, $z \in \mathbb{S}^1$. Έστω ότι το $\{\zeta^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $\zeta := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a}$, δεν είναι πυκνό στον κύκλο $\mathbb{S}^1$. Τότε υπάρχει $z \in \mathbb{S}^1$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $U_\varepsilon(z) \cap \{\zeta^n \colon n \in \mathbb{Z}\} = \varnothing$, όπου $U_\varepsilon(z)$ η ανοικτή μπάλα ακτίνας ε με κέντρο z. Ορίζουμε $U := U_\varepsilon(1) \cap \mathbb{S}^1$, η ανοικτή μπάλα ακτίνας ε με κέντρο $1 \in \mathbb{S}^1$ (στο $\mathbb{S}^1$) και $V = U_\delta(1) \cap \mathbb{S}^1$, η ανοικτή μπάλα ακτίνας $\delta := \varepsilon/2$ με κέντρο $1 \in \mathbb{S}^1$ (στο $\mathbb{S}^1$)· τότε $U_\varepsilon(z) = zU$, όπου $zU := \{zw \colon w \in U\}$ (αυτό το βήμα δεν χρειάζεται εδώ, αλλά θα βοηθήσει ίσως στην κατανόηση της αντίστοιχης απόδειξης για γενικές συμπαγείς ομάδες). Τότε, $zV \cap \zeta^n V = \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Όμως $zV \cap \zeta^{-n} V = (zV) \cap T^{-n} V$, και αν η T ήταν εργοδική θα έπρεπε, από το (3) της Πρότασης 3, $\lambda((zV) \cap T^{-n} V) > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αφού τα zV και V είναι ανοικτά σύνολα και άρα έχουν θετικό μέτρο Lebesgue (Haar). Έπεται ότι αν a άρρητος, οπότε γνωρίζουμε ότι η T είναι εργοδική, τότε το $\{\zeta^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ πρέπει να είναι πυκνό στον $\mathbb{S}^1$. (Έπεται άμεσα ότι τότε και το $\{\zeta^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό, και φυσικά και το $\{\zeta^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$.)

2. *Μεταφορές συμπαγών ομάδων.*
   G συμπαγής ομάδα, $\mathscr{B}(G)$ Borel σ-άλγεβρα της G, λ μέτρο Haar.
   $a \in G$.
   $T(x) = ax$, $x \in G$.
   Όπως έχουμε ήδη δει, η T διατηρεί το μέτρο Haar της ομάδας, εξ' ορισμού. Οι στροφές του κύκλου είναι ειδική περίπτωση αυτού.

   Παρένθεση: *Στοιχεία για τοπικά συμπαγείς ομάδες και χαρακτήρες συμπαγών αβελιανών ομάδων* ([4, 6])

   G τοπικά συμπαγής (Hausdorff) ομάδα.
   Ορισμοί: για $A, B \subseteq G$ και $x \in G$,

$$xA := \{xa \colon a \in A\}\,,\; AB := \{ab \colon a \in A, b \in B\}\,,\; A^{-1} := \{a^{-1} \colon a \in A\}.$$

   Αν $U \subseteq G$ ανοικτό, τα xU, U^{-1} είναι επίσης ανοικτά, $\forall\, x \in G$ (από την συνέχεια των συναρτήσεων $(x, y) \mapsto xy$ και $x \mapsto x^{-1}$).

   Για κάθε ανοικτή περιοχή U του $1 \in G$, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του $1 \in G$ τέτοια ώστε $V = V^{-1}$ (η V είναι συμμετρική περιοχή) και $VV \subseteq U$.

   Χαρακτήρες:
   G τοπικά συμπαγής (Hausdorff) ομάδα.
   Χαρακτήρας: ένας συνεχής ομομορφισμός $\gamma \colon G \to \mathbb{S}^1$.

   Παραδείγματα:

   - Αν $G = \mathbb{R}$, οι χαρακτήρες είναι τα εκθετικά $\mathrm{e}_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$.
   - Αν $G = \mathbb{R}^n$, οι χαρακτήρες είναι τα εκθετικά $\mathrm{e}_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ (όπου $\langle\ ,\ \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων).
   - Αν $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1)$, οι χαρακτήρες είναι τα εκθετικά $\mathrm{e}_k(x) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}$, $x \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Αν $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq [0, 1)^n$, οι χαρακτήρες είναι τα εκθετικά $\mathrm{e}_k(x) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\langle k, x\rangle}$, $x \in [0, 1)^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

   Συμβολισμός. Για G τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα, $\widehat{G}$ θα συμβολίζει το σύνολο (τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα) όλων των χαρακτήρων της.

   Πρόταση. *Αν G συμπαγής αβελιανή ομάδα, τότε οι χαρακτήρες αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(X, \mathscr{B}, \lambda)$, όπου $\mathscr{B}$ = Borel(G), λ = Haar.*

   Τέλος Παρένθεσης.

Πρόταση. *Για μια συμπαγή ομάδα G και μια μεταφορά $T\colon G \to G$ της G, $T(x) = ax$, $x \in G$, όπου $a \in G$, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(ι) *T είναι εργοδική.*

(ιι) $\overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{N}\}} = G = \overline{\{a^{-n}\colon n \in \mathbb{N}\}}$.

(ιιι) $\overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}} = G$.

(ιυ) *G αβελιανή, και $\gamma \in \widehat{G}$, $\gamma(a) = 1 \Rightarrow \gamma \equiv 1$.*

Απόδειξη. (ι) $\Rightarrow$ (ιι): Έστω ότι η T είναι εργοδική. Θέτουμε $H := \overline{\{a^{-n}\colon n \in \mathbb{N}\}}$, και έστω ότι $G \neq H$. Αφού $G \setminus H$ ανοικτό, υπάρχουν $x \in G \setminus H$ και ανοικτή περιοχή U του $1 \in G$ τέτοια ώστε $xU \cap H = \varnothing$. Έστω V ανοικτή περιοχή του $1 \in G$ τέτοια ώστε $V^{-1} = V$ και $VV \subseteq U$· ισχυριζόμαστε ότι

$$xV \cap T^{-n}(V) = \varnothing, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} y \in xV \cap T^{-n}(V) &\Rightarrow x^{-1}y \in V \text{ και } T^n(y) \in V \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y \in V \text{ και } a^n y \in V \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y \in V \text{ και } y^{-1}a^{-n} \in V \\ &\Rightarrow x^{-1}a^{-n} \in VV \subseteq U \;\Leftrightarrow\; a^{-n} \in xU, \end{aligned}$$

άτοπο. Αυτό όμως αντίκειται στο (3) της Πρότασης 3: αφού V ανοικτό, xV επίσης ανοικτό, άρα $\lambda(V) > 0$ και $\lambda(xV) > 0$, άρα θα έπρεπε $\lambda(xV \cap T^{-n}(V)) > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

(ιι) $\Rightarrow$ (ιιι): Προφανές.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιυ): Έστω ότι $\overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}} = G$, και έστω γ χαρακτήρας της G με $\gamma(a) = 1$. Τότε $\gamma(a^n) = [\gamma(a)]^n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, επειδή η γ είναι ομομορφισμός. Όμως, επειδή η γ είναι και συνεχής, έπεται ότι $\gamma(x) = 1$ για κάθε $x \in \overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}}$, και άρα για κάθε $x \in G$, αφού $\overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}} = G$.

Το ότι η G πρέπει να είναι αβελιανή έπεται από το γεγονός ότι η μονοθετική ομάδα $\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ είναι αβελιανή, άρα και $\overline{\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\}} = G$ πρέπει να είναι αβελιανή[4].

[4]Αν H αβελιανή υπο-ομάδα τότε και $\overline{H}$ αβελιανή: αν $x, y \in \overline{H}$, έστω δίκτυα x_i, y_i $i \in I$, τέτοια ώστε $x_i \to x$, $y_i \to y$· τότε $x_i y_i = y_i x_i$, και από την συνέχεια της πράξης, $x_i y_i \to xy$ και $y_i x_i \to yx$.

(ιυ) $\Rightarrow$ (ι): Έστω τώρα $f \in L^2(X, \mathscr{B}, \lambda)$ τέτοια ώστε $f \overset{L^2}{=} f \circ T$. Τότε η f έχει ανάπτυγμα Fourier:

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma, \qquad \widehat{f}(\gamma) = \langle f, \gamma \rangle = \int_G f \overline{\gamma} \, \mathrm{d}\lambda, \quad \gamma \in \widehat{G}\cdot$$

το άθροισα εδώ είναι υπό την έννοια δικτύων: για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο $\Gamma_\varepsilon \subseteq \widehat{G}$, τέτοιο ώστε $\left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} \widehat{f}(\gamma)\gamma - f \right\|_2 < \varepsilon$ για κάθε πεπερασμένο $\Gamma \supseteq \Gamma_\varepsilon$. (Τότε υπάρχει και αριθμήσιμο $\Gamma_f \subseteq \widehat{G}$ τέτοιο ώστε $\widehat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \, \gamma \notin \Gamma_f$.)

Για την $f \circ T$ έχει κανείς

$$\begin{aligned}
\widehat{(f \circ T)}(\gamma) &= \langle f \circ T, \gamma \rangle \\
&= \int_G f(T(x)) \, \overline{\gamma(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_G f(ax) \, \overline{\gamma(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_G f(ax) \, \overline{\gamma(a^{-1}ax)} \mathrm{d}x \\
&= \overline{\gamma(a^{-1})} \int_G f(ax) \, \overline{\gamma(ax)} \mathrm{d}x \qquad (\gamma \text{ ομομορφισμός}) \\
&= \overline{\gamma(a^{-1})} \int_G f(x) \, \overline{\gamma(x)} \mathrm{d}x \qquad (\text{αναλλοίωτο μέτρου Haar}) \\
&= \overline{\gamma(a^{-1})} \widehat{f}(\gamma) \\
&= \overline{\gamma(a)^{-1}} \widehat{f}(\gamma) \qquad (\gamma \text{ ομομορφισμός}) \\
&= \gamma(a) \widehat{f}(\gamma) \qquad (\gamma(a) \in \mathbb{S}^1).
\end{aligned}$$

Αφού $f \overset{L^2}{=} f \circ T$ πρέπει

$$\widehat{(f \circ T)}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad [\gamma(a) - 1]\widehat{f}(\gamma) = 0 \qquad \forall \, \gamma \in \widehat{G}.$$

Αν $\gamma(a) \neq 1$ για κάθε $\gamma \neq \mathbf{1}_G$, όπου $\mathbf{1}_G \equiv 1$ ο ταυτοτικά ένα χαρακτήρας (χαρακτηριστική συνάρτηση της G), πρέπει $\widehat{f}(\gamma) = 0$ για κάθε $\gamma \neq \mathbf{1}_G$, και άρα $f \overset{L^2}{=} \widehat{f}(\mathbf{1}_G)\mathbf{1}_G = \widehat{f}(\mathbf{1}_G)\cdot$ δηλαδή, πρέπει η f να είναι σταθερή σχεδόν παντού. $\square$

Στροφές του n-τόρου: $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)^n$.
$a_1, \dots, a_n \in [0,1)$.

$$\begin{aligned} T(x_1,\dots,x_n) &:= (x_1+a_1,\dots,x_n+a_n) \pmod 1 \\ &= (x_1+a_1 \pmod 1, \dots, x_n+a_n \pmod 1)), \end{aligned}$$

για $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1)^n$ ή

$$T(x+\mathbb{Z}^n) = x + a + \mathbb{Z}^n, \qquad x \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,$$

a το διάνυσμα με συντεταγμένες $a_1,\dots,a_n$, ή

$$T(z) := (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a_1} z_1, \dots, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a_n} z_n), \qquad (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

Έχουμε δει ότι η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue $\lambda \times \cdots \times \lambda$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον κύκλο $\mathbb{S}^1$, που είναι το μέτρο Haar της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, ή n-διάστατο μέτρο Lebesgue στο $[0,1)^n$, που είναι το μέτρο Haar της ομάδας $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Πρόταση. *Μια μεταφορά (στροφή) του n-τόρου $T\colon [0,1)^n \to [0,1)^n$, $T(x) = (x_1+a_1,\dots,x_n+a_n) \pmod 1$, $x_1,\dots,x_n \in [0,1)$, είναι εργοδική, ανν οι*

οι αριθμοί $1, a_1, \dots, a_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι επί του σώματος $\mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow \quad k_1,\dots,k_n \in \mathbb{Z},\ k_1a_1 + \cdots + k_na_n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_n = 0.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση για μεταφορές σε γενικές συμπαγείς ομάδες, η T είναι εργοδική ανν

$$\begin{aligned} &\gamma(a) \neq 1 \quad \forall \gamma \neq \mathbf{1}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\langle k,a\rangle} \neq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad k_1 = \cdots = k_n \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^n k_i a_i \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \cdots = k_n = 0, \end{aligned}$$

όπου a το διάνυσμα με συντεταγμένες $a_1,\dots,a_n$. □

3. *Επιμορφισμοί του n-τόρου*:
   $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \simeq [0,1)^n$.
   A: $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.
   Υπενθυμίζεται ότι ο A επάγει μία απεικόνιση του n-τόρου στον εαυτό

του:

$$T(x) := Ax \pmod 1 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j \pmod 1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{nj}x_j \pmod 1 \end{pmatrix},$$

ή

$$T(x+\mathbb{Z}^n) = Ax + \mathbb{Z}^n,$$

όπου x το διάνυσμα με συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_n \in [0,1)$, που είναι επιμορφισμός αν(ν) $\det(A) \neq 0$, και ότι τότε αυτή η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue στον n-τόρο.

Πρόταση. *Ο επιμορφισμός $T\colon [0,1)^n \to [0,1)^n$, $T(x) = Ax \pmod 1$, όπου A πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{Z}$, είναι εργοδικός ανν ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμή που να είναι ρίζα της μονάδας.*

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι ο T δεν έχει ιδιοτιμή ρίζα της μονάδας· θα δείξουμε ότι ο T είναι εργοδικός. Θα χρησιμοποιηθεί η Πρόταση 4 και πάλι. Έστω $f \in L^2([0,1)^n, \mathscr{B}, \lambda)$, όπου $\mathscr{B} = \mathrm{Borel}([0,1)^n)$, $\lambda =$ Lebesgue στο $[0,1)^n$, με $f \overset{L^2}{=} f \circ T$. Τότε η f έχει ανάπτυγμα Fourier στον L^2, επειδή οι εκθετικές συναρτήσεις e_k, $k \in \mathbb{Z}^n$, $\mathrm{e}_k\colon [0,1)^n \to \mathbb{S}^1$, $\mathrm{e}_k(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle k,x\rangle}$, $x \in [0,1)^n$, αποτελούν ορθοκανονική βάση του L^2 (είναι οι χαρακτήρες της ομάδας $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq [0,1)^n$):

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)\mathrm{e}_k, \qquad \widehat{f}(k) = \langle f, \mathrm{e}_k\rangle = \int_{[0,1)^n} f(x)\,\overline{\mathrm{e}_k(x)}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Επεκτείνουμε f περιοδικά: $f(x+k) := f(x)$, για $k \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0,1)^n$.

$$\begin{aligned}
\widehat{(f\circ T)}(k) &= \langle f\circ T, \mathrm{e}_k\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n} f(T(x)) \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle k,x\rangle)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1)^n} f(Ax) \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle k,x\rangle)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1)^n} f(Ax) \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle k,A^{-1}Ax\rangle)\,\mathrm{d}x \\
&= [\det(A)]^{-1} \int_{A[0,1)^n} f(x) \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle k,A^{-1}x\rangle)\,\mathrm{d}x \\
&= [\det(A)]^{-1} \int_{A[0,1)^n} f(x) \exp(-2\pi\mathrm{i}\langle (A^{-1})^*k,x\rangle)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

και η τελευταία σειρά ισούται με $\int_{[0,1)^n} f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x$ επειδή η συναρτήσεις f και exp είναι περιοδικές και το $T([0,1)^n)$ καλύπτει το $[0,1)^n$ ακριβώς $\det(A)$ φορές. Πράγματι, το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Διαμερίζουμε το $A[0,1)^n$ ως $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^n}[A[0,1)^n \cap ([0,1)^n + m)]$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{A[0,1)^n} f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{A[0,1)^n\cap(m+[0,1)^n)} f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{A[0,1)^n\cap(m+[0,1)^n)} f(x-m)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x-m\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{(A[0,1)^n-m)\cap[0,1)^n} f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{[0,1)^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\mathbf{1}_{A[0,1)^n-m}(x) f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{[0,1)^n}\det(A) f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\langle (A^{-1})^* k, x\rangle)\,\mathrm{d}x\\
&= [\det(A)]\,\langle f, \mathrm{e}_{(A^{-1})^* k}\rangle\\
&= [\det(A)]\,\widehat{f}((A^{-1})^* k),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η περιοδικότητα των συναρτήσεων f και exp από την δεύτερη στην τρίτη σειρά, η αλλαγή μεταβλητής $y = x-m$ στον $\mathbb{R}^n$ από την τρίτη στην τέταρτη, και κατόπιν η ισότητα $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\mathbf{1}_{A[0,1)^n-m}(x) = \det(A)$ για κάθε $x\in[0,1)^n$, που οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε σημείο x του $[0,1)^n$ καλύπτεται ακριβώς $\det(A)$ φορές από την εικόνα $T([0,1)^n) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[(A[0,1)^n - m)\cap[0,1)^n]$. Από τον παραπάνω υπολογισμό έπεται ότι

$$\widehat{(f\circ T)}(k) = \widehat{f}((A^{-1})^* k) \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n.$$

Αφού υποθέτουμε ότι $f \overset{L^2}{=} f\circ T$, πρέπει $\widehat{(f\circ T)}(k) = \widehat{f}(k)\ \forall\, k\in\mathbb{Z}^n$, και άρα πρέπει $\widehat{f}((A^{-1})^* k) = \widehat{f}(k)\ \forall\, k\in\mathbb{Z}^n$· επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, και άρα $A^*\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$, αυτό είναι ισοδύναμο με $\widehat{f}(A^* k) = \widehat{f}(k)$ $\forall\, k\in\mathbb{Z}^n$. Έπεται ότι, $\forall\, k\in\mathbb{Z}^n$, $\widehat{f}((A^*)^m k) = \widehat{f}(k)\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$· συγκεκριμένα,

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f}(A^* k) = \cdots = \widehat{f}((A^*)^m k) = \cdots\,,$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}^n$. Για $k \neq 0$ όμως, το σύνολο $\{(A^*)^m k \colon m \in \{N\} \cup \{0\}\}$ είναι άπειρο, αφού όλα τα διανύσματα $(A^*)^m k$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους: αν ήταν $(A^*)^m k = (A^*)^l k$ για δύο διαφορετικά m, l, με $m > l$ έστω, τότε θα έπρεπε $(A^*)^{m-l} k = k$ και άρα, αφού $k \neq 0$, το 1 θα ήταν ιδιοτιμή του $(A^*)^{m-l}$, και επομένως και του A^{m-l}· τότε όμως κάποια $m - l$ ρίζα της μονάδας θα ήταν ιδιοτιμή του A, άτοπο. Έπεται ότι, για $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \left|\widehat{f}(l)\right|^2 \geqslant & \sum_{l \in \{(A^*)^m k \colon m \in \{N\} \cup \{0\}\}} \left|\widehat{f}(l)\right|^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left|\widehat{f}((A^*)^m k)\right|^2 \quad \text{(τα } (A^*)^m k \text{ όλα διαφορετικά)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \qquad (\widehat{f}((A^*)^m k) = \widehat{f}(k)\ \forall\, m \in \mathbb{N}),
\end{aligned}$$

και αν $\widehat{f}(k) \neq 0$ τότε θα είχαμε $\|f\|_2 = \infty$. Επομένως, αφού $f \in L^2$, πρέπει $\widehat{f}(k) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0\}$, και άρα $f = \widehat{f}(0)\mathrm{e}_0 = \widehat{f}(0)$ σχεδόν παντού, δηλαδή η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο πίνακας A έχει για ιδιοτιμή κάποια ρίζα της μονάδας· τότε ο A^m θα έχει για ιδιοτιμή το 1, και επομένως και ο $(A^*)^m$ θα έχει για ιδιοτιμή το 1, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, και έστω ότι ο m είναι ο μικρότερος ακέραιος με την ιδιότητα αυτή. Τότε υπάρχει και ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1, και επειδή ο A έχει στοιχεία ακεραίους, υπάρχει ιδιοδιάνυσμα με συντεταγμένες ακεραίους: $\exists\, k \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0\} \colon (A^*)^m k = k$. Τότε η συνάρτηση

$$f(x) := \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, x\rangle) + \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, T(x)\rangle) + \cdots + \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, T^{m-1}(x)\rangle)$$

είναι αναλλοίωτη αλλά όχι σταθερή.

Πράγματι, επειδή η συνάρτηση $x \mapsto \exp(2\pi\mathrm{i}x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1,

$$\begin{aligned}
\exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, T(x)\rangle) &= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, (Ax - l)\rangle) \\
&= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, Ax\rangle)\exp(-2\pi\mathrm{i}\langle k, l\rangle) \\
&= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, Ax\rangle),
\end{aligned}$$

όπου l το διάνυσμα με συντεταγμένες τα ακέραια μέρη των συντεταγμένων του Ax: $\left\lfloor \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right\rfloor$, $i = 1, \dots, n$, και επαγωγικά

$$\begin{aligned}
\exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, T^m(x)\rangle) &= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, A^m x\rangle) \\
&= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle (A^*)^m k, x\rangle) = \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, x\rangle)\cdot
\end{aligned}$$

έπεται ότι

$$f(T(x)) := \sum_{j=1}^{m} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle k, T^j(x)\rangle) = \sum_{j=0}^{m-1} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle k, T^j(x)\rangle) = f(x).$$

Το ότι η f δεν είναι σταθερή το βλέπει κανείς παρατηρώντας ότι οι όροι στο άθροισμα που την ορίζουν είναι ορθογώνιες συναρτήσεις. Τα διανύσματα $k, A^*k, \dots, (A^*)^{m-1}k$ είναι όλα διαφορετικά και όλα διαφορετικά από το μηδενικό διάνυσμα, επειδή το k είναι ιδιοδιάνυσμα του $(A^*)^m$ και m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο $(A^*)^m k = k$: αν ήταν $(A^*)^l k = (A^*)^p k$ με $l, p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ και $l < p$, έστω, θα είχαμε ότι $(A^*)^{p-l} k = k$ με $0 < p - l < m$· και αν ήταν $(A^*)^l k = 0$ για κάποιο $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, τότε θα ήταν και $(A^*)^m k = 0$ και το k δεν θα μπορούσε να είναι ιδιοδιάνυσμα του $(A^*)^m$. Έπεται από αυτό ότι οι συναρτήσεις

$$\mathbf{1}_{[0,1)^n}(x), \exp(2\pi \mathrm{i}\langle k, x\rangle), \exp(2\pi \mathrm{i}\langle A^*k, x\rangle), \dots, \exp(2\pi \mathrm{i}\langle (A^*)^{m-1}k, x\rangle)$$

είναι ορθογώνιες, άρα και γραμμικά ανεξάρτητες, αφού οι συναρτήσεις αυτές είναι οι

$$\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_{A^*k}, \dots, \mathrm{e}_{(A^*)^{m-1}k},$$

και τα εκθετικά αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([0,1)^n, \mathscr{B}, \lambda)$. Όμως η f είναι το άθροισμα των $\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_{A^*k}, \dots, \mathrm{e}_{(A^*)^{m-1}k}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle k, T^j(x)\rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle k, A^j(x)\rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \exp(2\pi \mathrm{i}\langle (A^*)^j k, x\rangle) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}_{(A^*)^j k}(x), \end{aligned}$$

και αν ήταν σταθερή σχεδόν παντού, δηλ. $f = \mathrm{e}_k + \mathrm{e}_{A^*k} + \dots + \mathrm{e}_{(A^*)^{m-1}k} = c\mathrm{e}_0$ στον L^2, τότε ένας μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_{A^*k}, \dots, \mathrm{e}_{(A^*)^{m-1}k}$ θα ήταν μηδέν. $\square$

Παρατήρηση. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του συντελεστή Fourier $\widehat{(f \circ T)}(k)$ της $f \circ T$ στην προηγούμενη απόδειξη, που αποφεύγει τον απ' ευθείας υπολογισμό, είναι ως εξής. Αν $f \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \mathrm{e}_k$, τότε

$$f \circ T \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)(\mathrm{e}_k \circ T).$$

Όμως

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}_k \circ T)(x) &= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, T(x)\rangle) \\ &= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle k, Ax\rangle) \\ &= \exp(2\pi\mathrm{i}\langle A^* k, x\rangle) = \mathrm{e}_{A^* k}(x).\end{aligned}$$

Εξισώνοντας συντελεστές στα δύο αναπτύγματα

$$f \circ T \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)(\mathrm{e}_k \circ T) \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \mathrm{e}_{A^* k}$$

$$f \circ T \overset{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{(f \circ T)}(k) \mathrm{e}_k,$$

παίρνει κανείς ότι

$$\widehat{(f \circ T)}(A^* k) = \widehat{f}(k) \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{(f \circ T)}(k) = \widehat{f}((A^*)^{-1} k).$$

4. *Απεικόνιση του Gauss (Gauss map)*:
   $X = (0, 1]$, $\mathscr{B} = \mathrm{Borel}((0, 1])$.
   Η απεικόνιση Gauss
   $$T(x) := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$
   διατηρεί όπως έχουμε δει το μέτρο
   $$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{x + 1}.$$
   Το σύστημα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ είναι εργοδικό.
   Για την απόδειξη βλ. [1, § 24] ή [3, Κεφάλαιο 3].

5. *Μονόπλευρο Bernoulli shift*:
   $(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$ διάνυσμα πιθανότητας,
   (δηλ. $p_j \geqslant 0 \; \forall \, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\sum_{j=0}^{k-1} p_j = 1$).

$X_i = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\mathscr{B}_i = 2^{X_i} = 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$\mu_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \delta_{\{j\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, όπου $\delta_{\{j\}}$ σημειακή μάζα Dirac στο $\{j\}$· δηλ.

$$\mu_i(A) = \sum_{j \in A} p_j \qquad \forall A \in 2^{\{0,1,\ldots,k-1\}}.$$

$(X, \mathscr{B}, \mu) := \bigotimes_{i=0}^{\infty} (X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$ ο χώρος γινόμενο.
$T \colon X \to X$ το shift: $T(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$.

Πρόταση. *Το σύστημα Bernoulli shift $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ είναι εργοδικό.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούν τα παρακάτω Λήμματα.

Ορολογία. Έστω X μη κενό σύνολο. Ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathscr{S}$ του X αποτελεί ημι-άλγεβρα αν (ι) $\varnothing \in \mathscr{S}$· (ιι) $A, B \in \mathscr{S} \implies A \cap B \in \mathscr{S}$ (κλειστό ως προς πεπερασμένες τομές)· (ιιι) αν $A \in \mathscr{S}$, το συμπλήρωμά του A^c γράφεται σαν πεπερασμένη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{S}$.

Λήμμα Α. *Η άλγεβρα που παράγεται από μία ημι-άλγεβρα (δηλ. η μικρότερη άλγεβρα που την περιέχει) αποτελείται ακριβώς από όλες τις πεπερασμένες ξένες ενώσεις στοιχείων της.*

Λήμμα Β. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και $\mathscr{A}$ μία άλγεβρα υποσυνόλων του X που παράγει την $\mathscr{F}$. Τότε, για κάθε $B \in \mathscr{F}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ ώστε $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.*

Λήμμα Γ. *Στον χώρο shift $(X, \mathscr{B})$, τα μετρήσιμα ορθογώνια*

$$\{i_0\} \times \{i_1\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, *μαζί με το $\varnothing$, αποτελούν ημι-άλγεβρα.*

Απόδειξη Πρότασης. Έστω $A \in \mathscr{B}$ αναλλοίωτο, δηλ. $A = T^{-1}(A)$. Έστω και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει πεπερασμένη ξένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων B, τέτοια ώστε $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Παρατηρούμε τότε κατ' αρχήν ότι

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle T^{-n}(B)) &= \mu(T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(B)) \\ &= \mu(T^{-n}(A \triangle B)) \\ &= \mu(A \triangle B) < \varepsilon \end{aligned}$$

επίσης, για οποιοδήποτε n· και επειδή γενικά ισχύει ότι $(C \cap D) \mathbin{\triangle} E \subseteq (C \mathbin{\triangle} E) \cup (D \mathbin{\triangle} E)$, έπεται και ότι

$$\mu(A \mathbin{\triangle} [B \cap T^{-n}(B)]) \leqslant \mu(A \mathbin{\triangle} B) + \mu(A \mathbin{\triangle} T^{-n}(B)) < 2\varepsilon,$$

για οποιοδήποτε n.

Επειδή το B είναι πεπερασμένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων, τα σύνολα B και $T^{-n}(B)$ εξαρτώνται από ξένα σύνολα συνταγμένων για κάποιο αρκούντως μεγάλο n· δηλ. αφού

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{(i_0,\dots,i_m)\in F} \{i_0\} \times \cdots \times \{i_m\} \times \prod_{j=m+1}^{\infty} \{0,1,\dots,k-1\} \\ &= \bigcup_{(i_0,\dots,i_m)\in F} \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \colon x_0 = i_0, \dots, x_m = i_m\} \end{aligned}$$

για κάποιο πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων ακολουθιών

$$F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \{0,1,\dots,k-1\}^j,$$

το $T^{-n}(B)$ θα είναι της μορφής

$$T^{-n}(B) = \bigcup_{(i_0,\dots,i_m)\in F} \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \colon x_n = i_0, \dots, x_{n+m} = i_m\},$$

και αν n είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο μήκος μιας ακολουθίας στο F, τότε τα τμήματα $x_0, \dots, x_m$ και $x_n, \dots, x_{n+m}$ της (τυχαίας) ακολουθίας $x_0, x_1, \dots$ είναι ξένα μεταξύ τους:

$$\underbrace{x_0, \dots, x_m}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_{n+m}}, \dots\,.$$

επειδή τώρα το μ είναι μέτρο γινόμενο, από αυτό έπεται ότι

$$\mu(B \cap T^{-n}(B)) = \mu(B)\mu(T^{-n}(B)) = \mu(B)^2$$

για αυτό το n. Άρα

$$\begin{aligned} \left|\mu(A) - \mu(A)^2\right| &\leqslant |\mu(A) - \mu(B \cap T^{-n}(B))| + \left|\mu(B \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)^2\right| \\ &< 2\varepsilon + \left|\mu(B)^2 - \mu(A)^2\right| \\ &= 2\varepsilon + |\mu(B) - \mu(A)|[\mu(B) + \mu(A)] \\ &\leqslant 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το ε ήταν αυθαίρετο, αυτό αποδεικνύει ότι $\mu(A) = \mu(A)^2$ και επομένως ότι $\mu(A) \in \{0,1\}$. $\square$

Απόδειξη Λήμματος Α. Έστω $\mathscr{S}$ η ημι-άλγεβρα και έστω $\mathscr{A}$ η κλάση όλων των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathscr{S}$. Η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα: $\varnothing \in \mathscr{A}$ αφού $\varnothing \in \mathscr{S}$, εξ' ορισμού μιας ημι-άλγεβρας, και αν $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, ξένη ένωση, και $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$, ξένη ένωση, με $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{S}$, τότε $A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ είναι μια ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{S}$, άρα στην $\mathscr{A}$. Τέλος, αν A ώς άνω, τότε $A^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i=1}^n A_i^{\mathrm{c}}$, και $A_i^{\mathrm{c}} = \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}$, ξένη ένωση με $A_{i1}, \ldots, A_{im_i} \in \mathscr{S}$, επειδή κάθε $A_i \in \mathscr{S}$ και η $\mathscr{S}$ είναι ημι-άλγεβρα· τότε όμως

$$A^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{ij} = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n) \in \prod_{i=1}^n \{1,\ldots,m_i\}} A_{1j_1} \cap \ldots \cap A_{nj_n}$$

είναι μια ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{S}$, και άρα ανήκει στην $\mathscr{A}$.

Τέλος, η άλγεβρα $\mathscr{A}$ προφανώς περιέχει την $\mathscr{S}$, και κάθε άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{S}$ πρέπει να περιέχει και όλες τις πεπερασμένες ενώσεις στοιχείων της και άρα και την $\mathscr{A}$. □

Απόδειξη Λήμματος Β. Η κλάση

$$\{B \in \mathscr{B} \colon \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A \in \mathscr{A} \text{ τέτοιο ώστε } \mu(A \bigtriangleup B) < \varepsilon\}$$

είναι σ-άλγεβρα, και περιέχει προφανώς την άλγεβρα $\mathscr{A}$· άρα περιέχει και την σ-άλγεβρα που αυτή παράγει, δηλαδή την $\mathscr{B}$. □

Απόδειξη Λήμματος Γ. Αν $A = \{i_0\} \times \cdots \times \{i_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\}$ και $B = \{j_0\} \times \cdots \times \{j_m\} \times \prod_{j=m+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\}$ είναι δύο τέτοια μετρήσιμα ορθογώνια, και αν $m \leqslant n$ (έστω), τότε η τομή τους είναι ή το κενό σύνολο, αν $i_l \neq j_l$ για κάποιο $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$, ή το μικρότερο, εν προκειμένω το πρώτο, αν $i_l = j_l$ για κάθε $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$· για δε τα συμπληρώματα έχουμε ότι

$$A^{\mathrm{c}} = \bigcup_{\substack{(i'_0,\ldots,i'_n) \in \{0,1,\ldots,k-1\}^{n+1} \\ (i'_0,\ldots,i'_n) \neq (i_0,\ldots,i_n)}} \{i'_0\} \times \cdots \times \{i'_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

που είναι πεπερασμένη ξένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων της ίδιας μορφής. □

6. *Αμφίπλευρο Bernoulli shift*:
$(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$ διάνυσμα πιθανότητας.

$X_i = \{0,1,\dots,k-1\}$, $\mathscr{B}_i = 2^{X_i} = 2^{\{0,1,\dots,k-1\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$,
$\mu_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \delta_{\{j\}}$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, όπου $\delta_{\{j\}}$ σημειακή μάζα Dirac στο $\{j\}$· δηλ.

$$\mu_i(A) = \sum_{j\in A} p_j \qquad \forall A \in 2^{\{0,1,\dots,k-1\}}.$$

$(X, \mathscr{B}, \mu) := \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} (X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$ ο χώρος γινόμενο.
$T\colon X \to X$ το shift: $T(\dots, x_{-1}, \underset{\wedge}{\boldsymbol{x}_0}, x_1, \dots) = (\dots, x_0, \underset{\wedge}{x_1}, x_2, \dots)$
($\wedge$: θέση 0).

Πρόταση. *Το σύστημα* $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *είναι εργοδικό.*

Απόδειξη. Όπως ακριβώς και το μονόπλευρο Bernoulli shift. Τώρα, τα μετρήσιμα ορθογώνια της μορφής

$$\prod_{j=-\infty}^{-m-1} \{0,1,\dots,k-1\} \times \{i_{-m}\} \times \dots \times \{i_n\} \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \{0,1,\dots,k-1\},$$

$n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_{-m}, \dots, i_n \in \{0,1,\dots,k-1\}$ (ή ακόμη και τα μετρήσιμα ορθογώνια με $m = n$ μόνο, δηλαδή τα συμμετρικά), μαζί με το $\varnothing$, αποτελούν την ημι-άλγεβρα που παράγει την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B}$. □

7. Το σύστημα $(X, \mathscr{B}, \mu_p, T)$ της σελίδας 20, όπου X το σύνολο Cantor, $\mathscr{B}$ τα Borel υποσύνολα του X, μ_p το μέτρο που έχει οριστεί στην σελίδα 22, και $T\colon X \to X$ η απεικόνιση,

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{αν } x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3 - 3x & \text{αν } x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

είναι εργοδικό, για κάθε $p \in (0,1)$.

Πράγματι, αν $\pi\colon \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to X$ η απεικόνιση (συζυγία) της σελ. 21, τότε $A \subseteq X$ είναι T-αναλλοίωτο ανν $\pi^{-1}(A)$ είναι shift-αναλλοίωτο, και άρα $\mu_p(A) = \nu_p(\pi^{-1}(A)) \in \{0,1\}$ αν το A είναι T-αναλλοίωτο, από την εργοδικότητα του Bernoulli shift $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} 2^{\{1,2\}}, \nu_p, \sigma)$, όπου εδώ $\sigma\colon \{1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ είναι το shift.

4 Εργοδικά Θεωρήματα

Το Εργοδικό Θεώρημα von Neumann

$(X,\mathscr{B},\mu,T)$ m.p.s., όπου στο κεφάλαιο αυτό θα επιτρέπουμε $\mu(X)=\infty$.
Το Λήμμα 2 γενικεύεται σε χώρους με άπειρο μέτρο, με την ίδια απόδειξη:

$$T_*\mu = \mu \qquad \Longrightarrow \quad \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\circ T\,\mathrm{d}\mu$$

για κάθε $f \in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ και κάθε μετρήσιμη $f \geqslant 0$.

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $Uf := f\circ T$.
$U\colon L^p(X,\mathscr{B},\mu)\to L^p(X,\mathscr{B},\mu)$ είναι ισομετρία για κάθε $p\in[1,\infty]$:

$$\int_X |Uf|^p \mathrm{d}\mu = \int_X |f\circ T|^p \mathrm{d}\mu = \int_X (|f|^p\circ T)\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu$$

από τα παραπάνω, αφού $|f|^p \in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$· και για $p=\infty$,

$$\begin{aligned}\mu\big(\{x\in X\colon |Uf(x)|>a\}\big) &= \mu\big(\{x\in X\colon |f(T(x))|>a\}\big)\\ &= \mu\big(T^{-1}\big(\{x\in X\colon |f(x)|>a\}\big)\big)\\ &= \mu\big(\{x\in X\colon |f(x)|>a\}\big),\end{aligned}$$

οπότε

$$\mu\big(\{x\in X\colon |Uf(x)|>a\}\big)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mu\big(\{x\in X\colon |f(x)|>a\}\big).$$

Αν δε το σύστημα είναι αντιστρέψιμο, τότε ο $U\colon L^2(X,\mathscr{B},\mu)\to L^2(X,\mathscr{B},\mu)$ είναι unitary: προφανώς $U^{-1}g = g\circ T^{-1}$, αλλά και $U^*g = g\circ T^{-1}$, αφού

$$\begin{aligned}\langle Uf, g\rangle &= \int_X (f\circ T)\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu = \int_X (f\circ T)\overline{[(g\circ T^{-1})\circ T]}\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_X f\,\overline{(g\circ T^{-1})}\,\mathrm{d}T_*\mu = \int_X f\,\overline{(g\circ T^{-1})}\,\mathrm{d}\mu = \langle f, U^*g\rangle.\end{aligned}$$

Όταν $\mu(X)=1$, οι σταθερές συναρτήσεις είναι σε κάθε $L^p(X,\mathscr{B},\mu)$, και $U\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$· δηλαδή ο U έχει την ιδιοτιμή 1 ως τελεστής στον $L^p(X,\mathscr{B},\mu)$. Ο χαρακτηρισμός της εργοδικότητας της Πρότασης 4, ότι δηλαδή κάθε αναλλοίωτη συνάρτηση είναι σταθερή σχεδόν παντού, μπορεί να γραφεί και ως εξής, συναρτήσει του τελεστή U.

Πρόταση. *Το σύστημα είναι εργοδικό ανν η ιδιοτιμή* 1 *είναι απλή ιδιοτιμή για τον τελεστή* $U\colon L^2(X,\mathscr{B},\mu) \to L^2(X,\mathscr{B},\mu)$, *υπό την έννοια ότι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* 1 *έχει διάσταση ένα.*

Θεώρημα (Έργοδικό Θεώρημα von Neumann (von Neumann Mean Ergodic Theorem))**.**
$(X,\mathscr{B},\mu,T)$ *m.p.s.* ($\mu(X)=\infty$ *επιτρεπτό*).
Για κάθε $f \in L^2(X,\mathscr{B},\mu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^2} \tilde{f},$$

για κάποια $\tilde{f} \in L^2(X,\mathscr{B},\mu)$ *με* $\tilde{f}\circ T \overset{L^2}{=} \tilde{f}$.

Ορολογία. Άν Y, Z χώροι με νόρμα, και $T\colon Y \to Z$ γραμμικός τελεστής, η νόρμα του T ορίζεται ως $\|T\|; = \sup_{y\in Y\colon \|y\|\leqslant 1}\|T(y)\|$. Ένας γραμμικός T θα καλείται *συστολή* αν $\|T\| \leqslant 1$.

Το Θεώρημα von Neumann είναι ειδική περίπτωση του επομένου (που αναφέρεται με την ίδια ονομασία).

Θεώρημα (Έργοδικό Θεώρημα von Neumann για συστολές σε χώρους Hilbert (von Neumann Mean Ergodic Theorem for contractions on Hilbert space))**.**
H *χώρος Hilbert*, $U\colon H \to H$ *συστολή.*
$F := \{f \in H\colon Uf = f\}$, $P_F\colon H \to F$ *η ορθογώνια προβολή στον* F.
Τότε

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j h \xrightarrow{(n\to\infty)} P_F(h) \qquad \forall\, h \in H.$$

Σημείωση. Το F είναι προφανώς κλειστός και γραμμικός χώρος.

Λήμμα. H *χώρος Hilbert*, $U\colon H \to H$ *συστολή.*
Τότε: $\quad Uf = f \quad \Leftrightarrow \quad U^*f = f.$

Απόδειξη. Έστω ότι $Uf = f$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|U^*f - f\|^2 &= \langle U^*f - f, U^*f - f\rangle \\
&= \|U^*f\|^2 - \langle U^*f, f\rangle - \langle f, U^*f\rangle + \|f\|^2 \\
&= \|U^*f\|^2 - \langle f, Uf\rangle - \langle Uf, f\rangle + \|f\|^2 \\
&\leqslant \|f\|^2 - \langle f, Uf\rangle - \langle Uf, f\rangle + \|f\|^2 \\
&= \|Uf\|^2 - \langle f, Uf\rangle - \langle Uf, f\rangle + \|f\|^2 \\
&= \|Uf - f\|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

αφού $\|U^*\| = \|U\| \leqslant 1$. □

Λήμμα. *H χώρος Hilbert, $U\colon H \to H$ συστολή, $F = \{f \in H : Uf = f\}$.*
Έστω $N := \{Uh - h : h \in H\}$.
Τότε $N^\perp = F$, και άρα και $(\overline{N})^\perp = F$, και επομένως και $F^\perp = \overline{N}$.

Σημείωση. Το N είναι προφανώς γραμμικός χώρος.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Λήμμα,

$$\begin{aligned} g \perp N \quad &\Leftrightarrow \quad \langle g, Uh - h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle g, Uh\rangle - \langle g, h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle U^* g, h\rangle - \langle g, h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle U^* g - g, h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad U^* g - g = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Ug = g. \end{aligned}$$

Άρα $N^\perp = F$ και επομένως και $(\overline{N})^\perp = F$ (επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση της μίας μεταβλητής). Έπεται ότι και $\overline{N} = [(\overline{N})^\perp]^\perp = F^\perp$ (αφού για κάθε κλειστό υπόχωρο $(M^\perp)^\perp = M$). □

Απόδειξη Θεωρήματος. Από το τελευταίο Λήμμα

$$H = F \oplus \overline{N}.$$

Αν $f \in F$, τότε

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f = f \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Αν $g \in N$, τότε $g = Uh - h$ για κάποιο $h \in H$ και άρα

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j (Uh - h) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (U^{j+1}h - U^j h) = \frac{1}{n}(U^n h - h),$$

και

$$\left\|\frac{1}{n}(U^n h - h)\right\| \leqslant \frac{1}{n}(\|U^n h\| + \|h\|) \leqslant \frac{2}{n}\|h\| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0\cdot$$

άρα

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g\right\| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0.$$

Αν $g \in \overline{N}$, τότε $g_k \to g$ για κάποια ακολουθία $g_k \in N$, $k \in \mathbb{N}$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγει κανείς πρώτα $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\|g_k - g\| < \frac{1}{2}\varepsilon$, και κατόπιν $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\left\|n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g_k\right\| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon$· τότε

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j (g - g_k)\right\| + \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g_k\right\| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon,$$

αφού

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j (g - g_k)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|U^j (g - g_k)\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|g - g_k\| = \|g - g_k\|.$$

Επομένως

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g\right\| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \qquad \forall\, g \in \overline{N}.$$

Από τα παραπάνω έπεται το Θεώρημα, αφού κάθε $h \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$h = f + g$$

με $f \in F$ και $g \in \overline{N}$, και ο τελεστής $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} U^j$ είναι γραμμικός για κάθε n:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j h = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g \xrightarrow{(n\to\infty)} f,$$

και εξ' ορισμού $P_F(h) = f$. □

Παρατήρηση. Αν για ένα m.p.s. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ ο χώρος έχει άπειρο μέτρο, $\mu(X) = \infty$, και το σύστημα είναι εργοδικό, τότε

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^2} 0 \qquad \forall\, f \in L^2(X, \mathscr{B}, \mu).$$

Αυτό επειδή το όριο $\tilde{f}$ στο Θεώρημα von Neumann είναι αναλλοίωτο σχεδόν παντού και στον L^2· όταν το σύστημα είναι εργοδικό η $\tilde{f}$ πρέπει να είναι σταθερά σχεδόν παντού (αφού $\tilde{f} = \tilde{f} \circ T$ σχεδόν παντού) και όταν $\mu(X) = \infty$ η μόνη σταθερή συνάρτηση στον $L^2(X, \mathscr{B}, \mu)$ είναι η μηδενική.

Κατά Σημείο Εργοδικό Θεώρημα Birkhoff

Θεώρημα. $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ *m.p.s., όπου ο χώρος μέτρου* $(X,\mathscr{B},\mu)$ *υποτίθεται σ-πεπερασμένος* (*μόνο*). *Τότε*

$$\text{το όριο}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^{-1} =: \tilde{f} \quad \text{υπάρχει } \mu\text{-σχεδόν παντού} \quad \forall\, f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu).$$

Επιπλέον $\tilde{f}\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$, $\tilde{f}=\tilde{f}\circ T$, *και αν* $\mu(X)<\infty$, *τότε και* $\int_X \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

Πόρισμα. *Αν το m.p.s.* $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ *είναι επιπλέον εργοδικό, τότε*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^{-1} \xrightarrow{(n\to\infty)} \frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu),$$

αν $\mu(X)<\infty$, *και*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^{-1} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \qquad \forall\, f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu),$$

αν $\mu(X)=\infty$.

Απόδειξη. Όταν το σύστημα είναι εργοδικό, το όριο $\tilde{f}$ πρέπει να είναι ίσο με μία σταθερά σχεδόν παντού, αφού $\tilde{f}=\tilde{f}\circ T$. Αν $\mu(X)<\infty$, η συνθήκη $\int_X \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ δίνει ότι η σταθερά αυτή πρέπει να είναι $\int_X f\,\mathrm{d}\mu/\mu(X)$· αν $\mu(X)=\infty$, η σταθερά πρέπει να είναι μηδέν γιατί πρέπει $\tilde{f}\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$. □

Συμβολισμοί. Για $f\colon X\to\mathbb{C}$ θέτουμε

$$\begin{aligned} S_0 f &\equiv 0\cdot \\ S_n f &:= \sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i \\ &= f + f\circ T + \cdots + f\circ T^{n-1} \qquad\qquad n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

(παρατηρείστε ότι $S_1 f = f$)·

$$\begin{aligned} S_n^* f &:= \max\{S_0 f, S_1 f,\dots,S_n f\} \\ &= \max\{0, f, S_2 f,\dots,S_n f\} \qquad\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\cdot \end{aligned}$$

παρατηρεί κανείς ότι

$$S_n^* f \geqslant 0 \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Παρατήρηση. Παρατηρεί κανείς ότι, κατ' αρχήν $S_n(f\circ T) = (S_n f)\circ T$, και ότι

$$S_n f\circ T = f\circ T + \cdots + f\circ T^n = S_{n+1}f - f \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\cdot$$

η σχέση αυτή ισχύει και για $n = 0$: $S_0 f\circ T = 0 = S_1 f - f$.

Συμβολισμός. Για $f\colon X\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, θέτουμε

$$B_a^f := \left\{x\in X\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}S_n f(x) > a\right\}.$$

Παρατήρηση. Ειδικά για $a = 0$ παρατηρεί κανείς ότι

$$B_0^f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X\colon S_n f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X\colon S_n^* f(x) > 0\},$$

αφού $n^{-1}S_n f(x) > 0 \Leftrightarrow S_n f(x) > 0\cdot$ για τα $S_n^* f$ έχει κανείς επιπλέον ότι

$$\{x\in X\colon S_n^* f(x) > 0\}\uparrow B_0^f,$$

δηλαδή

$$\{x\in X\colon S_n^* f(x) > 0\}\subseteq \left\{x\in X\colon S_{n+1}^* f(x) > 0\right\} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Λήμμα (Maximal Ergodic Theorem).
$(X,\mathscr{B},\mu,T)$ m.p.s. (πιθανώς με $\mu(X)=\infty$).
Για $f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ πραγματική,

$$\int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0 \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},$$

και άρα και

$$\int_{B_0^f} f\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Από την σχέση $S_k f\circ T = S_{k+1}f - f$ για $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} S_n^* f\circ T &= \max\{S_0 f\circ T, S_1 f\circ T,\dots,S_n f\circ T\}\\ &= \max\{S_1 f - f, S_2 f - f,\dots,S_{n+1}f - f\},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} S_n^* f\circ T + f &= \max\{S_1 f, S_2 f,\dots,S_n f, S_{n+1}f\}\\ &\geqslant \max\{S_1 f, S_2 f,\dots,S_n f\}\\ &= \max\{0, S_1 f, S_2 f,\dots,S_n f\} \qquad (\text{όταν } S_n^* f(x) > 0)\\ &= S_n^* f\end{aligned}$$

στο σύνολο $\{x \in X \colon S_n^* f(x) > 0\}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} f \,\mathrm{d}\mu &\geqslant \int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} S_n^* f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} S_n^* f \circ T \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int\limits_X S_n^* f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} S_n^* f \circ T \,\mathrm{d}\mu \\
&\geqslant \int\limits_X S_n^* f \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X S_n^* f \circ T \,\mathrm{d}\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

η πρώτη ισότητα επειδή $S_n^* f \geqslant 0$, η δεύτερη ανισότητα επειδή $S_n^* f \circ T \geqslant 0$, και η τελευταία ισότητα επειδή η T διατηρεί το μέτρο.

Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται επειδή $\{x \in X \colon S_n^* f(x) > 0\} \uparrow B_0^f$, και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_{B_0^f} f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X f \mathbf{1}_{B_0^f} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f \mathbf{1}_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{x\in X\colon S_n^* f(x)>0\}} f \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

Πόρισμα (Μεγιστική Ανισότητα (Maximal Inequality))**.**
$(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ m.p.s. (*πιθανώς με $\mu(X) = \infty$*).
Για $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$ πραγματική,

$$\int_{B_a^f \cap A} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant a\mu\big(B_a^f \cap A\big)$$

για κάθε $A \in \mathscr{B}$ αναλλοίωτο $(T^{-1}(A) = A)$ *με $\mu(A) < \infty$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί για την περίπτωση όπου $\mu(X) < \infty$ και $A = X$, δηλαδή να δειχθεί ότι $\int_{B_a^f} f \mathrm{d}\mu \geqslant a\mu\big(B_a^f\big)$ όταν $\mu(X) < \infty$· για την γενική περίπτωση εφαρμόζει τότε κανείς αυτό για την $f|_A$ στο σύστημα $(A, \mathscr{B}_A, \mu_A, T|_A)$, όπου $\mathscr{B}_A$ ο περιορισμός της σ-άλγεβρας $\mathscr{B}$ στο A, δηλ. $\mathscr{B}_A = \{B \cap A \colon B \in \mathscr{B}\}$ και μ_A ο περιορισμός του μ στην σ-άλγεβρα $\mathscr{B}_A$.

Έστω λοιπόν ότι $\mu(X) < \infty$. Θέτουμε $g := f - a\mathbf{1}_X$ και παρατηρούμε ότι $g \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$, επειδή $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$ και $\mu(X) < \infty$. Από το maximal ergodic theorem,

$$\int_{B_0^g} g \,\mathrm{d}\mu \geqslant 0,$$

και άρα

$$\int_{B_0^g} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{B_0^g} a \,\mathrm{d}\mu = a\mu\big(B_0^g\big)\cdot$$

επειδή όμως $S_n \mathbf{1}_X = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_X \circ T^i = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_X = n\mathbf{1}_X$, και επομένως

$$n^{-1}S_n(f - a\mathbf{1}_X)(x) = n^{-1}S_n f(x) - n^{-1}S_n(a\mathbf{1}_X)(x) = n^{-1}S_n f(x) - a,$$

έπεται ότι

$$n^{-1}S_n g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^{-1}S_n f(x) > a$$

και επομένως ότι $B_0^g = B_a^f$. $\square$

Απόδειξη Θεωρήματος Birkhoff. Αρκεί κατ' αρχήν να θεωρήσει κανείς $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$ πραγματική· για μιγαδική f θεωρούμε μετά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ξεχωριστά.

Έστω λοιπόν $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$ πραγματική. Θέτουμε [5]

$$\overline{f} := \varlimsup_{n\to\infty} n^{-1}S_n f \qquad \text{και} \qquad \underline{f} := \varliminf_{n\to\infty} n^{-1}S_n f.$$

Ισχυρισμός 1: Οι $\overline{f}, \underline{f}$ είναι αναλλοίωτες.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Επειδή $S_n f \circ T = S_{n+1}f - f$, έχει κανείς ότι

$$\frac{1}{n}S_n f \circ T = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}S_{n+1}f - \frac{1}{n}f.$$

Αν, δοθέντος $x \in X$, $n_1 < n_2 < \ldots$ είναι μία ακολουθία για την οποία $n_k^{-1}S_{n_k}f(x) \to \overline{f}(x)$, τότε

$$(n_k - 1)^{-1}S_{n_k-1}f(T(x)) \to \lim_{k\to\infty} n_k^{-1}S_{n_k}f(x) = \overline{f}(x),$$

από όπου έπεται ότι $\overline{f}(T(x)) \geqslant \overline{f}(x)$· και αντίστροφα, αν $m_1 < m_2 < \ldots$ είναι μία ακολουθία για την οποία $m_k^{-1}S_{m_k}f(T(x)) \to \overline{f}(T(x))$, τότε

$$(m_k + 1)^{-1}S_{m_k+1}f(x) \to \lim_{k\to\infty} m_k^{-1}S_{m_k}f(T(x)) = \overline{f}(T(x)),$$

[5] Ελλείψει κατάλληλου ανάλογου συμβολισμού για το $\liminf$ στο LaTeX, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\overline{f}$, αντί του $\tilde{f}$ που χρησιμοποιήθηκε στην εκφώνηση του Θεωρήματος, για το $\limsup_n n^{-1}S_n f$.

από όπου έπεται ότι και $\overline{f}(x) \geqslant \overline{f}(T(x))$. Εντελώς ανάλογα αποδεικνύει κανείς ότι και $\underline{f} = \underline{f} \circ T$. ό.έ.δ.

Ορίζουμε

$$E^f_{\alpha,\beta} := \big\{x \in X : \underline{f}(x) < \alpha\big\} \cap \big\{x \in X : \overline{f}(x) > \beta\big\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ισχυρισμός 2: (α) $T^{-1}\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) = E^f_{\alpha,\beta}$·
(β) $E^f_{\alpha,\beta} = E^{-f}_{-\beta,-\alpha}$· και
(γ) $E^f_{\alpha,\beta} \subseteq B^f_\beta$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: (α) Άμεσο από Ισχυρισμό 1.
(β) $\overline{(-f)} = -\underline{f}$ και $\underline{(-f)} = -\overline{f}$, και επομένως $\underline{(-f)}(x) < -\beta \Leftrightarrow \overline{f}(x) > \beta$ και $\overline{(-f)}(x) > -\alpha \Leftrightarrow \underline{f}(x) < \alpha$.
(γ) Αν $x \in E^f_{\alpha,\beta}$, τότε $\overline{f}(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1}S_n f(x) > \beta$, και τότε φυσικά και $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}S_n f(x) > \beta$, δηλ. $x \in B^f_\beta$. ό.έ.δ.

Ισχυρισμός 3: Για $\alpha < \beta$, $\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) < \infty$.
Η απόδειξη αυτού του Ισχυρισμού θα δοθεί στο τέλος της απόδειξης του Θεωρήματος.

Ισχυρισμός 4: Για $\alpha < \beta$, $\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) = 0$.
Απόδειξη Ισχυρισμού 4: Από το Πόρισμα (Μεγιστική Ανισότητα), και χρησιμοποιώντας τον Ισχυρισμό 3 και τα (α) και (γ) του Ισχυρισμού 2, παίρνει κανείς ότι

$$\int_{E^f_{\alpha,\beta}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{B^f_\beta \cap E^f_{\alpha,\beta}} f \,\mathrm{d}\mu \geqslant \beta\mu\big(B^f_\beta \cap E^f_{\alpha,\beta}\big) = \beta\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big)\cdot$$

χρησιμοποιώντας τώρα το (β) του Ισχυρισμού 2, παίρνει κανείς και ότι

$$\int_{E^f_{\alpha,\beta}} (-f) \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^{-f}_{-\beta,-\alpha}} (-f) \,\mathrm{d}\mu \geqslant (-\alpha)\mu\big(E^{-f}_{-\beta,-\alpha}\big) = (-\alpha)\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big).$$

Άρα

$$\beta\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) \leqslant \int_{E^f_{\alpha,\beta}} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big),$$

και όταν $\alpha < \beta$ αυτό εξαναγκάζει $\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) = 0$. ό.έ.δ.

Ισχυρισμός 5: $\underline{f} = \overline{f}$ μ-σχεδόν παντού, και άρα το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n f$ υπάρχει μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη Ισχυρισμού 5: Προφανώς $\underline{f} \leqslant \overline{f}$ παντού, και

$$\left\{x \in X \colon \underline{f}(x) < \overline{f}(x)\right\} \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\\ \alpha<\beta}} E^f_{\alpha,\beta}\cdot$$

από τον προηγούμενο Ισχυρισμό 4,

$$\mu\big(\left\{x \in X \colon \underline{f}(x) < \overline{f}(x)\right\}\big) \leqslant \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\\ \alpha<\beta}} \mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) = 0\cdot$$

δηλαδή $\underline{f} = \overline{f}$ μ-σχεδόν παντού. ό.έ.δ.

Ισχυρισμός 6: $\overline{f} \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 6: Από το Λήμμα Fatou:

$$\int_X \left|\overline{f}\right| \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \left|n^{-1}S_n f\right| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X \left|n^{-1}S_n f\right| \,\mathrm{d}\mu,$$

και από την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι η T διατηρεί το μέτρο,

$$\int_X \left|n^{-1}S_n f\right| \,\mathrm{d}\mu \leqslant n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \int_X \left|f \circ T^i\right| \,\mathrm{d}\mu = n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1\cdot$$

δηλαδή $\left\|\overline{f}\right\|_1 \leqslant \|f\|_1 < \infty$. ό.έ.δ.

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκε εδώ το ότι $\overline{f} = \underline{f}$ σχεδόν παντού για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Fatou για την $\overline{f} = \varlimsup_n n^{-1}S_n f$.

Ισχυρισμός 7: $\int_X \overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ όταν $\mu(X) < \infty$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 7: Θέτουμε

$$D^f_{k,n} := \left\{x \in X \colon \frac{k}{n} \leqslant \overline{f}(x) < \frac{k+1}{n}\right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε $D^f_{k,n}$ είναι: (α) αναλλοίωτο, από τον Ισχυρισμό 1, και
(β) $D^f_{k,n} \subseteq B^f_{k/n-\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0\cdot$

πράγματι, αν $x \in D^f_{k,n}$, τότε $\overline{f}(x) = \varlimsup_n n^{-1}S_n f(x) \geqslant k/n$, επομένως και $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}S_n f(x) \geqslant k/n$, και άρα $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}S_n f(x) > k/n - \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β), και ότι $\mu(X) < \infty$, συμπεραίνουμε από το Πόρισμα (Μεγιστική Ανισότητα) ότι

$$\int_{D^f_{k,n}} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{B^f_{k/n-\varepsilon}\cap D^f_{k,n}} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)\mu\big(B^f_{k/n-\varepsilon}\cap D^f_{k,n}\big)$$
$$= \left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)\mu\big(D^f_{k,n}\big),$$

και αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, τελικά ότι

$$\int_{D^f_{k,n}} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \frac{k}{n}\mu\big(D^f_{k,n}\big), \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Όμως $\overline{f}(x) < (k+1)/n$ στο $D^f_{k,n}$· άρα

$$\int_{D^f_{k,n}} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{k+1}{n}\mu\big(D^f_{k,n}\big), \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Έπεται από τις παραπάνω ανισότητες ότι

$$\int_{D^f_{k,n}} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{D^f_{k,n}} f\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{n}\mu\big(D^f_{k,n}\big), \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Αθροίζοντας ως προς $k\in\mathbb{Z}$, και επειδή τα $D^f_{k,n}$, $k\in\mathbb{Z}$, είναι ξένα ανά δύο (για σταθερό n), έπεται ότι

$$\int_X \overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{D^f_{k,n}} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{D^f_{k,n}} f\,\mathrm{d}\mu + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\mu\big(D^f_{k,n}\big)}{n} = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \frac{\mu(X)}{n},$$

$\forall\, n\in\mathbb{N}$, και άρα τελικά ότι

$$\int_X \overline{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Όμως η ίδια ανισότητα για την $-f$ δίνει ότι

$$\int_X \overline{(-f)}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X (-f)\,\mathrm{d}\mu,$$

και αφού $\overline{(-f)} = (-\underline{f})$ έπεται τελικά ότι $\int_X \overline{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \underline{f}\,\mathrm{d}\mu$· επομένως $\int_X \overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \underline{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. ό.έ.δ.

Απόδειξη Ισχυρισμού 3: Έστω πρώτα ότι $\beta > 0$.
Επειδή υποθέτουμε ότι ο χώρος είναι σ-πεπερασμένος, και άρα υπάρχει ακολουθία υποσυνόλων $C_n \subseteq E^f_{\alpha,\beta}$ του $E^f_{\alpha,\beta}$ με πεπερασμένο μέτρο, $\mu(C_n) < \infty$,

τέτοια ώστε $\mu(C_n) \uparrow \mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big)$, αρκεί να δειχθεί ότι $\mu(C) \leqslant \beta^{-1}\|f\|_1$ για κάθε $C \in \mathscr{B}$ με $C \subseteq E^f_{\alpha,\beta}$ και $\mu(C) < \infty$. Για ένα τέτοιο C ορίζουμε $h := f - \beta\mathbf{1}_C$, και επειδή $\mu(C) < \infty$ (και $f \in L^1$), έχει κανείς ότι $h \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$. Από το Λήμμα (Maximal Ergodic Theorem) έχει κανείς ότι

$$\int_{B_0^h} h \, \mathrm{d}\mu \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{B_0^h} f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \beta \, \mu\big(C \cap B_0^h\big)\cdot$$

όμως $C \subseteq B_0^h$: πράγματι, όπως και στην απόδειξη της μεγιστικής ανισότητας (Λήμμα)

$$\begin{aligned} n^{-1}S_n h(x) &= n^{-1}S_n(f - \beta\mathbf{1}_C)(x) \\ &= n^{-1}S_n f(x) - n^{-1}S_n(\beta\mathbf{1}_C)(x) \\ &= n^{-1}S_n f(x) - \beta\mathbf{1}_C(x) \\ &\geqslant n^{-1}S_n f(x) - \beta, \end{aligned}$$

και άρα αν $x \in C \subseteq E^f_{\alpha,\beta}$, τότε επειδή $n^{-1}S_n f(x) > \beta$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αφού $\overline{f}(x) = \overline{\lim}_n \, n^{-1}S_n f(x) > \beta$ για $x \in E^f_{\alpha,\beta}$, πρέπει $n^{-1}S_n h(x) > 0$ για αυτό το n, και κατά συνέπεια $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}S_n h(x) > 0$, δηλαδή $x \in B_0^h$. Έπεται ότι η παραπάνω ανισότητα γράφεται και ως $\int_{B_0^h} f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \beta \, \mu(C)$, και άρα

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{B_0^h} |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{B_0^h} f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \beta\mu(C).$$

Αν τώρα $\beta \leqslant 0$, τότε αναγκαστικά $-\alpha > 0$ (αφού υποθέτουμε $\alpha < \beta$) και εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα για την $-f$ παίρνει κανείς ότι $\mu\big(E^f_{\alpha,\beta}\big) = \mu\big(E^{-f}_{-\beta,-\alpha}\big) \leqslant (-\alpha)^{-1}\|-f\|_1 = (-\alpha)^{-1}\|f\|_1$. ό.έ.δ.

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι τώρα πλήρης. □

Η υπόθεση ότι ο χώρος μέτρου $(X, \mathscr{B}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος στο Θεώρημα Birkhoff δεν χρειάζεται, όπως και στο Εργοδικό Θεώρημα von Neumann πιο πάνω.

Πόρισμα. *Το κατά σημείον εργοδικό Θεώρημα Birkhoff ισχύει και για συστήματα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ στα οποία ο χώρος μέτρου $(X, \mathscr{B}, \mu)$ δεν είναι σ-πεπερασμένος.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$. Τότε το σύνολο $Y_f := \{x \in X \colon f(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο: πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\big(\{x \in X \colon |f(x)| > n^{-1}\}\big) < \infty,$$

γιατί διαφορετικά θα είχαμε $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \geqslant n^{-1} \cdot \infty = \infty$· και Y_f είναι η ένωση αυτών των συνόλων: $Y_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| > n^{-1}\}$. Ορίζουμε τώρα $X_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(Y_f)$, το σύνολο δηλαδή των σημείων που επισκέπτονται το Y_f άπειρες φορές. Όπως έχουμε ήδη δει και άλλη φορά (Πρόταση 3), το X_f είναι αναλλοίωτο: $T^{-1}(X_f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(Y_f) \supseteq X_f$· όμως τα σύνολα $\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(Y_f)$ φθίνουν καθώς το n αυξάνει και άρα τελικά $T^{-1}(X_f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(Y_f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-m}(Y_f) = X_f$ (συγκεκριμένα για αυτό μας φθάνει και μόνο ότι $\bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-m}(Y_f) \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}(Y_f)$). Τέλος το X_f είναι επίσης σ-πεπερασμένο επειδή προέκυψε από το σ-πεπερασμένο Y_f με αριθμήσιμες το πλήθος συνολοθεωρητικές πράξεις: συγκεκριμένα, αν θέσει κανείς, για παράδειγμα, $C_{n,m} := T^{-m}\big(\{x \in X : |f(x)| > n^{-1}\}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε $\mu(C_{n,m}) = \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > n^{-1}\}\big) < \infty$ για κάθε m και n, και προφανώς $X_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} C_{n,m}$· οπότε τα σύνολα $X_f \cap C_{n,m}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, είναι αριθμήσιμα το πλήθος, έχουν $\mu(C_{n,m} \cap X_f) \leqslant \mu(C_{n,m}) < \infty$ το καθένα, και $X_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} (C_{n,m} \cap X_f)$.

Αφού $T^{-1}(X_f) = X_f$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα περιορισμένο στο X_f. Το Θεώρημα Birkhoff για σ-πεπερασμένους χώρους μας δίνει ότι $n^{-1} S_n f(x) \to \tilde{f}(x)$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X_f$. Η συνάρτηση $\tilde{f}$ είναι σε αυτή την φάση ορισμένη μόνο στο X_f· επεκτείνουμε την $\tilde{f}$ σε όλο το X θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ για $x \in X \setminus X_f$. Τότε έχουμε και ότι $n^{-1} S_n f(x) \to \tilde{f}(x)$ για κάθε $x \in X \setminus X_f$, αφού για $x \in X \setminus X_f$, $T^m(x) \in Y_f$ μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος από $m \in \mathbb{N}$, και άρα $f(T^m(x)) = 0$ για όλα τα m από ένα $m_x \in \mathbb{N}$ και πέρα· αυτό όμως σημαίνει ότι

$$n^{-1} S_n f(x) = n^{-1} \sum_{i=0}^{m_x - 1} f(T^i(x)) = n^{-1} S_{m_x} f(x) \xrightarrow{(n \to \infty)} 0.$$

Η επεκταμένη $\tilde{f}$ ανήκει επίσης στον $L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$, αφού η αρχική $\tilde{f}$ ανήκει στον $L^1(X_f, \mathscr{B}_{X_f}, \mu_{X_f})$ και η επέκταση είναι ίση με μηδέν στο $X \setminus X_f$. Τέλος η επεκταμένη $\tilde{f}$ είναι αναλλοίωτη σχεδόν παντού, αφού $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(T(x))$ για μ-σχεδόν κάθε x στο X_f, από το Θεώρημα Birkhoff για σ-πεπερασμένους χώρους, και προφανώς $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(T(x)) = 0$ για $x \in X \setminus X_f$, αφού $x \in X \setminus X_f \Rightarrow T(x) \in X \setminus X_f$, επειδή $T^{-1}(X_f) = X_f$. □

Κάποιες συνέπειες του Εργοδικού Θεωρήματος

Θεώρημα. $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *m.p.s.*, $\mu(X) = 1$.
Το σύστημα είναι εργοδικό ανν $\forall\, A, B \in \mathscr{B}$ *με* $\mu(A)\mu(B) > 0$ *ισχύει ότι*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}(B)) \xrightarrow{(n \to \infty)} \mu(A)\mu(B).$$

Απόδειξη. Αν ισχύει η παραπάνω σύγκλιση, τότε δοθέντων $A, B \in \mathscr{B}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$, όλοι οι όροι της ακολουθίας $n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-i}(B))$, $n \in \mathbb{N}$, πρέπει να είναι τελικά (γνήσια) θετικοί· άρα υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(A \cap T^{-i}(B)) > 0$, και άρα τελικά ένα $i \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\mu(A \cap T^{-i}(B)) > 0$. Η εργοδικότητα του συστήματος έπεται τώρα από την Πρόταση 3.

Αντίστροφα, έστω ότι το σύστημα είναι εργοδικό και έστω $A, B \in \mathscr{B}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$. Από το Θεώρημα Birkhoff,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_B \circ T^i \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu(B)$$

σχεδόν παντού. Όμως $\mathbf{1}_B \circ T^i = \mathbf{1}_{T^{-i}(B)}$ και επομένως

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{T^{-i}(B)} \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu(B)$$

σχεδόν παντού. Επομένως και

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{T^{-i}(B)}\mathbf{1}_A \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu(B)\mathbf{1}_A$$

σχεδόν παντού, και ολοκληρώνοντας

$$\int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{T^{-i}(B)}\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{(n\to\infty)} \int_X \mu(B)\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-i}(B)) \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu(A)\mu(B),$$

από το Θεώρημα κυριαρχημένης (φραγμένης) σύγκλισης, αφού οι συναρτήσεις $n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{1}_{T^{-i}(B)}\mathbf{1}_A$ είναι μη αρνητικές και φραγμένες από 1 (και αφού $\mu(X) = 1$). □

Δοθέντων $A, B \in \mathscr{B}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$, η εργοδικότητα δίνει μέσω της Πρότασης 3 την ύπαρξη ενός $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\mu\big(A \cap T^{-n}(B)\big) > 0$· το εργοδικό θεώρημα μας δίνει πολύ παραπάνω: όχι μόνο ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια n, αλλά έχει κανείς Cesàro σύγκλιση προς το $\mu(A)\mu(B) > 0$.

Θεώρημα (L^p Εργοδικό Θεώρημα)**.**
$(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ *m.p.s.*, $\mu(X) = 1$.
Για κάθε $f \in L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$, *όπου* $p \in [1, \infty)$ *αυθαίρετο,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^p} \tilde{f}$$

για κάποια $\tilde{f} \in L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$ *και* $\tilde{f} \overset{L^p}{=} \tilde{f} \circ T$.

Σημείωση. Για $p = 2$ αυτό είναι το Εργοδικό Θεώρημα von Neumann (η περίπτωση με $\mu(X) = 1$).

Απόδειξη. Έστω πρώτα $f \in L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$· τότε $f \in L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$, αφού $\mu(X) < \infty$, και το κατά σημείο εργοδικό θεώρημα Birkhoff δίνει ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow{(n\to\infty)} \tilde{f} \qquad \mu - \text{σχεδόν παντού}$$

για μία L^1 συνάρτηση $\tilde{f}$, αναλλοίωτη σχεδόν παντού. Προφανώς δε

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f \circ T^k \right\|_\infty = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \,,$$

από την τριγωνική ανισότητα και επειδή η T διατηρεί το μ· από αυτό, και επειδή προφανώς $\left| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right|^p \to \left| \tilde{f} \right|^p$ μ-σχεδόν παντού, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι και

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^p} \tilde{f}.$$

Έστω τώρα $f \in L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$, $p \geqslant 1$. Προσεγγίζουμε την f στον L^p από συναρτήσεις $f_j \in L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$· συγκεκριμένα μπορεί κανείς να πάρει $f_j := f \mathbf{1}_{[0,j]}(|f|)$, δηλ. $f_j(x) = f(x)$ αν $|f(x)| \leqslant j$ και $f(x) = 0$ αλλού. Από τα παραπάνω, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_j \circ T^k - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f_j \circ T^k \right\|_p < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

για όλα τα $m,n \geqslant n_j(\varepsilon)$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει επίσης $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|f - f_j\|_p < \frac{1}{4}\varepsilon$. Για αυτό το j τότε, και για $m,n \geqslant n_j(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f\circ T^k\right\|_p &\leqslant \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_j\circ T^k - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_j\circ T^k\right\|_p \\ &\quad + \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_j\circ T^k\right\|_p \\ &\quad + \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f\circ T^k - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_j\circ T^k\right\|_p < \varepsilon,\end{aligned}$$

επειδή ο τελεστής $g \mapsto A_k g := k^{-1}\sum_{j=0}^{k-1} g\circ T^j$ είναι συστολή για κάθε k σε κάθε L^p, από την τριγωνική ανισότητα (ανισότητα Minkowski):

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_j\circ T^k\right\|_p &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f-f_j)\circ T^k\right\|_p \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|(f-f_j)\circ T^k\right\|_p \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f-f_j\|_p \\ &= \|f-f_j\|_p\end{aligned}$$

και όμοια $\left\|m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} f\circ T^k - m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} f_j\circ T^k\right\|_p \leqslant \|f-f_j\|_p$. □

Δύο Εφαρμογές

Θεώρημα Borel για κανονικούς αριθμούς: Κάθε αριθμός στο $[0,1)$ έχει μία δυαδική αναπαράσταση

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}, \qquad x_n \in \{0,1\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\cdot$$

η παράσταση αυτή, δηλαδή η ακολουθία $(x_1, x_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, είναι μοναδική αν ο x δεν είναι δυαδικός ακέραιος:

$$x \in [0,1) \smallsetminus \{k2^{-n} \colon n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}\}.$$

Ο Émile Borel απέδειξε το 1909 ότι για Lebesgue-σχεδόν κάθε αριθμό $x \in [0,1)$ το ποσοστό των ψηφίων x_n στην δυαδική αναπαράσταση του x που είναι 0 είναι ασυμπτωτικά $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{k \in \{1,\dots,n\} \colon x_k = 0\} \xrightarrow{(n\to\infty)} \tfrac{1}{2}.$$

Μία απόδειξη μέσω του εργοδικού θεωρήματος έχει ως εξής.

Θεωρούμε το σύστημα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ όπου $X = [0,1)$, $\mathscr{B} = \text{Borel}([0,1))$, $\mu = \text{Lebesgue}$ και $T(x) = 2x \pmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$ (Παράδειγμα 4 (α) της σελίδας 5), για το οποίο γνωρίζουμε ότι διατηρεί το μέτρο και ότι είναι εργοδικό. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$, τότε $2x = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} 2^{-n}$, άρα $T(x) = x - \lfloor x \rfloor = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} 2^{-n}$· με άλλα λόγια, αν $(x_1, x_2, \dots)$ είναι η αναπαράσταση (ακολουθία που αντιστοιχεί σε) του x, τότε η αναπαράσταση του $T(x)$ είναι $(x_2, x_3, \dots)$. Επιπλέον, $x_1 = 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2})$. Επομένως

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{k \in \{1,\dots,n\} \colon x_k = 0\} \\
&\qquad = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[0,1/2)}(T^k(x)) \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu\big([0,\tfrac{1}{2})\big) = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

για Lebesgue κάθε x, από το εργοδικό θεώρημα.

Το ίδιο φυσικά αποδεικνύεται για αναπαραστάσεις σε κάθε βάση $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, θεωρώντας τις απεικονίσεις $T_k(x) = kx \pmod 1$. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{i \in \{1,\dots,n\} \colon x_i = j\} \\
&\qquad = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[j/10,(j+1)/10)}(T_{10}^i(x)) \xrightarrow{(n\to\infty)} \mu\big([\tfrac{j}{10}, \tfrac{j+1}{10})\big) = \tfrac{1}{10},
\end{aligned}$$

για την αναπαράσταση στην βάση 10. Μάλιστα επειδή αριθμήσιμη τομή συνόλων πλήρους μέτρου (δηλαδή μέτρου 1 σε έναν χώρο πιθανότητας, εδώ τον $[0,1)$) έχει πλήρες μέτρο, έχει κανείς ότι

$$\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{i \in \{1,\dots,n\} \colon x_i = j\} \xrightarrow{(n\to\infty)} \tfrac{1}{k} \qquad \forall\, j \in \{0,1,\dots,k-1\},$$

σε κάθε βάση $k \in \{2,3,\dots\}$, για Lebesgue-σχεδόν κάθε $x \in [0,1)$.

Θεώρημα ισοκατανομής mod 1 του Weyl: Ο Weyl το 1910 (όπως και οι Bohl το 1909 και Sierpisńki επίσης το 1910), απέδειξε ότι αν $a \in [0,1) \setminus \mathbb{Q}$ άρρητος αριθμός, τότε η ακολουθία

$$\{an \pmod 1 \colon n \in \mathbb{N}\} = \{an - \lfloor an \rfloor \colon n \in \mathbb{N}\}$$

είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$:

$$\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{m \in \{1,\dots,n\}\colon am \pmod 1 \in [b,c)\} \xrightarrow{(n\to\infty)} c-b$$

για κάθε διάστημα $[b,c) \subseteq [0,1)$. Το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff μας δίνει κάτι λιγότερο από αυτό, αλλά το εργοδικό θεώρημα της επόμενης παραγράφου μας δίνει το Θεώρημα Weyl (και λοιπών). Συγκεκριμένα, αν θεωρήσει κανείς την στροφή $T(x) = x + a \pmod 1$ του κύκλου, αυτή διατηρεί το μέτρο Lebesgue (μέτρο Haar της ομάδας $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) και είναι εργοδική όταν a άρρητος, και

$$\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{m \in \{1,\dots,n\}\colon x + am \pmod 1 \in [b,c)\} = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[b,c)}(T^m(x))$$

για κάθε $x \in [0,1)$· επομένως από το εργοδικό θεώρημα Birkhoff,

$$\frac{1}{n}\text{πληθάριθμος}\{m \in \{1,\dots,n\}\colon x + am \pmod 1 \in [b,c)\} \xrightarrow{(n\to\infty)} c-b$$

για κάθε x σε ένα σύνολο $A(b,c)$ μέτρου 1· το σύνολο $A(b,c)$ όμως εξαρτάται από το διάστημα $[b,c)$ και δεν μπορούμε να πάρουμε σύγκλιση σχεδόν παντού για όλα τα διαστήματα $[b,c)$ ταυτόχρονα. Το εργοδικό θεώρημα της επόμενης παραγράφου δίνει σύγκλιση για όλα τα διαστήματα ταυτόχρονα.

Συστήματα με ένα μόνο αναλλοίωτο μέτρο (uniquely ergodic systems)

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε έναν συμπαγή χώρο Hausdorff X και μία συνεχή απεικόνιση $T\colon X \to X$. $\mathscr{B}$ θα είναι η Borel σ-άλγεβρα του X, και $M_+^1(X)$ θα είναι το σύνολο των κανονικών Borel μέτρων πιθανότητας στον X· $M(X,T)$ θα είναι τα μέτρα στον $M_+^1(X)$ που είναι T-αναλλοίωτα: $\mu \in M(X,T)$ αν $\mu \in M_+^1(X)$ και $T_*\mu = \mu$, δηλαδή $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)\ \forall\, B \in \mathscr{B}$. Το (τοπολογικό δυναμικό) σύστημα (X,T) καλείται *uniquely ergodic* αν το $M(X,T)$ είναι μονοσύνολο.

Σχετικά με την ορολογία uniquely ergodic, παρατηρεί κανείς ότι, αν (X,T) είναι ένα τέτοιο σύστημα, και μ το μοναδικό T-αναλλοίωτο μέτρο, τότε το μ πρέπει να είναι εργοδικό. Πράγματι, αν υπήρχε ένα μη τετριμμένο αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathscr{B}$, δηλαδή με $\mu(A) \in (0,1)$, τότε τα μέτρα

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)} \quad \text{και} \quad \mu_{A^c}(B) := \frac{\mu(A^c \cap B)}{1-\mu(A)} \quad B \in \mathscr{B},$$

θα ήταν δύο μη τετριμμένα κανονικά T-αναλλοίωτα Borel μέτρα πιθανότητας, διάφορα από το μ:

$$\begin{aligned}\mu_A(T^{-1}(B)) &= \frac{\mu(A\cap T^{-1}(B))}{\mu(A)}\\ &= \frac{\mu(T^{-1}(A)\cap T^{-1}(B))}{\mu(A)}\\ &= \frac{\mu(T^{-1}(A\cap B))}{\mu(A)}\\ &= \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}\\ &= \mu_A(B)\end{aligned}$$

και όμοια για το μ_{A^c}. Έπεται ότι δεν υπάρχουν μη μ-τετριμμένα T-αναλλοίωτα σύνολα σε ένα uniquely ergodic σύστημα και άρα το μ είναι εργοδικό.

Θεώρημα. *Έστω (X,T) ένα σύστημα με μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο μ, όπου X συμπαγής χώρος Hausdorff και $T\colon X\to X$ συνεχής. Τότε*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{ομοιόμορφα}} \int_X f\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, f\in C(X).$$

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $f\in C(X)$ για την οποία δεν ισχύει η ομοιόμορφη σύγκλιση. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ και μία ακολουθία δεικτών $n_1<n_2<\dots$ τέτοια ώστε

$$\sup_{x\in X}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f\circ T^j(x) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \geq \varepsilon \qquad \forall\, k\in\mathbb{N},$$

και άρα για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_k\in X$, τέτοιο ώστε

$$\text{(*)}\qquad \left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f\circ T^j(x_k) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \geq \varepsilon \qquad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Ορίζουμε τα μέτρα

$$\mu_k := \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}(T^j)_*\delta_{x_k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\delta_{T^j(x_k)}, \qquad k\in\mathbb{N},$$

όπου δ_{x_k} σημειακή μάζα Dirac στο x_k και $\delta_{T^j(x_k)}$ σημειακή μάζα Dirac στο $T^j(x_k)$· δηλαδή

$$\mu_k(B) = \frac{1}{n_k}\Big(\text{πλήθος } j \in \{0,1,\dots,n_k-1\} \text{ για τα οποία } T^j(x_k) \in B\Big)$$
$$= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathbf{1}_B(T^j(x_k))$$

για κάθε $B \in \mathscr{B}$, $k \in \mathbb{N}$.

Τα κανονικά μιγαδικά μέτρα Borel, με την νόρμα ολικής κύμανσης, αποτελούν τον δυϊκό του χώρου Banach $C(X)$ (Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz. [7, Θεώρημα 6.19]), και τα μέτρα πιθανότητας ανήκουν στην μοναδιαία μπάλα αυτού του χώρου· από το θεώρημα Alaoglu, η μοναδιαία μπάλα του $C(X)^*$ είναι ασθενώς* συμπαγής, και άρα υπάρχει υπακολουθία $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ και κανονικό (μιγαδικό κατ' αρχήν) μέτρο Borel ν τέτοια ώστε $\mu_{n_{k_j}} \to \nu$ καθώς $j \to \infty$ στην ασθενή* τοπολογία: δηλ. $\int_X g\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} \to \int_X g\,\mathrm{d}\nu$ (καθώς $j \to \infty$) $\forall\, g \in C(X)$. Επιπλέον, αφού το ν είναι όριο μέτρων πιθανότητας είναι και το ίδιο τελικά μέτρο πιθανότητας: $\nu(X) = \int_X \mathbf{1}_X\,\mathrm{d}\nu = \lim_{j\to\infty}\int_X \mathbf{1}_X\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} = \mu_{n_{k_j}}(X) = 1$ (X συμπαγής), και το γραμμικό συναρτησοειδές $g \mapsto \int_X g\,\mathrm{d}\nu$ είναι 'θετικό' (μη αρνητικό) σαν όριο τέτοιων: για $g \geqslant 0$, $g \in C(X)$, $\int_X g\,\mathrm{d}\nu = \lim_{j\to\infty}\int_X g\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}}$ και $\int_X g\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} \geqslant 0\ \forall\, j \in \mathbb{N}$ αφού τα $\mu_{n_{k_j}}$ είναι μέτρα πιθανότητας, και άρα το μέτρο ν στο οποίο αντιστοιχεί πρέπει να είναι θετικό [7, Θεώρημα 2.14].

Όμως

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} = \frac{1}{n_{k_j}}\sum_{m=0}^{n_{k_j}-1} f(T^m(x_{k_j})),$$

και άρα από την (*) $\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\nu\right| \geqslant \varepsilon$, δηλαδή $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \neq \int_X f\,\mathrm{d}\nu$, και από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz $\mu \neq \nu$. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι το ν είναι T-αναλλοίωτο για να καταλήξουμε σε αντίφαση. Το επιχείρημα για αυτό είναι “standard” στην θεωρία[6].

[6]Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $M(X,T) \neq \varnothing$ για συμπαγή Hausdorff X και $T\colon X \to X$ συνεχή: απλά επιλέγουμε ένα $x \in X$ και θεωρούμε ένα ασθενώς* υπακολουθιακό όριο της ακολουθίας μέτρων πιθανότητας $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)}$· τουλάχιστον ένα τέτοιο όριο υπάρχει, από την ασθενή* συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας του $C(X)^*$· αυτό είναι το Θεώρημα Krylov–Bogolyubov.

Πράγματι, για $g \in C(X)$,

$$\begin{aligned}
\int_X g \,\mathrm{d}(T_*\nu) &= \int_X g \circ T \,\mathrm{d}\nu \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_X g \circ T \,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_{k_j}} \sum_{m=0}^{n_{k_j}-1} g(T^{m+1}(x_{k_j})) \\
&= \lim_{j\to\infty} \left[\frac{1}{n_{k_j}} \sum_{m=0}^{n_{k_j}-1} g(T^m(x_{k_j})) + \frac{g(T^{n_{k_j}}(x)) - g(x)}{n_{k_j}} \right] \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_X g \,\mathrm{d}\mu_{n_{k_j}} + 0 \\
&= \int_X g \,\mathrm{d}\nu,
\end{aligned}$$

και επομένως $T_*\nu = \nu$, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz και πάλι. $\square$

Σημείωση. Ισχύει και το αντίστροφο: αν οι μέσοι όροι $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ συγκλίνουν ομοιόμορφα προς μία σταθερά $c(f)$ για κάθε $f \in C(X)$, τότε το σύστημα (X, T) είναι uniquely ergodic. Απόδειξη: αν μ_1, μ_2 είναι δύο T-αναλλοίωτα κανονικά Borel μέτρα πιθανότητας, τότε

$$\int_X n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \,\mathrm{d}\mu_i = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f \circ T^j \,\mathrm{d}\mu_i = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f \,\mathrm{d}\mu_i = \int f \,\mathrm{d}\mu_i$$

για $i \in \{1, 2\}$, και από την άλλη

$$\int_X n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \,\mathrm{d}\mu_i \xrightarrow{(n\to\infty)} \int_X c(f) \,\mathrm{d}\mu_i = c(f),$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για $i \in \{1, 2\}$· άρα $\int_X f \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_2 \;\forall\, f \in C(X)$, και άρα πρέπει $\mu_1 = \mu_2$ από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz. Μάλιστα, όπως φαίνεται από την απόδειξη, δεν χρειάζεται καν να υποτεθεί ότι η σύγκλιση $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \to c(f)$ προς την σταθερά $c(f)$ είναι ομοιόμορφη· αυτό έπεται ως συνέπεια τελικά.

Για να πάρουμε το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl, εφαρμόζουμε το παραπάνω Θεώρημα στο σύστημα (X, T) όπου $X = [0, 1) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και $T(x) =$

$x + a \pmod 1$, με a άρρητο. Το σύστημα αυτό είναι μοναδικά εργοδικό με μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας το μέτρο Lebesgue λ. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού μπορεί να γίνει με αρμονική ανάλυση, όπως ακριβώς αποδείχθηκε και η εργοδικότητα του T. Κάθε κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel μ στον κύκλο, δηλ.την ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, καθορίζεται μονοσήμαντα από την ακολουθία των συντελεστών Fourier του μ:

$$\widehat{\mu}(k) := \int_{[0,1)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx} \, \mathrm{d}\mu \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Για ένα μέτρο μ, και επειδή για k ακέραιο η συνάρτηση $x \mapsto \exp(-2\pi \mathrm{i} kx)$ είναι περιοδική,

$$\begin{aligned} \widehat{(T_*\mu)}(k) &= \int_{[0,1)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx} \, \mathrm{d}(T_*\mu)(x) = \int_{[0,1)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kT(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{[0,1)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k(x+a)} \, \mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ka} \widehat{\mu}(k), \end{aligned}$$

και αν το μ είναι T-αναλλοίωτο, τότε πρέπει $\widehat{(T_*\mu)}(k) = \widehat{\mu}(k) \; \forall\, k \in \mathbb{Z}$, και επομένως $\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ka} - 1\right)\widehat{\mu}(k) = 0 \; \forall\, k \in \mathbb{Z}$· επειδή το a είναι άρρητος και άρα $\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ka} - 1 \neq 0 \; \forall\, k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, πρέπει $\widehat{\mu}(k) = 0 \; \forall\, k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, που σημαίνει ότι το μ πρέπει αναγκαστικά να είναι το μέτρο Lebesgue αν είναι T-αναλλοίωτο.

Από το Θεώρημα παίρνει λοιπόν κανείς ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m(x)) \xrightarrow{(n\to\infty)} \int_{[0,1)} f(y) \, \mathrm{d}y \qquad \forall x \in [0,1)$$

για κάθε $f \in C(X)$, όπου συνέχεια τώρα σημαίνει και $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = f(0)$· αν δε θεωρήσουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ έχει επεκταθεί περιοδικά στο $\mathbb{R}$: $f(x+k) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1)$ και $k \in \mathbb{Z}$, τότε αυτό γράφεται και ως

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(x + ma) \xrightarrow{(n\to\infty)} \int_{[0,1)} f(y) \, \mathrm{d}y \qquad \forall x \in [0,1)$$

για κάθε $f \in C(X)$· άρα, συγκεκριμένα,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(ma) \to \int_{[0,1)} f(y) \, \mathrm{d}y \qquad \forall\, f \in C(X).$$

Αυτό δίνει και σύγκλιση για χαρακτηριστικές συναρτήσεις διαστημάτων, $f = \mathbf{1}_{[b,c)}$.

Πράγματι, αν $0 < b < c < 1$, επιλέγουμε ακολουθίες

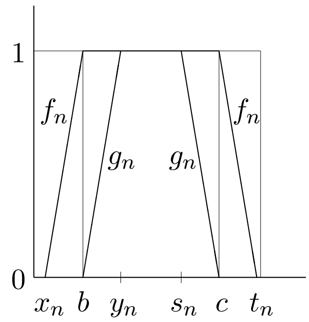
$$0 < x_1 < x_2 < \ldots \uparrow b,$$

$$y_1 > y_2 > \ldots \downarrow b \quad \text{με} \quad y_1 < (b+c)/2,$$

$$s_1 < s_2 < \ldots \uparrow c \quad \text{με} \quad s_1 > (b+c)/2,$$

και

$$t_1 > t_2 > \ldots \downarrow c \quad \text{με} \quad t_1 < 1,$$



και ορίζουμε

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [0, x_n] \cup [t_n, 1) \\ 1 & \text{αν } x \in [b, c] \end{cases}$$

και ορίζουμε την f_n 'γραμμικά' στα διαστήματα $[x_n, b]$ και $[c, t_n]$ ώστε η προκύπτουσα f_n να είναι συνεχής στο $[0, 1)$· όμοια ορίζουμε

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [0, b] \cup [c, 1) \\ 1 & \text{αν } x \in [y_n, s_n] \end{cases}$$

και ορίζουμε την g_n 'γραμμικά' στα διαστήματα $[b, y_n]$ και $[s_n, c]$ και πάλι ώστε η προκύπτουσα g_n να είναι συνεχής στο $[0, 1)$. Τότε $g_n \leqslant \mathbf{1}_{[b,c)} \leqslant f_n$ παντού. Επομένως

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} g_j(am \pmod 1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[b,c)}(am \pmod 1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f_j(am \pmod 1)$$

για κάθε j, και άρα

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} g_j(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[b,c)}(am \pmod 1) \\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[b,c)}(am \pmod 1) \leqslant \int_{[0,1)} f_j(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

για κάθε j, από το Θεώρημα, και αφού

$$\int_{[0,1)} g_j(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[0,1)} \mathbf{1}_{[b,c)}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[0,1)} f_j(x)\,\mathrm{d}x,$$

για κάθε j, και

$$0 \leqslant \int_{[0,1)} f_j(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[0,1)} g_j(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (t_j - x_j) - (s_j - y_j) \xrightarrow{(j\to\infty)} 0,$$

έπεται ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[b,c)}(am \pmod 1) \xrightarrow{(j\to\infty)} \int_{[0,1)} \mathbf{1}_{[b,c)}(x)\,\mathrm{d}x = c - b.$$

Το παραπάνω επιχείρημα δουλεύει ακριβώς γιατί $\{b\}\cup\{c\} = \partial[b,c)$ (σύνορο του $[b,c)$) έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

Αν $b = 0$, το ίδιο επιχείρημα δουλεύει· προσεγγίζουμε απλά τώρα την χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathbf{1}_{[b,c)}$ με συνεχείς συναρτήσεις f_n, g_n, όπου τα x_n επιλέγονται έτσι ώστε $x_1 < x_2 < \ldots \uparrow 1$ και $x_1 > t_1$ και $f_n = 0$ στο διάστημα $[t_n, x_n]$, $f_n = 1$ στο διάστημα $[b,c) = [0,c)$ και πάλι, και 'γραμμική' αλλού, ώστε να είναι συνεχής στο $[0,1)$ και με $\lim_{x\uparrow 1} f_n(x) = 1$.

Παράρτημα–Χώροι shift

X_i, $i \in I$, μη κενά σύνολα.
$\mathscr{B}_i$ σ-άλγεβρες υποσυνόλων των X_i, $i \in I$.
$X := \prod_{i\in I} X_i$.
Μετρήσιμα ορθογώνια: σύνολα της μορφής

$$B = \prod_{i\in I} B_i,$$

όπου

$$B_i \in \mathscr{B}_i \quad \forall\, i \in I, \qquad X_i = B_i \quad \text{εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος } i\cdot$$

όταν, ειδικότερα, το I είναι πεπερασμένο, μετρήσιμο ορθογώνιο είναι κάθε σύνολο της μορφής $\prod_{i\in I} B_i$ με $B_i \in \mathscr{B}_i$ $\forall\, i \in I$.
$\bigotimes_{i\in I} \mathscr{B}_i$ η σ-άλγεβρα γινόμενο: η μικρότερη σ-άλγεβρα που παράγεται από (περιέχει όλα τα) μετρήσιμα ορθογώνια.

Μονόπλευροι χώροι shift

Περιοριζόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου:
$I = \mathbb{N}\cdot$
$X_i = S \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$, όπου S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο·
$\mathscr{B}_i = 2^S \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Κύλινδροι: ένας κύλινδρος είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X\colon (x_1, \dots, x_n) \in A\} = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathscr{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathscr{B}_n\cdot$ εδώ ειδικά, $\mathscr{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathscr{B}_n = 2^{S^n}$. Το κενό σύνολο θα θεωρείται κύλινδρος, όπως και όλος ο χώρος X.

Λήμμα. *Η κλάση $\mathscr{C}$ όλων των κυλίνδρων αποτελεί άλγεβρα.*

Απόδειξη. $\varnothing, X \in \mathscr{C}$ εξ' ορισμού. Αν

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X\colon (x_1, \dots, x_n) \in A\} = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

είναι ένας κύλινδρος, τότε το συμπλήρωμά του είναι

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X\colon (x_1, \dots, x_n) \in A^{\mathrm{c}}\} = A^{\mathrm{c}} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i,$$

που είναι επίσης κύλινδρος. Αν, τέλος,

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon (x_1, \dots, x_m) \in B\} = B \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$$

είναι άλλος ένας κύλινδρος, έστω (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $m \geqslant n$· η ένωση των δύο κυλίνδρων είναι τότε ίση με

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon (x_1, \dots, x_m) \in C\} = C \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i,$$

όπου $C = A \cup B$ αν $m = n$ και $C = (A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m) \cup B$ αν $m > n$, που είναι επίσης κύλινδρος. □

Λήμμα. *Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους είναι η σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.*

Απόδειξη. Κάθε κύλινδρος είναι μια πεπερασμένη (ξένη) ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων: αν

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon (x_1, \dots, x_n) \in A\} = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

είναι ένας κύλινδρος, τότε

$$A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \bigcup_{(s_1,\dots,s_n)\in A} \left(\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \right).$$

Άρα κάθε κύλινδρος ανήκει στην σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$, που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, και επομένως η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους περιέχεται στην $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$. Αντίστροφα, κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο είναι ένας κύλινδρος και άρα ανήκει στην $\sigma(\mathscr{C})$· επομένως η σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, περιέχεται στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους. □

Σημείωση. Ένας κύλινδρος είναι κύλινδρος τάξης $n \in \mathbb{N}$, αν μπορεί να γραφεί στην μορφή $A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \in \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$· το κενό σύνολο είναι κύλινδρος τάξης $n = 0$. Η κλάση $\mathscr{C}_n$ των κυλίνδρων τάξης n μπορεί, προφανώς, να ταυτοποιηθεί με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$, και άρα αποτελεί σ-άλγεβρα. Η κλάση $\mathscr{C}$ όλων των κυλίνδρων είναι η ένωση $\mathscr{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{C}_n$· αφού $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}_{n+1}$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$, η $\mathscr{C}$ αποτελεί αυτόματα άλγεβρα (ένωση αύξουσας ακολουθίας αλγεβρών είναι άλγεβρα). Επιπλέον, στην απόδειξη του παραπάνω Λήμματος αποδείχθηκε ουσιαστικά ότι η $\mathscr{C}$ ταυτίζεται με την κλάση όλων των συνόλων που μπορούν να γραφούν ως πεπερασμένη ξένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων· αυτό συμβαίνει επειδή η κλάση όλων των μετρήσιμων ορθογωνίων, έστω $\mathscr{R}$, αποτελεί ημι-άλγεβρα και άρα η άλγεβρα που παράγει αποτελείται ακριβώς από πεπερασμένες ξένες ενώσεις στοιχείων της $\mathscr{R}$. Το ότι η $\mathscr{R}$ είναι ημι-άλγεβρα σημαίνει ότι (ι) $\varnothing \in \mathscr{R}$· (ιι) $A, B \in \mathscr{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{R}$ (κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές)· (ιιι) το συμπλήρωμα κάθε στοιχείου της $\mathscr{R}$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{R}$.

Λήμμα. *Αν $A_n \in \mathscr{C}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κυλίνδρων, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.*

Απόδειξη. Αυτό είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Tychonoff: αν εφοδιάσει κανείς το S με την διακριτή τοπολογία, τότε γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff (το S είναι πεπερασμένο)· από το Θεώρημα Tychonoff και το γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} 2^S$, δηλαδή ο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_i$, με την τοπολογία γινόμενο, είναι συμπαγής χώρος. Οι κύλινδροι είναι κλειστά[7] και άρα συμπαγή σύνολα στον X, και άρα μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κυλίνδρων είναι μη κενή.

Μπορεί κανείς να δώσει όμως και ένα απ' ευθείας επιχείρημα, χωρίς αναφορά στο Θεώρημα Tychonoff (και συγκεκριμένα χωρίς αναφορά στην τοπολογική δομή του παράγοντα S του γινομένου $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \prod_{n=1}^{\infty} 2^S$)· βλ. [1, σελ. 29]. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ μία ακολουθία στον κύλινδρο A_n. Διατάσσουμε τις ακολουθίες $x^{(n)}$ ως εξής:

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \cdots \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

δηλαδή η n-στη στήλη περιέχει τους όρους της ακολουθίας $x^{(n)}$. Κοιτάμε τώρα την διάταξη αυτή ανά γραμμές. Επειδή το S είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιο $s_1 \in S$ τέτοιο ώστε άπειρες ακολουθίες $x^{(n)}$, να έχουν πρώτο όρο το s_1· δηλαδή υπάρχει μία ακολουθία ακεραίων $n_1^{(1)} < n_2^{(1)} < \ldots$ τέτοια ώστε $x_1^{(n_k^{(1)})} = s_1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει υπακολουθία $n_1^{(2)} < n_2^{(2)} < \ldots$ της $n_k^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$, και $s_2 \in S$, τέτοια ώστε οι ακολουθίες $x^{(n_k^{(2)})}$ να έχουν όλες δεύτερο όρο το s_2, δηλαδή $x_2^{(n_k^{(2)})} = s_2 \, \forall \, k \in \mathbb{N}$, κ.ο.κ. Ορίζεται έτσι μία άπειρη ακολουθία $(s_1, s_2, \ldots)$· θα δείξουμε ότι $(s_1, s_2, \ldots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

[7] και ταυτόχρονα και ανοικτά

Παρατηρεί κανείς πρώτα ότι, για την j-στη υπακολουθία $n_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, όλες οι ακολουθίες $x^{(n_k^{(j)})}$, $k \in \mathbb{N}$, έχουν αρχικό κομμάτι $(s_1, \ldots, s_j)$, δηλ. $x_i^{(n_k^{(j)})} = s_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, j\}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα m_n η τάξη του κυλίνδρου A_n· δηλαδή έστω ότι το A_n γράφεται ως $A_n = A'_n \times \prod_{i=m_n+1}^{\infty} X_i$ με $A'_n \subseteq S^{m_n}$. Τότε για $j \geqslant m_n$ και k τέτοιο ώστε $n_k^{(j)} \geqslant n$ (τέτοιο k υπάρχει αφού η ακολουθία $n_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα), έχει κανείς ότι η ακολουθία $x^{(n_k^{(j)})} = (x_1^{(n_k^{(j)})}, x_2^{(n_k^{(j)})}, \ldots)$ έχει τους πρώτους j όρους ίσους με $s_1, \ldots, s_j$, δηλαδή $(x_1^{(n_k^{(j)})}, \ldots, x_j^{(n_k^{(j)})}) = (s_1, \ldots, s_j)$, και επιπλέον ανήκει και στο A_n αφού $A_{n_k^{(j)}} \subseteq A_n$. Έπεται ότι $(s_1, \ldots, s_{m_n}) = (x_1^{(n_k^{(j)})}, \ldots, x_{m_n}^{(n_k^{(j)})}) \in A'_n$, αφού $m_n \leqslant j$ και $A_n = A'_n \times \prod_{i=m_n+1}^{\infty} X_i$, και άρα $(s_1, \ldots, s_{m_n}, s_{m_n+1}, \ldots) \in A_n$. $\square$

Μονόπλευρα Bernoulli shift

Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S \; \forall\, n \in \mathbb{N}$·
$(X, \mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mathscr{B} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.
$(p_s)_{s \in S}$ διάνυσμα πιθανότητας· δηλ. $p_s \geqslant 0 \; \forall\, s \in S$ και $\sum_{s \in S} p_s = 1$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n+1} = s_n\}) = p_{s_1} \cdots p_{s_n},$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n+1} = s_n\},$$

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μία συνολοσυνάρτηση επί του $\mathscr{C}$ μέσω της

$$\mu\left(A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{(s_1, \ldots, s_n) \in A} p_{s_1} \cdots p_{s_n}$$

για έναν κύλινδρο $A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^n$ (δηλ. $A \in 2^{S^n} = \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$). Η μ είναι κατ' αρχήν καλά ορισμένη: αν $B = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^n$ και

$B = A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$ με $A' \subseteq S^m$, έστω ότι $m > n$. Πρέπει τότε $A' = A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m$, και άρα

$$\begin{aligned}\sum_{(s_1,\dots,s_m)\in A'} p_{s_1}\cdots p_{s_m} &= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} \sum_{s_{n+1}\in S} \cdots \sum_{s_m \in S} p_{s_1}\cdots p_{s_m} \\ &= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p_{s_1}\cdots p_{s_n} \left(\sum_{s_{n+1}\in S} p_{s_{n+1}}\right)\cdots\left(\sum_{s_m\in S} p_{s_m}\right) \\ &= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p_{s_1}\cdots p_{s_n}.\end{aligned}$$

Η μ είναι επίσης πεπερασμένα αθροιστική επί της $\mathscr{C}$. Πράγματι, έστω $B = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ και $B' = A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$ ξένοι μεταξύ τους κύλινδροι, με $A \subseteq S^n$ και $A' \subseteq S^m$, και έστω ότι $m \geqslant n$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Γράφουμε $A'' := A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m \subseteq S^m$ αν $m > n$ και $A'' = A \subseteq S^m$ αν $m = n$, και παρατηρούμε ότι $A' \cap A'' = \varnothing$ επειδή $B' \cap B = \varnothing$. Άρα

$$\begin{aligned}\mu(B \cup B') &= \sum_{(s_1,\dots,s_m)\in A'\cup A''} p_{s_1}\cdots p_{s_m} \\ &= \sum_{(s_1,\dots,s_m)\in A'} p_{s_1}\cdots p_{s_m} + \sum_{(s_1,\dots,s_m)\in A''} p_{s_1}\cdots p_{s_m} \\ &= \mu(B') + \mu(B).\end{aligned}$$

Έπεται τώρα από το τελευταίο Λήμμα ότι η μ είναι αριθμήσιμα αθροιστική επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$. Πράγματι, αρκεί πλέον να δειχθεί ότι

$$A_n \in \mathscr{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad A_n \downarrow \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_n) \downarrow 0,$$

αφού η μ είναι πεπερασμένα αθροιστική. Όμως έστω $A_n \in \mathscr{C}$, $n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα ακολουθία· αν $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε κάθε A_n είναι μη κενό, και από το Λήμμα πρέπει $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. Επομένως αν $A_n \downarrow \varnothing$ τότε πρέπει $\mu(A_n) = 0$ από ένα n και μετά.

Το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή εξασφαλίζει τώρα ότι η μ επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας επί της σ-άλγεβρας που παράγει η άλγεβρα $\mathscr{C}$, η οποία είναι η $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$, κάθε δε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\}) = p_{s_1}\cdots p_{s_n}.$$

Γενικότερα, και κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\prod_{i=1}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n}^{\infty} X_i$$
$$= \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει επίσης μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\}) = p_{s_1} \cdots p_{s_n},$$

ανεξάρτητα του m, αφού

$$\begin{aligned}\mu\left(\prod_{i=1}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right)& \\ &= \sum_{s'_1\in S} \cdots \sum_{s'_m\in S} p_{s'_1} \cdots p_{s'_m} \cdot p_{s_1} \cdots p_{s_n} \\ &= \left(\sum_{s'_1\in S} p_{s'_1}\right) \cdots \left(\sum_{s'_m\in S} p_{s'_m}\right) p_{s_1} \cdots p_{s_n} \\ &= p_{s_1} \cdots p_{s_n},\end{aligned}$$

η πρώτη ισότητα εξ' ορισμού της συνολοσυνάρτησης μ για τον κύλινδρο $A \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i$ με $A = \prod_{i=1}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\}$. □

Μονόπλευρα Markov shift

Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με πληθάριθμο k.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$·
$(X, \mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mathscr{B} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.
$P = (P(s, s'))$ ένας $k \times k$ στοχαστικός πίνακας με στοιχεία $P(s, s')$, $s, s' \in S$·
στοχαστικός σημαίνει ότι $P(s, s') \geqslant 0$ $\forall\, s, s' \in S$ και $\sum_{s'\in S} P(s, s') = 1$ $\forall\, s \in S$ (δηλ. κάθε γραμμή έχει άθροισμα 1).
$(p_s)_{s\in S}$ διάνυσμα πιθανότητας· δηλ. $p_s \geqslant 0$ $\forall\, s \in S$ και $\sum_{s\in S} p_s = 1$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}) = p(s_1)P(s_1, s_2) \cdots P(s_{n-1}, s_n),$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad s_1, \ldots, s_n \in S.$$

Εν αντιθέσει με τα μέτρα γινόμενο των Bernoulli shifts, δεν ισχύει εδώ ότι το μέτρο ενός μετρήσιμου ορθογώνιου της μορφής

$$\prod_{i=1}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i$$
$$= \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει επίσης μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\})$$
$$= p(s_1)P(s_1, s_2)\cdots P(s_{n-1}, s_n),$$

χωρίς επιπλέον υποθέσεις για το διάνυσμα $p = (p(s))_{s\in S}$ και τον πίνακα $P = (P(s, s'))_{s,s'\in S}$. Η επιπλέον υπόθεση που χρειάζεται είναι ότι

$$p^*P = p^* \quad \iff \quad P^*p = p \quad \iff \quad \sum_{s\in S} p(s)P(s, s') = p(s') \quad \forall\, s' \in S\cdot$$

δηλ. το p^* (που θεωρείται ότι είναι $1 \times k$ πίνακας, δηλ. διάνυσμα γραμμή) είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1· ισοδύναμα, το p (που θεωρείται ότι είναι $k \times 1$ πίνακας, δηλ. διάνυσμα στήλη) είναι ιδιοδιάνυσμα του ανάστροφου P^* για την ιδιοτιμή 1.

Ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα, που είναι ταυτόχρονα και διάνυσμα πιθανότητας, πάντα υπάρχει για έναν στοχαστικό πίνακα από το Θεώρημα Perron–Frobenius.

Σημείωση. Ένας στοχαστικός πίνακας P έχει πάντα την ιδιοτιμή 1, επειδή οι γραμμές του έχουν όλες άθροισμα 1: το αντίστοιχο (δεξί) ιδιοδιάνυσμα είναι το διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες 1. Το 1 είναι μάλιστα η ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο μέτρο (απόλυτη τιμή). (Μπορεί όμως να υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές με μέτρο 1.)

Πόρισμα. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι το διάνυσμα p^* είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1. Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\})$$
$$= p(s_1)P(s_1, s_2)\cdots P(s_{n-1}, s_n),$$

ανεξάρτητα του m, για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},$$

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$.

Απόδειξη Πρότασης. Ορίζουμε μία συνολοσυνάρτηση επί του $\mathscr{C}$ μέσω της

$$\mu\left(A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n)$$

για έναν κύλινδρο $A\times\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^n$ (δηλ. $A \in 2^{S^n} = \mathscr{B}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}_n$). Η μ είναι καλά ορισμένη: αν $B = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^n$ και $B = A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$ με $A' \subseteq S^m$, έστω πάλι ότι $m > n$. Πρέπει τότε $A' = A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m$, και άρα

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s_1,\dots,s_m)\in A'} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&\qquad= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A}\sum_{s_{n+1}\in S}\cdots\sum_{s_m\in S} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&\qquad= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A}\sum_{s_{n+1}\in S}\cdots\sum_{s_{m-1}\in S} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{m-2},s_{m-1})\\
&\qquad= \cdots\\
&\qquad= \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n),
\end{aligned}$$

επειδή για κάθε $j \in \{n+1,\dots,m\}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_j\in S} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{j-1},s_j)\\
&\qquad\qquad= p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{j-2},s_{j-1})\sum_{s_j\in S} P(s_{j-1},s_j)\\
&\qquad\qquad= p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{j-2},s_{j-1}),
\end{aligned}$$

αφού ο πίνακας P είναι στοχαστικός.

Η πεπερασμένη αθροιστικότητα της μ επί της $\mathscr{C}$ ελέγχεται τώρα όπως και στην περίπτωση των μέτρων γινόμενο των Bernoulli shifts. Πράγματι, αν

$$B = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \qquad \text{και} \qquad B' = A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$$

είναι δύο ξένοι μεταξύ τους κύλινδροι, με $A \subseteq S^n$ και $A' \subseteq S^m$, και $m \geqslant n$, γράφουμε πάλι $A'' = A \subseteq S^m$ αν $m = n$ και

$$A'' := A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m \subseteq S^m$$

αν $m > n$ και, οπότε

$$\begin{aligned}\mu(B \cup B') &= \sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in A'\cup A''} p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{m-1},s_m)\\ &= \left(\sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in A'} + \sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in A''}\right) p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{m-1},s_m)\\ &= \mu(B') + \mu(B),\end{aligned}$$

επειδή $A' \cap A'' = \varnothing$ (αφού $B' \cap B = \varnothing$).

Έπεται τώρα από το τελευταίο Λήμμα, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των Bernoulli shifts, ότι η μ είναι αριθμήσιμα αθροιστική επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$. Το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή, και πάλι, εξασφαλίζει ότι η μ επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας επί της σ-άλγεβρας που παράγει η άλγεβρα $\mathscr{C}$, η οποία είναι η $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$, κάθε δε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}) = p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n).$$

□

Παρατήρηση. Η απόδειξη του ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι καλά ορισμένη πάνω στην άλγεβρα των κυλίνδρων $\mathscr{C}$ είναι ουσιαστικά η επαλήθευση ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέπειας στο Θεώρημα Συνέπειας του Kolmogorov (Kolmogorov Consistency Theorem).

Απόδειξη Πορίσματος. Επειδή $\sum_{s\in S} p(s)P(s,s') = p(s')$ για κάθε $s' \in S$,

$$\begin{aligned}&\mu\left(\prod_{i=1}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right)\\ &= \sum_{s_1'\in S} \cdots \sum_{s_m'\in S} p(s_1')P(s_1',s_2')\cdots P(s_{m-1}',s_m')P(s_m',s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n)\\ &= \sum_{s_2'\in S} \cdots \sum_{s_m'\in S} p(s_2')P(s_2',s_3')\cdots P(s_{m-1}',s_m')P(s_m',s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n)\\ &= \ldots\\ &= p(s_1)P(s_1,s_2)\cdots P(s_{n-1},s_n).\end{aligned}$$

□

Η διαφορά μεταξύ των δύο shift, Bernoulli και Markov, είναι στα μέτρα πιθανότητας που ορίζει κανείς πάνω στους (ίδιους) χώρους μέτρου, τους χώρους γινόμενο $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n) = (S^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} 2^S)$. Μπορεί κανείς να ορίσει πιο γενικά shifts, δηλαδή μέτρα.

Γενικότερα μέτρα σε χώρους shift

Έστω πάλι S ένα πεπερασμένο σύνολο.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S \; \forall\, n \in \mathbb{N}$·
$(X, \mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mathscr{B} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.
Δίνονται: συναρτήσεις $p_n \colon S^n \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε:
(ι) $\sum_{s\in S} p_1(s) = 1$·
(ιι) $\sum_{s\in S} p_{n+1}(s_1, \dots, s_n, s) = p_n(s_1, \dots, s_n)$
$\forall\,(s_1, \dots, s_n) \in S^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\}) = p_n(s_1 \dots, s_n)$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μία συνολοσυνάρτηση επί του $\mathscr{C}$ μέσω της

$$\mu\left(A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p_n(s_1, \dots, s_n)$$

για έναν κύλινδρο $A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^n$ (δηλ. $A \in 2^{S^n} = \mathscr{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n$). Το ότι η μ είναι καλά ορισμένη αποδεικνύεται όπως και στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις: αν

$$B = A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \qquad \text{με} \qquad A \subseteq S^n$$

και

$$B = A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i \qquad \text{με} \qquad A' \subseteq S^m,$$

έστω ότι $m > n$. Πρέπει τότε $A' = A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m$, και άρα

$$\begin{aligned}
\sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in A'} & p_m(s_1,\ldots,s_m) \\
&= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in A} \sum_{s_{n+1}\in S} \cdots \sum_{s_m\in S} p_m(s_1,\ldots,s_m) \\
&= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in A} \sum_{s_{n+1}\in S} \cdots \sum_{s_{m-1}\in S} p_{m-1}(s_1,\ldots,s_{m-1}) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in A} p_n(s_1,\ldots,s_n),
\end{aligned}$$

από την συνθήκη (ιι). Έπεται επίσης όπως και στις περιπτώσεις των Bernoulli και Markov shift, πρώτα ότι η μ είναι πεπερασμένα αθροιστική και κατόπιν ότι είναι και αριθμήσιμα αθροιστική, και το Θεώρημα Καραθεοδωρή εξασφαλίζει και πάλι ότι η μ επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας επί της σ-άλγεβρας που παράγουν οι κύλινδροι, δηλαδή επί της σ-άλγεβρας γινόμενο $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n = \bigotimes_{n=1}^{\infty} 2^S$, και ότι κάθε κύλινδρος της μορφής

$$\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\},$$

$n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}) = p_n(s_1 \ldots, s_n). \qquad \square$$

Οι συνθήκες (ι), (ιι) για τις συναρτήσεις p_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι αυτές που εξασφαλίζουν ότι πληρούνται οι συνθήκες συνέπειας στο Θεώρημα Συνέπειας του Kolmogorov· είναι, ισοδύναμα, οι συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι καλά ορισμένη πάνω στην άλγεβρα των κυλίνδρων $\mathscr{C}$.

Σημείωση. Τα μέτρα μ αυτής της παραγράφου (γενικά μέτρα σε χώρους shift), όπως και τα μέτρα Markov της προηγούμενης παραγράφου χωρίς την επιπλέον υπόθεση ότι το διάνυσμα p^* είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα P, δεν είναι κατ' ανάγκην αναλλοίωτα ως προς τον μετασχηματισμό shift $T \colon X \to X$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, χωρίς επιπλέον υποθέσεις, δεν ισχύει δηλαδή ότι το μέτρο κάθε μετρήσιμου ορθογωνίου

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει επίσης μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\}) = p_n(s_1, \ldots, s_n),$$

ανεξάρτητα του m. (Εν αντιθέσει τα μέτρα γινόμενα στα Bernoulli shifts είναι.) Η επιπλέον συνθήκη που κάνει αυτά τα γενικότερα μέτρα shift-αναλλοίωτα:

$$\sum_{s\in S} p_{n+1}(s, s_1 \dots, s_n) = p_n(s_1, \dots, s_n) \qquad \forall\, (s_1, \dots, s_n) \in S^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Αμφίπλευροι χώροι shift

Θεωρούμε τώρα στην περίπτωση όπου:
$I = \mathbb{Z}$·
$X_i = S \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \quad$ όπου S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο·
$\mathscr{B}_i = 2^S \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}.$

Κύλινδροι: ένας κύλινδρος είναι τώρα ένα σύνολο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\colon (x_{-n}, \dots, x_n) \in A\} = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i,$$

όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $A \in \mathscr{B}_{-n} \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}_n = 2^{S^{2n+1}}$. Το κενό σύνολο θα θεωρείται πάλι κύλινδρος, όπως και όλος ο χώρος X.

Λήμμα. *Η κλάση $\mathscr{C}$ όλων των κυλίνδρων αποτελεί άλγεβρα.*

Απόδειξη. Ίδια με την περίπτωση των μονόπλευρων χώρων shift. Κατ' αρχήν $\varnothing, X \in \mathscr{C}$ εξ' ορισμού. Αν

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\colon (x_{-n}, \dots, x_n) \in A\} = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

είναι ένας κύλινδρος, τότε το συμπλήρωμά του είναι

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\colon (x_{-n}, \dots, x_n) \in A^{\mathrm{c}}\} = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A^{\mathrm{c}} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i,$$

που είναι πάλι κύλινδρος. Αν

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\colon (x_{-m}, \dots, x_m) \in B\} = \prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i \times B \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$$

είναι άλλος ένας κύλινδρος, έστω ότι $m \geqslant n$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας και πάλι)· τότε η ένωση των δύο κυλίνδρων είναι ίση με

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\colon (x_{-m}, \dots, x_m) \in C\} = \prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i \times C \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i,$$

όπου

$$C = \begin{cases} A \cup B & \text{αν } m = n \\ \left(\prod_{i=-m}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{m} X_i\right) \cup B & \text{αν } m > n, \end{cases}$$

που είναι επίσης κύλινδρος. □

Λήμμα. *Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους είναι η σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$.*

Απόδειξη. Ίδια, πάλι, με την περίπτωση των μονόπλευρων χώρων shift. Κάθε κύλινδρος είναι μια πεπερασμένη (ξένη) ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων: αν

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X : (x_{-n}, \dots, x_n) \in A\} = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$$

είναι ένας κύλινδρος, τότε

$$\begin{aligned} &\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \\ &\qquad = \bigcup_{(s_{-n},\dots,s_n)\in A} \left(\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times \{s_{-n}\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right). \end{aligned}$$

Άρα κάθε κύλινδρος ανήκει πάλι στην σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$, που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, και επομένως η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους περιέχεται στην $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$. Αντίστροφα, κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο είναι ένας κύλινδρος και άρα ανήκει στην $\sigma(\mathscr{C})$· επομένως η σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$ που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, περιέχεται στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που παράγεται από τους κυλίνδρους. □

Λήμμα. *Αν $A_n \in \mathscr{C}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κυλίνδρων, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.*

Απόδειξη. Μία απόδειξη είναι πάλι μέσω του Θεωρήματος του Tychonoff, ακριβώς όπως και στην περίπτωση του μονόπλευρων χώρων shift. Αλλά και το απ' ευθείας επιχείρημα που δόθηκε για τους μονόπλευρους χώρους shift περνάει και εδώ.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $x^{(n)} = (\dots, x_{-1}^{(n)}, x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots)$ μία διπλά άπειρη ακολουθία στον κύλινδρο A_n. Διατάσσουμε τις ακολουθίες $x^{(n)}$ πάλι ως

$$\begin{array}{cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
x_{-1}^{(1)} & x_{-1}^{(2)} & x_{-1}^{(3)} & \dots \\
x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & x_0^{(3)} & \dots \\
x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

(δηλαδή η n-στη στήλη περιέχει τους όρους της ακολουθίας $x^{(n)}$). Κοιτάμε πάλι την διάταξη αυτή ανά γραμμές. Ένας τρόπος να επιλέξουμε τώρα τις ακολουθίες $n_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, είναι ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα μια ακολουθία $n_1^{(0)} < n_2^{(0)} < \dots$ έτσι ώστε $x_0^{(n_k^{(0)})} = s_0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}$, για κάποιο $s_0 \in S$. Επειδή τώρα και το S^2 είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιο ζεύγος $(s_{-j}, s_j) \in S^2$ και μία υπακολουθία $n_1^{(j)} < n_2^{(j)} < \dots$ της $n_k^{(j-1)}$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $(x_{-j}^{(n_k^{(j)})}, x_j^{(n_k^{(j)})}) = (s_{-j}, s_j)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots)$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ανήκει τότε στην τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Το επιχείρημα είναι όπως και για τις μονόπλευρες ακολουθίες. Παρατηρεί κανείς πρώτα ότι, για την j-στη υπακολουθία $n_k^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, όλες οι ακολουθίες $x^{(n_k^{(j)})}$, $k \in \mathbb{N}$, έχουν κεντρικό αρχικό κομμάτι $(s_{-j}, \dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_j)$, δηλ. τώρα $x_i^{(n_k^{(j)})} = s_i$ για κάθε $i \in \{-j, \dots, j\}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν m_n συμβολίζει πάλι την τάξη του κυλίνδρου A_n, δηλαδή το A_n γράφεται ως $A_n = \prod_{i=-\infty}^{-m_n-1} X_i \times A'_n \times \prod_{i=m_n+1}^{\infty} X_i$ με $A'_n \subseteq S^{2m_n+1}$, τότε για $j \geqslant m_n$ και k τέτοιο ώστε $n_k^{(j)} \geqslant n$, έχει κανείς ότι η ακολουθία

$$x^{(n_k^{(j)})} = (\dots, x_{-1}^{(n_k^{(j)})} x_0^{(n_k^{(j)})}, x_1^{(n_k^{(j)})}, \dots)$$

έχει τους κεντρικούς $2j+1$ όρους της ίσους με $s_{-j}, \dots, s_j$, δηλαδή

$$(x_{-j}^{(n_k^{(j)})}, \dots, x_j^{(n_k^{(j)})}) = (s_{-j}, \dots, s_j),$$

και επιπλέον ανήκει στο A_n αφού $A_{n_k^{(j)}} \subseteq A_n$. Έπεται ότι $(s_{-m_n}, \dots, s_{m_n}) = (x_{-m_n}^{(n_k^{(j)})}, \dots, x_{m_n}^{(n_k^{(j)})}) \in A'_n$, αφού $m_n \leqslant j$ και $A_n = \prod_{i=-\infty}^{-m_n-1} X_i \times A'_n \times \prod_{i=m_n+1}^{\infty} X_i$, και άρα $(\dots, s_{-m_n}, \dots, s_0, \dots, s_{m_n}, \dots) \in A_n$. $\square$

Αμφίπλευρα Bernoulli shift

S ένα πεπερασμένο σύνολο.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$·

$(X,\mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X=\prod_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ και $\mathscr{B}=\prod_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{B}_n$.
$(p_s)_{s\in S}$ διάνυσμα πιθανότητας· δηλ. $p_s\geqslant 0\ \forall\, s\in S$ και $\sum_{s\in S} p_s=1$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X,\mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in X\colon x_{m+1}=s_1,\dots,x_{m+n}=s_n\})=p_{s_1}\cdots p_{s_n},$$

ανεξάρτητα του m, για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in X\colon x_{m+1}=s_1,\dots,x_{m+n}=s_n\},$$

$m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $s_1,\dots,s_n\in S$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μία συνολοσυνάρτηση επί του $\mathscr{C}$ μέσω της

$$\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i\times A\times\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right)=\sum_{(s_{-n},\dots,s_n)\in A} p_{s_{-n}}\cdots p_{s_n}$$

για έναν κύλινδρο $\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i\times A\times\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A\subseteq S^{2n+1}$ (δηλ. $A\in 2^{S^{2n+1}}=\mathscr{B}_{-n}\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}_n$). Η μ είναι καλά ορισμένη: αν

$$B=\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i\times A\times\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\qquad\text{με}\quad A\subseteq S^{2n+1}$$

και

$$B=\prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i\times A\times\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\qquad\text{με}\quad A\subseteq S^{2m+1},$$

έστω ότι $m>n$. Πρέπει τότε $A'=X_{-m}\times\cdots\times X_{-n-1}\times A\times X_{n+1}\times\cdots\times X_m$, και άρα

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s_{-m},\dots,s_m)\in A'} p_{s_{-m}}\cdots p_{s_m}\\
&\qquad=\sum_{s_{-m}\in S}\cdots\sum_{s_{-n-1}\in S}\ \sum_{(s_{-n},\dots,s_n)\in A}\ \sum_{s_{n+1}\in S}\cdots\sum_{s_m\in S} p_{s_{-m}}\cdots p_{s_m}\\
&\qquad=\sum_{(s_{-n},\dots,s_n)\in A} p_{s_1}\cdots p_{s_n}\left(\sum_{s_{-m}\in S} p_{s_{-m}}\right)\cdots\left(\sum_{s_{-n-1}\in S} p_{s_{-n-1}}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot\left(\sum_{s_{n+1}\in S} p_{s_{n+1}}\right)\cdots\left(\sum_{s_m\in S} p_{s_m}\right)\\
&\qquad=\sum_{(s_1,\dots,s_n)\in A} p_{s_1}\cdots p_{s_n}.
\end{aligned}$$

Η μ είναι επίσης πεπερασμένα αθροιστική επί της $\mathscr{C}$. Αυτό ελέγχεται όπως ακριβώς και στην περίπτωση των μονόπλευρων χώρων shift. Έστω $B = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ και $B' = \prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i \times A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$ ξένοι μεταξύ τους κύλινδροι, με $A \subseteq S^{2n+1}$ και $A' \subseteq S^{2m+1}$, και έστω ότι $m \geqslant n$. Γράφουμε $A'' := X_{-m} \times \cdots \times X_{-n-1} \times A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m \subseteq S^m$ αν $m > n$, και $A'' = A$ αν $m = n$, και παρατηρούμε ότι $A' \cap A'' = \varnothing$ επειδή $B' \cap B = \varnothing$· άρα

$$\begin{aligned}\mu(B \cup B') &= \sum_{(s_{-m},\dots,s_m)\in A'\cup A''} p_{s_{-m}} \cdots p_{s_m} \\ &= \sum_{(s_{-m},\dots,s_m)\in A'} p_{s_{-m}} \cdots p_{s_m} + \sum_{(s_{-m},\dots,s_m)\in A''} p_{s_{-m}} \cdots p_{s_m} \\ &= \mu(B') + \mu(B).\end{aligned}$$

Έπεται τώρα από το τελευταίο Λήμμα ότι η μ είναι και αριθμήσιμα αθροιστική επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$. Από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή η μ επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας επί της σ-άλγεβρας που παράγει η άλγεβρα $\mathscr{C}$, η οποία είναι η $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$, κάθε δε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\begin{aligned}&\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times \{s_{-n}\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \\ &\qquad\qquad = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{-n} = s_{-n}, \dots, x_n = s_n\},\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $s_{-n}, \dots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{-n} = s_{-n}, \dots, x_n = s_n\}) = p_{s_{-n}} \cdots p_{s_n}.$$

Από αυτό τώρα έπεται ότι και κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\begin{aligned}&\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i \\ &\qquad\qquad = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \dots, x_{m+n} = s_n\},\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $s_1, \dots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{m+1} = s_1, \dots, x_{m+n} = s_n\}) = p_{s_1} \cdots p_{s_n},$$

ανεξάρτητα του m. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&\quad = \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{-m-n-1} X_i \times \underbrace{(X_{-m-n} \times \cdots \times X_m \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\})}_{A} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&\quad = \sum_{s'_{-m-n}\in S} \cdots \sum_{s'_m \in S} p_{s'_{-m-n}} \cdots p_{s'_m} \cdot p_{s_1} \cdots p_{s_n} \\
&\quad = \left(\sum_{s'_{-m-n}\in S} p_{s'_{-m-n}}\right) \cdots \left(\sum_{s'_m\in S} p_{s'_m}\right) p_{s_1} \cdots p_{s_n} \\
&\quad = p_{s_1} \cdots p_{s_n},
\end{aligned}$$

αν $|m+1| < |m+n|$ ή $n=1$ και $m > -1$, και όμοια αν $|m+1| > |m+n|$ ή $n=1$ και $m < -1$:

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&\quad = \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \underbrace{(\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times X_{m+n+1} \times \cdots \times X_{-m-1})}_{A} \times \prod_{i=-m}^{\infty} X_i\right) \\
&\quad = \sum_{s'_{m+n+1}\in S} \cdots \sum_{s'_{-m-1}\in S} p_{s_1} \cdots p_{s_n} \cdot p_{s'_{m+n+1}} \cdots p_{s'_{-m-1}} \\
&\quad = p_{s_1} \cdots p_{s_n} \left(\sum_{s'_{m+n+1}\in S} p_{s'_{m+n+1}}\right) \cdots \left(\sum_{s'_{-m-1}\in S} p_{s'_{-m-1}}\right) \\
&\quad = p_{s_1} \cdots p_{s_n}.
\end{aligned}$$

τέλος, αν $-m-1 = m+n$, τότε

$$\begin{aligned}
\mu&\left(\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&= \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m} X_i \times \underbrace{\{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\}}_{A} \times \prod_{i=-m}^{\infty} X_i\right) \\
&= p_{s_1} \cdots p_{s_n}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Αμφίπλευρα Markov shift

S ένα πεπερασμένο σύνολο με πληθάριθμο k.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$·
$(X, \mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X = \prod_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ και $\mathscr{B} = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$.
$P = (P(s,s'))$ ένας $k\times k$ στοχαστικός πίνακας με στοιχεία $P(s,s')$, $s, s' \in S$·
δηλ. $P(s,s') \geqslant 0 \ \forall\, s, s' \in S$· $\sum_{s'\in S} P(s,s') = 1 \ \forall\, s \in S$.
$(p_s)_{s\in S}$ διάνυσμα πιθανότητας που είναι συγχρόνως και ιδιοδιάνυσμα του P^* για την ιδιοτιμή 1 (δηλ. το διάνυσμα γραμμή p^* είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1)· δηλ. $p_s \geqslant 0 \ \forall\, s \in S$· $\sum_{s\in S} p_s = 1$· και $\sum_{s\in S} p(s)P(s,s') = p(s') \ \forall\, s' \in S$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned}\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_m = s_0, x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\})\\ = p(s_0)P(s_0,s_1)\cdots P(s_{n-1},s_n),\end{aligned}$$

ανεξάρτητα του m, για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_m = s_0, x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},$$

$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνολοσυνάρτηση επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$ όλων των κυλίνδρων μέσω της

$$\begin{aligned}&\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i\right)\\ &\quad= \sum_{(s_{-n},\ldots,s_n)\in A} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})P(s_{-n+1},s_{-n+2})\cdots P(s_{n-1},s_n)\end{aligned}$$

για έναν κύλινδρο $\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ με $A \subseteq S^{2n+1}$ (δηλ. $A \in 2^{S^{2n+1}} = \mathscr{B}_{-n}\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}_n$). Η μ είναι καλά ορισμένη: αν

$$B = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \qquad \text{με} \quad A \subseteq S^{2n+1}$$

και

$$B = \prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i \times A \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i \qquad \text{με} \quad A \subseteq S^{2m+1},$$

έστω ότι $m > n$· πρέπει τότε $A' = X_{-m} \times \cdots \times X_{-n-1} \times A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m$. Έστω, κατ' αρχήν, $A'' = A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m$, οπότε $A' = X_{-m} \times \cdots \times X_{-n-1} \times A''$· τότε

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s_{-m},\ldots,s_m)\in A'} p(s_{-m})P(s_{-m},s_{-m+1})\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&= \sum_{s_{-m}\in S}\cdots\sum_{s_{-n-1}\in S}\ \sum_{(s_{-n},\ldots,s_m)\in A''} p(s_{-m})P(s_{-m},s_{-m+1})\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&= \sum_{s_{-m+1}\in S}\cdots\sum_{s_{-n-1}\in S}\ \sum_{(s_{-n},\ldots,s_m)\in A''} p(s_{-m+1})P(s_{-m+1},s_{-m+2})\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&= \ldots\\
&= \sum_{(s_{-n},\ldots,s_m)\in A''} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{m-1},s_m),
\end{aligned}$$

επειδή το p^* είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P, και άρα

$$\sum_{s_j\in S} p(s_j)P(s_j,s_{j+1})\cdots P(s_{m-1},s_m) = p(s_{j+1})P(s_{j+1},s_{j+2})\cdots P(s_{m-1},s_m)$$

για κάθε $j \in \{-m,\ldots,-n-1\}$· και κατόπιν

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s_{-n},\ldots,s_m)\in A''} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&= \sum_{(s_{-n},\ldots,s_n)\in A}\ \sum_{s_{n+1}\in S}\cdots\sum_{s_m\in S} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{m-1},s_m)\\
&= \sum_{(s_{-n},\ldots,s_n)\in A}\ \sum_{s_{n+1}\in S}\cdots\sum_{s_{m-1}\in S} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{m-2},s_{m-1})\\
&= \ldots\\
&= \sum_{(s_{-n},\ldots,s_n)\in A} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{n-1},s_n),
\end{aligned}$$

επειδή ο πίνακας P είναι στοχαστικός και επομένως

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_j\in S} p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{j-1},s_j)\\
&\qquad\qquad = p(s_{-n})P(s_{-n},s_{-n+1})\cdots P(s_{j-2},s_{j-1})
\end{aligned}$$

για κάθε $j \in \{n+1,\ldots,m\}$. Αυτό δείχνει ότι η μ είναι καλά ορισμένη.

Η πεπερασμένη αθροιστικότητα της μ επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$ των κυλίνδρων ελέγχεται τώρα ως συνήθως. Αν $B = \prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times A \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ και $B' = \prod_{i=-\infty}^{-m-1} X_i \times A' \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i$ ξένοι μεταξύ τους κύλινδροι, με $A \subseteq S^{2n+1}$ και $A' \subseteq S^{2m+1}$, και $m \geqslant n$, γράφουμε $A'' = A$ αν $m = n$, και $A'' := X_{-m} \times \cdots \times X_{-n-1} \times A \times X_{n+1} \times \cdots \times X_m \subseteq S^m$ αν $m > n$, και παρατηρούμε ότι $A' \cap A'' = \varnothing$ επειδή $B' \cap B = \varnothing$· άρα

$$\begin{aligned}
\mu(B \cup B') &= \sum_{(s_{-m},\ldots,s_m)\in A'\cup A''} p(s_{-m})P(s_{-m},s_{-m+1})\cdots P(s_{m-1},s_m) \\
&= \left(\sum_{(s_{-m},\ldots,s_m)\in A'} + \sum_{(s_{-m},\ldots,s_m)\in A''}\right) p(s_{-m})P(s_{-m},s_{-m+1})\cdots P(s_{m-1},s_m) \\
&= \mu(B') + \mu(B).
\end{aligned}$$

Έπεται τώρα από το τελευταίο Λήμμα ότι η μ είναι και αριθμήσιμα α-θροιστική επί της άλγεβρας $\mathscr{C}$ και άρα, από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή, επεκτείνεται σε ένα μέτρο πιθανότητας επί της σ-άλγεβρας που παράγει η άλγεβρα $\mathscr{C}$, δηλαδή την $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$, κάθε δε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\begin{aligned}
\prod_{i=-\infty}^{-n-1} X_i \times \{s_{-n}\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \\
= \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{-n} = s_{-n}, \ldots, x_n = s_n\},
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $s_{-n}, \ldots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\begin{aligned}
\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{-n} = s_{-n}, \ldots, x_n = s_n\}) \\
= p(s_{-n})P(s_{-n}, s_{-n+1})\cdots P(s_{n-1}, s_n).
\end{aligned}$$

Από αυτό έπεται τώρα ότι και κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\begin{aligned}
\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i \\
= \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_m = s_0, x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\},
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$, έχει μέτρο

$$\begin{aligned}
\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_m = s_0, x_{m+1} = s_1, \ldots, x_{m+n} = s_n\}) \\
= p(s_0)P(s_0, s_1)\cdots P(s_{n-1}, s_n),
\end{aligned}$$

ανεξάρτητα του m. Πράγματι, επειδή $\sum_{s\in S} p(s)P(s,s') = p(s')$ για κάθε $s' \in S$,

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&= \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{-m-n-1} X_i \times \underbrace{(X_{-m-n} \times \cdots \times X_{m-1} \times \{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\})}_{A} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&= \sum_{s'_{-m-n}\in S} \cdots \sum_{s'_{m-1}\in S} p(s'_{-m-n})P(s'_{-m-n}, s'_{-m-n+1}) \cdots P(s'_{m-2}, s'_{m-1})P(s'_{m-1}, s_0) \\
&\qquad\qquad \cdot P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n) \\
&= \sum_{s'_{-m-n+1}\in S} \cdots \sum_{s'_{m-1}\in S} p(s'_{-m-n+1})P(s'_{-m-n+1}, s'_{-m-n+2}) \cdots P(s'_{m-2}, s'_{m-1})P(s'_{m-1}, s_0) \\
&\qquad\qquad \cdot P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n) \\
&= \ldots \\
&= p(s_0)P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n),
\end{aligned}
$$

αν $|m| < |m+n|$ ή $n = 0$ και $m > 0$· και όμοια αν $|m| > |m+n|$ ή $n = 0$ και $m < 0$:

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right) \\
&= \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \underbrace{(\{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times X_{m+n+1} \times \cdots \times X_{-m})}_{A} \times \prod_{i=-m+1}^{\infty} X_i\right) \\
&= \sum_{s'_{m+n+1}\in S} \cdots \sum_{s'_{-m}\in S} p(s_0)P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n) \\
&\qquad\qquad \cdot P(s_n, s'_{m+n+1})P(s'_{m+n+1}, s'_{m+n+2}) \cdots P(s'_{-m-1}, s'_{-m}) \\
&= \sum_{s'_{m+n+1}\in S} \cdots \sum_{s'_{-m-1}\in S} p(s_0)P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n) \\
&\qquad\qquad \cdot P(s_n, s'_{m+n+1})P(s'_{m+n+1}, s'_{m+n+2}) \cdots P(s'_{-m-2}, s'_{-m-1}) \\
&= \ldots \\
&= p(s_0)P(s_0, s_1) \cdots P(s_{n-1}, s_n),
\end{aligned}
$$

επειδή $\sum_{s'\in S} P(s,s') = 1$ για κάθε $s \in S$· τέλος, αν $-m = m+n$, τότε

$$\mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\} \times \prod_{i=m+n+1}^{\infty} X_i\right)$$
$$= \mu\left(\prod_{i=-\infty}^{m-1} X_i \times \underbrace{\{s_0\} \times \{s_1\} \times \cdots \times \{s_n\}}_{A} \times \prod_{i=-m+1}^{\infty} X_i\right)$$
$$= p(s_0)P(s_0,s_1)\cdots P(s_{n-1},s_n). \qquad \square$$

Γενικότερα μέτρα σε αμφίπλευρους χώρους shift

Έστω πάλι S ένα πεπερασμένο σύνολο.
$X_n = S$ και $\mathscr{B}_n = 2^S \; \forall\, n \in \mathbb{Z}$·
$(X,\mathscr{B})$ ο μετρήσιμος χώρος γινόμενο: $X = \prod_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ και $\mathscr{B} = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}_n$.
Δίνονται: συναρτήσεις $p_n \colon S^n \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε:
(ι) $\sum_{s\in S} p_1(s) = 1$·
(ιι) $\sum_{s\in S} p_{n+1}(s_1,\ldots,s_n,s) = p_n(s_1,\ldots,s_n)$
$\forall\,(s_1,\ldots,s_n) \in S^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$·
(ιιι) $\sum_{s\in S} p_{n+1}(s,s_1\ldots,s_n) = p_n(s_1,\ldots,s_n)$
$\forall\,(s_1,\ldots,s_n) \in S^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ επί του μετρήσιμου χώρου γινόμενο $(X,\mathscr{B})$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{m+1} = s_1,\ldots,x_{m+n} = s_n\}) = p_n(s_1,\ldots,s_n),$$

ανεξάρτητα του m, για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο της μορφής

$$\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X \colon x_{m+1} = s_1,\ldots,x_{m+n} = s_n\},$$

$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $s_1,\ldots,s_n \in S$.

Απόδειξη. Όμοια με τα προηγούμενα και επαφίεται στον αναγνώστη. $\square$

Αναφορές

[1] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, 1995.

[2] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 254, Springer-Verlag, London, 2011.

[4] G. B. Folland, *Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[5] P. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[6] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley-Interscience, New York, 1962.

[7] ———, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

Βιβλιογραφία

1. P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.

2. K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

3. M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 254, Springer-Verlag, London, 2011.