ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

→ Walters: An introduction to Ergodic Theory

→ Petersen: Ergodic Theory

(24/10/14)

$(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$

$T : X \to X$

$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n\text{-φορές}}$

? Πως συμπεριφέρονται αυτές οι συναρτήσεις για μεγάλα n;

Πχ: μέσοι όροι: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$: συγκλίνουν σχεδόν $\forall x$, αν το μ είναι T-αναλλοίωτο

Σύστημα που διατηρεί το μέτρο (mps)

Είμαστε σε χώρο πιθανότητας

$T : X \to X$ $\mathcal{B}$-μετρήσιμη

Η T διατηρεί το μέτρο $\Rightarrow$

$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $\cancel{T\mu}\ T_*\mu = \mu$ ή μ T-αναλλοίωτο

όπου $T_*\mu : A \longmapsto \mu(T^{-1}(A))$

Το σύστημα θα είναι αντιστρέψιμο αν T αντιστρέψιμη, 1-1, επί και η αντίστροφη είναι μετρήσιμη.

$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$

Ορισμός: X σύνολο, $\mathcal{P}$ κλάση υποσυνόλων

$\mathcal{P}$: π-σύστημα αν είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες τομές.

Λήμμα 1: $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $T: X \to X$ $\mathcal{B}$-μετρήσιμη

$T_*\mu = \cancel{T_*\mu} = \mu$ αν $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$,

$\forall A \in$ σε ένα π-σύστημα που παράγει τη $\mathcal{B}$

Αποδ: Αν έχω 2 μέτρα πιθανότητας που είναι ίδια σ' ένα π-σύστημα $\Rightarrow$ είναι ίδια σε όλη τη σ-άλγεβρα που παράγουν.

Λήμμα 2: $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χ.π. (χώρος πιθανότητας) +

$T: X \to X$ μετρήσιμη

$$\int f\circ T \, d\mu = \int f \, d\mu \quad , \forall f \in L^\infty(\mu)$$

$\Rightarrow T$ διατηρεί το μέτρο $(T_*\mu = \mu)$

Αν $\cancel{T_*}\mu = \mu$ ($T_*\mu$) $\Rightarrow \int f\circ T \, d\mu = \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^1$

(και άρα $\forall f \in L^p$, $p \geq 1$)

Αποδ: $A \in \mathcal{B}$, $1_A = f$

$f\circ T = 1_{T^{-1}(A)}$

$\int f\circ T^{-1}(A) = \int 1_{T^{-1}(A)} d\mu \Rightarrow \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$

$\forall A \in \mathcal{B}$

G τοπολογική ομάδα, τοπικά συμπαγής $\Rightarrow \exists$ ένα μέτρο Borel που είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, $\mu(gA) = \{gx : x \in A\} = \mu(A)$, $\forall g \in G$

μέτρο Haar.

Δύο οποιαδήποτε τέτοια μέτρα, το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου

$\downarrow$

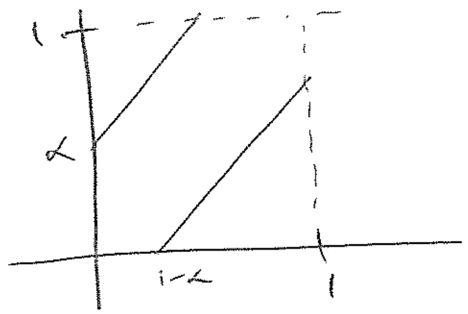
(Αν μ_1, μ_2 2 τέτοια μέτρα τότε $\exists\, c>0 : \mu_2(A) = c\,\mu_1(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$)

Αν G συμπαγής τότε κάθε τέτοιο μέτρο είναι πεπερασμένο. $\mu(G)=1$

Παραδείγματα:

1) $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0,1) \simeq S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$

$T(z) = az, \quad z \in S^1$ (στροφή στον κύκλο)



$T(x) = x+\alpha \pmod 1$
$= x+\alpha - [x+\alpha]$

Η T διατηρεί το μέτρο Lebesgue που είναι το μέτρο Haar της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2) (Γενίκευση)

G συμπαγής, $T(x) = gx, \ x \in G \ (g \in G)$

τότε η T διατηρεί το μέτρο Haar

$\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq [0,1)^n$

$a = (a_1, \dots, a_n) \qquad T(\underline{x}) = (x_1 + a_1 \pmod 1, \dots, x_n + a_n \pmod 1)$

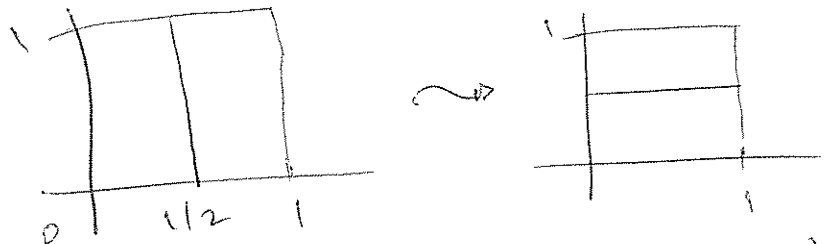
Άλλος τρόπος:

$T(z) = bz = (b_1 z_1, \dots, b_n z_n), \quad |z_i| = |b_i| = 1$

Διατηρεί το μέτρο Lebesgue.

3) Baker's transf

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \left(2x-1, \frac{y+1}{2}\right), & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



Διατηρεί το μέτρο Lebesgue

ή// $\int f \circ T \, d\lambda = \int_0^1 \int_0^1 f(T(x,y)) \, dx \, dy$

$= \int_0^{1/2} \int_0^1 f \circ T \, d\lambda + \int_{1/2}^{1} \int_0^1 f \circ T \, d\lambda$

$= \int_0^1 \int_0^{1/2} f \, d\lambda + \int_0^1 \int_{1/2}^1 f \, d\lambda = \int_0^1 \int_0^1 f \, d\lambda$

4) a) $T_2(z) = z^2$

$T_2(x) = 2x \mod 1$

Ανοιχτό πρόβλημα: μ αναλλοίωτο ως προς T_2 και T_3. Αν το μ δεν έχει σημειακές μάζες τότε είναι το μέτρο Lebesgue. (Εδώ $T_3(z) = z^3$).

b) G συμπαγής, $T: G \to G$ μετρήσιμος επιμορφισμός

T διατηρεί το μέτρο Haar

Απόδ: λ μέτρο Haar

$\mu(A) = \lambda(T^{-1}(A))$

$\mu(gA) = \lambda(T^{-1}(gA))$, $\exists h: T(h) = g \Rightarrow$

$= \lambda(h\,T^{-1}(A)) = \lambda(T^{-1}(A)) = \mu(A)$

και λόγω μοναδικότητας το μέτρο Haar

$\mu = \lambda$.

Άσκηση: $G, H \trianglelefteq G$

$\varphi : G \to G$ ομομορφισμός

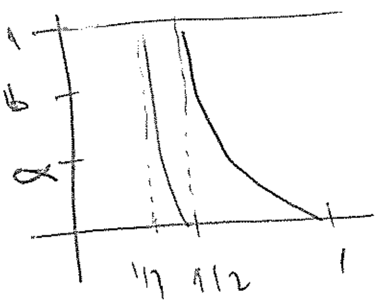
$\varphi(H) \subseteq H$, φ επάγει ομομορφισμό

G/H : $\tilde{\varphi}(gH) = \varphi(g)/H$. Η φ είναι καλά ορισμένη + ομομορφισμός.

5) Gauss map.

$T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, $x \in (0,1]$

$T(x) = \frac{1}{x} - n$, $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$



$x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ διατηρεί το μέτρο

$d\mu(x) = \frac{dx}{x+1}\frac{1}{\ln 2}$

$\mu(T^{-1}(a,b))$, $T(x) \in (a,b)$

$\frac{1}{\alpha+n} < x < \frac{1}{b+n}$

$$\mu(T^{-1}(a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{b+n}}^{\frac{1}{\alpha+n}} \frac{dx}{1+x} (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{b+1}{\alpha+1}\right)$$

$$\mu(\alpha, b) = \frac{1}{\ln 2} \int_{\alpha}^{b} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{b+1}{\alpha+1}\right)$$