Θέματα Συναρτησιακής Ανάλυσης: Αναπαραστάσεις Αλγεβρών και Διαγώνιοι Προτύπων

Γιώργος Κ. Ελευθεράκης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Μία πλευρά από την οποία μελετώνται οι άλγεβρες τελεστών, αφηρημένες η συγκεκριμένες, δηλαδή υπάλγεβρες του $B(H)$, της άλγεβρας των φραγμένων τελεστών που δρουν σε χώρο Χίλμπερτ H, είναι αυτή της μελέτης των κατηγοριών των προτύπων τους. Άλγεβρες που δεν είναι ισόμορφες με καμμία έννοια ισομορφισμού, όπως η $B(H)$ και η $M_n(B(H)), n \in \mathbb{N}$ η άλγεβρα των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από την $B(H)$, έχουν ισοδύναμες κατηγορίες normal αναπαραστάσεων. Η σπουδή των αλγεβρών από μία τέτοια σκοπιά έχει τις ρίζες της στην «καθαρή» αλγεβρική θεωρία, ειδικότερα στην θεωρία του Morita περί ισοδυναμίας δακτυλίων [6], [14], [42]:

Αν $\mathcal{A}$ είναι ένας δακτύλιος, $\mathcal{A}-mod$ είναι η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τις αβελιανές ομάδες που είναι αριστερά πρότυπα πάνω στον $\mathcal{A}$ και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων που είναι ταυτόχρονα μορφισμοί $\mathcal{A}-$προτύπων. Το θεμελιώδες Θεώρημα εδώ είναι ότι για δύο δακτύλιους $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ οι κατηγορίες $\mathcal{A} - mod, \mathcal{B} - mod$ είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχουν πρότυπα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ ώστε $\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \cong \mathcal{A}$, $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U} \cong \mathcal{B}$. Οι προηγούμενοι ισομορφισμοί εννοούνται ως ισομορφισμοί προτύπων και $\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{V}, \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}$ είναι «κατάλληλα» πηλίκα των τανυστικών γινομένων $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

Στα μέσα της δεκαετίας του 70, ο Rieffel εισήγαγε την θεωρία Morita στην κλάση των C^* και W^* αλγεβρών [45], [46]. Θα επιμείνουμε στην άποψη του Rieffel για την ισοδυναμία των W^* αλγεβρών αφού θεωρούμε ότι η εργασία μας αποτελεί συνέχεια και γενίκευση της θεωρίας του Rieffel στην κλάση των δυικών, όχι απαραίτητα αυτοσυζυγών, αλγεβρών τελεστών. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία W^* άλγεβρα, $\mathcal{A} - NHMOD$ είναι η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τις normal (w^*-συνεχείς) αναπαραστάσεις της $\mathcal{A}$. Με άλλα λόγια η κατηγορία $\mathcal{A}-NHMOD$ έχει ως αντικείμενα όλα τα ζεύγη της μορφής (H,α) όπου H χώρος Χίλμπερτ και $\alpha:\mathcal{A}\to B(H)$ w^*-συνεχής $*-$μορφισμός. Το ζεύγος (H,α) μπορεί να θεωρηθεί αριστερό πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$ με την δράση

$$A\cdot h=\alpha(A)(h)$$

για κάθε $A\in\mathcal{A},h\in H$. Αν $(H_i,\alpha_i),i=1,2$ αντικείμενα της $\mathcal{A}-NHMOD$ τότε ο χώρος των μορφισμών είναι

$$Hom_{\mathcal{A}}(H_1,H_2)=\{T\in B(H_1,H_2):T\alpha_1(A)=\alpha_2(A)T\ \forall\ A\in\mathcal{A}\}.$$

Σημειώνουμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}=Hom_{\mathcal{A}}(H_1,H_2)$ είναι σύμφωνα με την σύγχρονη ορολογία ένας w^*-κλειστός, τριαδικός δακτύλιος τελεστών (TRO), δηλαδή ικανοποιεί την σχέση $\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$. Σύμφωνα με τον Rieffel αν $\mathcal{A},\mathcal{B}$ είναι W^*-άλγεβρες ένας συναρτητής $\mathcal{F}:\mathcal{A}-NHMOD\to\mathcal{B}-NHMOD$ καλείται $*-$ συναρτητής αν για κάθε $(H_1,\alpha_1),(H_2,\alpha_2)\in\mathcal{A}-NHMOD$ και για κάθε $T\in Hom_{\mathcal{A}}(H_1,H_2)$ ισχύει $\mathcal{F}(T^*)=\mathcal{F}(T)^*\in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H_2),\mathcal{F}(H_1))$. Οι $\mathcal{A},\mathcal{B}$ λέγονται Morita ισοδύναμες αν υπάρχει $*-$ συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}:\mathcal{A}-NHMOD\to\mathcal{B}-NHMOD$. Τα βασικά θεωρήματα του Rieffel είναι δύο. Το πρώτο το διατυπώνουμε στην ακόλουθη μορφή του:

Δύο W^*-άλγεβρες $\mathcal{A},\mathcal{B}$ είναι Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχουν πιστές normal αναπαραστάσεις $(H,\alpha),(K,\beta)$ των $\mathcal{A},\mathcal{B}$ αντίστοιχα και ένας τριαδικός δακτύλιος τελεστών $\mathcal{M}\subset B(H,K)$ ώστε

$$\alpha(\mathcal{A})=[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*},\beta(\mathcal{B})=[\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}. \tag{1.0.1}$$

Το δεύτερο θεώρημα διατυπώνει την θέση ότι κάθε $*-$συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}:\mathcal{A}-NHMOD\to\mathcal{B}-NHMOD$ είναι ισοδύναμος με ένα συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ όπου $\mathcal{M}$ είναι ένας τριαδικός δακτύλιος τελεστών που ικανοποιεί τις (1.0.1) και που λειτουργεί ως εξής: Για κάθε $(H_0,\alpha_0)\in\mathcal{A}-NHMOD$, ο $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(H_0)$ είναι ένας χώρος Χίλμπερτ που παράγεται θέτοντας κατάλληλη νόρμα σε πηλίκο του τανυστικού γινομένου $\mathcal{M}\otimes H_0$ και στον οποίο είναι δυνατή η αναπαράσταση της $\mathcal{B}$ μέσω του τύπου

$$\beta_0:\mathcal{B}\to B(\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(H_0)),\ \ \beta_0(B)(M\otimes x)=(\beta(B)M)\otimes x$$

για κάθε $B\in\mathcal{B},M\in\mathcal{M},x\in H_0$.

Με την ανάπτυξη της θεωρίας των αφηρημένων αλγεβρών τελεστών [7], [12], [49], γεννήθηκε η ανάγκη να δημιουργηθεί η κατάλληλη έννοια της Morita ισοδυναμίας. Αυτό επιτεύχθηκε στο [11] και ολοκληρώθηκε στο [8]. Στις εργασίες αυτές αν $\mathcal{A}$ είναι μία αφηρημένη άλγεβρα τελεστών, βλέπε ορισμό 2.7.3, με $\mathcal{A} - OMOD$ ορίζεται η κατηγορία των αριστερών $\mathcal{A}-$προτύπων. Η κατηγορία αυτή έχει ως αντικείμενα αφηρημένους χώρους τελεστών $\mathcal{X}$, βλέπε ορισμό 2.7.2, που είναι αριστερά πρότυπα πάνω στην $\mathcal{A} : \mathcal{A}\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ ώστε η διγραμμική απεικόνιση

$$\mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} : (A, X) \to AX$$

να είναι πλήρης συστολή [21]. Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι αντικείμενα της $\mathcal{A} - OMOD$ τότε ο χώρος των μορφισμών $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι οι πλήρως φραγμένες απεικονίσεις, βλέπε ορισμό 2.7.1, που είναι ταυτόχρονα και απεικονίσεις $\mathcal{A}-$προτύπων. Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι αφηρημένες άλγεβρες τελεστών, ένας συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{A} - OMOD \to \mathcal{B} - OMOD$ λέγεται πλήρως ισομετρικός αν για κάθε $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{A} - OMOD$ η απεικόνιση $\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(\mathcal{X}), \mathcal{F}(\mathcal{Y}))$ είναι πλήρης ισομετρία.

Στα [11], [8] αποδεικνύεται ότι οι κατηγορίες $\mathcal{A} - OMOD$, $\mathcal{B} - OMOD$ είναι ισοδύναμες μέσω ενός πλήρως ισομετρικού συναρτητή αν και μόνο αν υπάρχει ένα Morita πλαίσιο $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, (\cdot, \cdot), [\cdot, \cdot])$. Δηλαδή μία εξάδα όπως προηγουμένως, όπου το $\mathcal{X}$ είναι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ πρότυπο το $\mathcal{Y}$ είναι $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ πρότυπο, οι απεικονίσεις $(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{A}$, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \to \mathcal{B}$, είναι διγραμμικές που είναι πλήρεις συστολές και οι οποίες ικανοποιούν ένα σύνολο από αξιώματα από τα οποία απορρέει ότι το σύνολο

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & X \\ Y & B \end{array} \right) : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B},\ X \in \mathcal{X},\ Y \in \mathcal{Y} \right\}$$

είναι αφηρημένη άλγεβρα τελεστών (linking algebra).

Με την ολοκλήρωση των προηγούμενων εργασιών τέθηκε φυσιολογικά το πρόβλημα της δημιουργίας μίας ανάλογης θεωρίας για τις αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών, βλέπε ορισμό 2.7.4, δηλαδή για τις αφηρημένες άλγεβρες τελεστών που είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφες με τον δυικό ενός αφηρημένου χώρου τελεστών. Μία τέτοια θεωρία θα απαιτούσε τα αντικείμενα της να σέβονται την επί πλέον τοπολογική δομή που φέρουν οι αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών ως δυικοί χώρων Banach. Η παρούσα διατριβή πραγματοποιεί βήματα σε αυτή την κατεύθυνση.

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία μοναδιαία w^*-κλειστή υπάλγεβρα του $B(H)$, όπου H χώρος Χίλμπερτ, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η άλγεβρα $M_n(\mathcal{A})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από την $\mathcal{A}$ είναι μία w^*-κλειστή υπάλγεβρα του $B(H^n)$, όπου H^n το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων του H. Με $\Delta(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την διαγώνιο της $\mathcal{A} : \Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$ το σύνολο των $n \times 1$ στηλών με στοιχεία από την $\Delta(\mathcal{A})$ που είναι ένας τριαδικός δακτύλιος τελεστών. Εύκολα μπορεί να ελέγξει κανείς ότι

$$\mathcal{A} = [\mathcal{M}^* M_n(\mathcal{A}) \mathcal{M}]^{-w^*} \text{ και } M_n(\mathcal{A}) = [\mathcal{M} \mathcal{A} \mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$

Οι προηγούμενες όμορφες σχέσεις που συνδέουν τις άλγεβρες $\mathcal{A}$, $M_n(\mathcal{A})$ δεν είχαν μελετηθεί μέχρι σήμερα. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι στο [32] είχε δοθεί ο ακόλουθος σχετιζόμενος ορισμός: Αν $\mathcal{A} \subset B(H)$ και $\mathcal{B} \subset B(K)$ άλγεβρες τελεστών ένας τελεστής $T \in B(H, K)$ ονομάζεται κανονικοποιητής (normalizer) από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{A}$ αν $T^* \mathcal{B} T \subset \mathcal{A}$. Σε αυτή την περίπτωση, αποδεικνύεται, [32], ότι ορίζεται ένας τριαδικός δακτύλιος τελεστών $\mathcal{M}_T \subset B(H, K)$ ώστε $T \in \mathcal{M}_T$ και $\mathcal{M}_T^* \mathcal{B} \mathcal{M}_T \subset \mathcal{A}$. Εμείς δίνουμε τον ακόλουθο ισχυρότερο ορισμό:

Ορισμός 1.0.1 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w^* κλειστές άλγεβρες που δρουν στους χώρους Χίλμπερτ H_1 και H_2 αντίστοιχα. Αν υπάρχει TRO $\mathcal{M} \subset B(H_1, H_2)$ ώστε $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^* \mathcal{B} \mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{B} = [\mathcal{M} \mathcal{A} \mathcal{M}^*]^{-w^*}$ γράφουμε $\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Λέμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι* ***TRO ισοδύναμες*** *αν υπάρχει TRO $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$.*

Στο κεφάλαιο 4, δείχνουμε ότι η TRO ισοδυναμία είναι πράγματι μία σχέση ισοδυναμίας μεταξύ w^*-κλειστών αλγεβρών τελεστών. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα που χαρακτηρίζει πότε δύο ανακλαστικές άλγεβρες, βλέπε ορισμό 2.3.6, είναι TRO ισοδύναμες:

Θεώρημα 1.0.1 *Δύο ανακλαστικές άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $*-$ισομορφισμός $\theta : \Delta(\mathcal{A})' \to \Delta(\mathcal{B})'$ που απεικονίζει τον σύνδεσμο των $\mathcal{A}-$αναλλοίωτων προβολών επί του αντίστοιχου συνδέσμου της $\mathcal{B}$.*

Για τον ορισμό των συνδέσμων αλγεβρών βλέπε την παράγραφο 2.3. Οι άλγεβρες $\Delta(\mathcal{A})', \Delta(\mathcal{B})'$ είναι οι μεταθέτες των αλγεβρών $\Delta(\mathcal{A}), \Delta(\mathcal{B})$, των διαγωνίων δηλαδή των αλγεβρών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Όπως σημειώσαμε προηγουμένως, δύο W^*-άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Morita ισοδύναμες κατά Rieffel αν και μόνο αν υπάρχουν πιστές normal αναπαραστάσεις α, β και τριαδικός δακτύλιος τελεστών $\mathcal{M}$ ώστε

$$\alpha(\mathcal{A}) = [\mathcal{M}^* \mathcal{M}]^{-w^*}, \beta(\mathcal{B}) = [\mathcal{M} \mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι ότι οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A})$ και $\beta(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες σύμφωνα με τον δικό μας ορισμό. Τίθεται τότε το ερώτημα αν η TRO ισοδυναμία μπορεί να ορισθεί κατά τρόπο αφηρημένο ώστε να έχει νόημα όχι μόνο για τις συγκεκριμένες αλλά και για τις αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών και να αποτελεί το ανάλογο της Morita ισοδυναμίας.

Έστω $\mathcal{A}$ αφηρημένη, μοναδιαία, δυική άλγεβρα τελεστών. Συμβολίζουμε με $\Delta(\mathcal{A})$ την διαγώνιο της $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Ορίζουμε την κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ που έχει ως αντικείμενα τις normal αναπαραστάσεις της $\mathcal{A}$. Δηλαδή $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ αν H χώρος Χίλμπερτ και $\alpha : \mathcal{A} \to B(H)$ είναι w^*-συνεχής μορφισμός που διατηρεί την μονάδα και είναι πλήρης συστολή. Έστω $(H_1, \alpha_1), (H_2, \alpha_2) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ τότε ο χώρος των μορφισμών είναι

$$Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2) = \{T \in B(H_1, H_2) : T\alpha_1(A) = \alpha_2(A)T \ \forall \ A \in \mathcal{A}\}.$$

Η κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ είναι γνωστή στην βιβλιογραφία [10]. Εμείς ορίζουμε την κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ που έχει τα ίδια αντικείμενα με την ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ αλλά ως χώρους μορφισμών τους ακόλουθους:

$$Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2) = \{T \in B(H_1, H_2) : T\alpha_1(A) = \alpha_2(A)T \ \forall \ A \in \Delta(\mathcal{A})\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $(H_1, \alpha_1), (H_2, \alpha_2) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ έχουμε $Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2) \subset Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ και συνεπώς ορίζεται ο συναρτητής εμφύτευση ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \hookrightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$. Ένα από τα πλεονεκτήματα που έχει η κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ είναι ότι για κάθε $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ ο σύνδεσμος $\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))$ της άλγεβρας $\alpha(\mathcal{A})$ περιέχεται στον χώρο $Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H)$. Αυτό το γεγονός θα είναι χρήσιμο παρακάτω όταν ελέγχεται ότι οι συναρτητές ισοδυναμίας απεικονίζουν αναπαραστάσεις με εικόνα ανακλαστικές άλγεβρες σε αναπαραστάσεις με επίσης εικόνα ανακλαστικές άλγεβρες.

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών. Ένας συναρτητής $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ λέμε ότι έχει $\Delta-$επέκταση αν υπάρχει συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} & \hookrightarrow & {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \\ \mathcal{F}\downarrow & & \mathcal{G}\downarrow \\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M} & \hookrightarrow & {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}. \end{array}$$

Επίσης ένας συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ λέγεται $*-$συναρτητής αν ικανοποιεί την σχέση $\mathcal{G}(T^*) = \mathcal{G}(T)^*$ για κάθε $T \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$, $H_1, H_2 \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$. Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.0.2 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών. Αυτές καλούνται $\Delta-$ισοδύναμες αν υπάρχει συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}:\ _{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to\ _{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που έχει $\Delta-$επέκταση $\mathcal{G}:\ _{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \to\ _{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ που είναι $*-$συναρτητής ισοδυναμίας.*

Παρατήρησε ότι ο προηγούμενος ορισμός γενικεύει αυτόν της Morita ισοδυναμίας αφού αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι αυτοσυζυγείς άλγεβρες τότε αυτές είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι Morita ισοδύναμες κατά Rieffel. Τα βασικά θεωρήματα που αποδεικνύουμε, κεφάλαιο 5, είναι:

Θεώρημα 1.0.2 *Οι μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι $\Delta-$ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν normal και πλήρως ισομετρικές αναπαραστάσεις α, β ώστε οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες.*

Θεώρημα 1.0.3 *Κάθε συναρτητής ισοδυναμίας που εξασφαλίζει την προηγούμενη ισοδυναμία είναι ισοδύναμος με ένα συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ όπου $\mathcal{U}$ είναι ένα $\mathcal{B}-\mathcal{A}$ πρότυπο ισοδυναμίας.*

Το πρότυπο $\mathcal{U}$ «παράγεται» από το TRO που υλοποιεί την TRO ισοδυναμία σε κάποια αναπαράσταση των αλγεβρών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Ο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}:\ _{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \to\ _{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ είναι ένας συναρτητής που κάθε $H \in\ _{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ το στέλνει σε αντικείμενο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H) \in\ _{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$, όπου $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ είναι η πλήρωση πηλίκου του τανυστικού γινομένου $\mathcal{U} \otimes H$ κάτω από κατάλληλη νόρμα.

Κάθε συναρτητής $\mathcal{F}$ που ικανοποιεί το Θεώρημα 1.0.2 έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, βλέπε κεφάλαιο 5:

Θεώρημα 1.0.4 *Ο $\mathcal{F}$ είναι πλήρως ισομετρικός και normal. Δηλαδή για κάθε $H_1, H_2 \in\ _{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ η απεικόνιση*

$$\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2) \to Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$$

είναι w^*-συνεχής και πλήρης ισομετρία.

Εδώ να σημειώσουμε το ενδιαφέρον γεγονός ότι το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει από την υπόθεση και μόνο ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}$ είναι $*-$συναρτητής ισοδυναμίας. Δηλαδή προκύπτει από μία αλγεβρική υπόθεση.

Θεώρημα 1.0.5 *Ο $\mathcal{F}$ στέλνει πλήρως ισομετρικές αναπαραστάσεις σε επίσης πλήρως ισομετρικές.*

Θεώρημα 1.0.6 *Ο $\mathcal{F}$ στέλνει ανακλαστικές άλγεβρες σε ανακλαστικές άλγεβρες.*

Το πεδίο στο οποίο κατά κύριο λόγο εφαρμόζουμε την προηγούμενη θεωρία είναι οι CSL άλγεβρες, βλέπε ορισμό 2.3.7. Αποδεικνύουμε ότι:

Θεώρημα 1.0.7 *Δύο CSL άλγεβρες είναι $\Delta-$ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι TRO ισοδύναμες.*

Στο κεφάλαιο 4 εξετάζουμε πότε δύο CSL άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες. Δείχνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει ειδικού τύπου ισομορφισμός μεταξύ των συνδέσμων τους:

Έστω $\mathcal{S}_1$ και $\mathcal{S}_2$ CSL σύνδεσμοι, βλέπε ορισμό 2.3.7, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ 1-1, επί απεικόνιση που διατηρεί την διάταξη, P το supremum των ατόμων του $\mathcal{S}_1$ και Q το supremum των ατόμων του $\mathcal{S}_2$. Τότε η απεικόνιση

$$\mathcal{S}_1|_P \to \mathcal{S}_2|_Q : L|_P \to \phi(L)|_Q$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Τα CSL's $\mathcal{S}_1|_{P^\perp}, \mathcal{S}_2|_{Q^\perp}$ είναι συνεχή CSL's. Δεν είναι αλήθεια όμως ότι πάντα ορίζεται ισομορφισμός $\mathcal{S}_1|_{P^\perp} \to \mathcal{S}_2|_{Q^\perp}$, βλέπε παρατήρηση 4.4.9. Αν υπάρχει ισομορφισμός

$$\psi : \mathcal{S}_1|_{P^\perp} \to \mathcal{S}_2|_{Q^\perp} \ \text{ ώστε } \ \psi(L|_{P^\perp}) = \phi(L)|_{Q^\perp}$$

τότε λέμε ότι η ϕ σέβεται την συνέχεια. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.0.8 *Δύο CSL άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των συνδέσμων τους που σέβεται την συνέχεια.*

Συνέπεια του προηγουμένου θεωρήματος είναι ότι κάθε ισομορφισμός μεταξύ CSL συνδέσμων που είναι ολικά ατομικοί η συνεχείς επάγει TRO ισοδυναμία μεταξύ των αντιστοίχων CSL αλγεβρών.

Έστω CSL's $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ και $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός που σέβεται την συνέχεια. Ορίζουμε

$$\mathcal{M} = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Παρατήρησε ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι w^*-κλειστός τριαδικός δακτύλιος τελεστών. Αποδεικνύουμε ότι το TRO που πραγματοποιεί την ισοδυναμία των αλγεβρών $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1), \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)$, βλέπε ορισμό 2.3.5, είναι το $\mathcal{M}$. Συγκεκριμένα ισχύουν

Θεώρημα 1.0.9

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) = [\mathcal{M}^*\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)\mathcal{M}]^{-w^*}, \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2) = [\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)\mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$

Στο κεφάλαιο 3 μελετώνται ιδιότητες των CSL αλγεβρών και των ανακλαστικών (βλέπε παράγραφο 2.4) προτύπων πάνω σε μεγιστικές αυτοσυζυγείς αβελιανές άλγεβρες (masa bimodules). Μία ανακλαστική άλγεβρα είναι CSL άλγεβρα αν και μόνο αν περιέχει μία μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγή άλγεβρα (masa). Επομένως τα ανακλαστικά masa bimodules είναι γενίκευση των CSL αλγεβρών.

Ένα θέμα που μας απασχολεί στο κεφάλαιο 3 είναι η λεγόμενη εικασία του Hopenwasser: Έστω $\mathcal{L}$ CSL σύνδεσμος και $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ η αντίστοιχη CSL άλγεβρα. Ορίζουμε ως $\mathcal{A}_0$ τον ακόλουθο χώρο:

$$\mathcal{A}_0 = [LTL^\perp : T \in \mathcal{A}, L \in \mathcal{L}]^{-\|\cdot\|}.$$

Ο χώρος $\mathcal{A}_0$ είναι ένα ιδεώδες της $\mathcal{A}$ που περιέχεται στο ριζικό της $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Ο Hopenwasser έχει εικάσει ότι $\mathcal{A}_0 = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ [18], [29]. Η ισότητα αυτή πράγματι ισχύει στην ειδική περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι nest άλγεβρα [47]. Οι Κατάβολος και Κατσούλης απέδειξαν στο [31] ότι $\mathcal{A}_0 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = 0$. Ο I. Todorov στην διατριβή του [4] απέδειξε ότι οι χώροι $\mathcal{A}_0$ και $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ έχουν την ίδια ανακλαστική θήκη (βλέπε παράγραφο 2.4). Εμείς βελτιώνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.0.10 $\mathcal{A}_0^{-w^*} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*}$.

Αποδεικνύουμε ότι κάθε CSL άλγεβρα $\mathcal{A}$ διασπάται στην ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 1.0.11 $\mathcal{A} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*} + \Delta(\mathcal{A})$.

Στην ειδική δε περίπτωση που η CSL άλγεβρα $\mathcal{A} \subset B(H)$ είναι ισχυρά ανακλαστική (βλέπε παράγραφο 2.4) έχουμε την ακόλουθη διάσπασή της σε ευθύ άθροισμα:

Θεώρημα 1.0.12 $\mathcal{A} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*} \oplus \sum_n \oplus A_n B(H) A_n$ *όπου*

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{A : A \textit{ είναι άτομο του συνδέσμου } \mathcal{L}\}.$$

Νέο επίσης για την θεωρία των CSL αλγεβρών είναι το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.0.13 *Ο χώρος* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*}$ *είναι ανακλαστικός.*

Τα προηγούμενα γενικεύονται στην κλάση των ανακλαστικών masa προτύπων. Έστω $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2)$ ανακλαστικό masa πρότυπο. Είναι ένα αποτέλεσμα του Erdos [23] ότι υπάρχουν μεταθετικές οικογένειες προβολών $\mathcal{S}_1 \subset B(H_1), \mathcal{S}_2 \subset B(H_2)$ και $1-1$, επί απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ώστε

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : TL = \phi(L)TL \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Η τριάδα $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \phi)$ έτσι όπως ορίζεται (παράγραφος 2.4.1) γενικεύει την έννοια του συνδέσμου των αναλλοίωτων υπόχωρων των CSL αλγεβρών αφού αν το $\mathcal{U}$ είναι CSL άλγεβρα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathrm{Lat}(\mathcal{U})$ και $\phi = id_{\mathrm{Lat}(\mathcal{U})}$.

Το ανάλογο για το $\mathcal{U}$ της διαγωνίου μίας CSL άλγεβρας είναι ο τριαδικός δακτύλιος τελεστών

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}$$

και ο υπόχωρος του $\mathcal{U}$ που αντιστοιχεί στην w^*-κλειστή θήκη του ριζικού μίας CSL άλγεβρας είναι ο

$$\mathcal{U}_0 = [\phi(L)TL^\perp : T \in \mathcal{U}, L \in \mathcal{S}_1]^{-w^*}.$$

Αποδεικνύουμε το ανάλογο του θεωρήματος 1.0.11

Θεώρημα 1.0.14 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$.

Ορίζουμε μία έννοια που γενικεύει αυτή των ατόμων των CSL συνδέσμων. Αυτή την φορά τα άτομα είναι ζεύγη της μορφής $(E_n, \theta(E_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_1'' \times \mathcal{S}_2''$ όπου θ είναι κατάλληλη απεικόνιση που εξαρτάται από την ϕ. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε την παράγραφο 3.5. Αποδεικνύουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 1.0.15 *Αν* $R_1(\Delta(\mathcal{U}))$ *είναι το σύνολο των πρώτης τάξης τελεστών της διαγωνίου* $\Delta(\mathcal{U})$, *τότε*

$$[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \sum_n \oplus \theta(E_n) B(H_1, H_2) E_n.$$

Στην ειδική περίπτωση που το $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο έχουμε την ακόλουθη ευθεία διάσπαση του:

Θεώρημα 1.0.16

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \sum_n \oplus \theta(E_n) B(H_1, H_2) E_n.$$

Σημαντικό θεωρούμε το ακόλουθο θεώρημα που είναι γενίκευση του 1.0.13.

Θεώρημα 1.0.17 *Ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός.*

Μελετάμε ιδιαίτερα τον τριαδικό δακτύλιο τελεστών $\Delta(\mathcal{U})$ που τον αποκαλούμε διαγώνιο του $\mathcal{U}$. Είναι γνωστό ότι αν $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ με $\mathcal{L}$ CSL σύνδεσμο τότε η διαγώνιος της $\mathcal{A}$ ισούται με τον μεταθέτη του συνδέσμου $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$. Γενικεύουμε αυτό το γεγονός με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.0.18 *Η διαγώνιος $\Delta(\mathcal{U})$ παράγεται από μία μερική ισομετρία V και τις άλγεβρες $\mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2'$:*

$$\Delta(\mathcal{U}) = [\mathcal{S}_2' V \mathcal{S}_1']^{-w^*}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που η διαγώνιος είναι ουσιώδης χώρος, δηλαδή για την περίπτωση που $\mathrm{Ker}(\Delta(\mathcal{U})) = 0$ και $\mathrm{Ker}(\Delta(\mathcal{U})^*) = 0$. Αποδεικνύουμε στο κεφάλαιο 4 το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.0.19 *Η διαγώνιος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης αν και μόνο αν τα $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ είναι CSL's και η απεικόνιση ϕ είναι ισομορφισμός συνδέσμων που σέβεται την συνέχεια. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τις ισότητες*

$$\mathcal{U} = [\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*} = [\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}.$$

Περισσότερες λεπτομέρειες για τα αποτελέσματα που επιτυγχάνουμε υπάρχουν στις εισαγωγές των κεφαλαίων 3,4,5.

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενα

Για την πληρότητα αλλά και την ανεξάρτητη ανάγνωση της εργασίας αυτής στο κεφάλαιο 2 συγκεντρώνουμε τις βασικές έννοιες που χρησιμοποιούμε.

Συμβολισμοί και πρωταρχικές έννοιες 2.1
Έστω H_1, H_2, H χώροι Χίλμπερτ. Συμβολίζουμε με $B(H_1, H_2)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών από τον H_1 στον H_2 και με $B(H)$ τον χώρο $B(H, H)$. Έστω $\mathcal{S} \subset B(H_1, H_2)$. Συμβολίζουμε με $[\mathcal{S}]$ την γραμμική θήκη του $\mathcal{S}$ και με $R_1(\mathcal{S})$ το σύνολο που περιέχει τον μηδενικό τελεστή και τους πρώτης τάξης τελεστές που ανήκουν στο $\mathcal{S}$. Αν $\mathcal{S} \subset B(H)$ συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ το σύνολο των προβολών που περιέχονται στο $\mathcal{S}$, με $\mathcal{S}'$ την υπάλγεβρα του $B(H)$ που περιέχει τους τελεστές που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του $\mathcal{S}$ και με $\mathcal{S}''$ την άλγεβρα $(\mathcal{S}')'$. Αν $\mathcal{A}_1 \subset B(H_1)$ και $\mathcal{A}_2 \subset B(H_2)$ είναι άλγεβρες, ένας υπόχωρος $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2)$ καλείται $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1-$**πρότυπο** αν $\mathcal{A}_2\mathcal{U}\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{U}$. Ένας τελεστής $U \in B(H_1, H_2)$ που είναι ισομετρία και επί λέγεται **μοναδιαίος τελεστής (unitary)**. Αποδεικνύεται ότι ένας τελεστής $U \in B(H_1, H_2)$ είναι μοναδιαίος τελεστής αν και μόνο αν $U^*U = I_{H_1}, UU^* = I_{H_2}$. Έστω $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ άλγεβρες όπως προηγουμένως. Αυτές καλούνται **μοναδιαία ισοδύναμες** αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U \in B(H_1, H_2)$ ώστε $\mathcal{A}_2 = U\mathcal{A}_1U^*$. Αν $x \in H_2, y \in H_1$ με $x \odot y^*$ συμβολίζουμε τον πολύ πρώτης τάξης τελεστή

$$H_1 \to H_2 : z \to \langle z, y \rangle_{H_1} x.$$

Ένας τελεστής $T \in B(H)$ λέγεται **θετικός** αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Αποδεικνύεται [1] ότι τότε υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής S ώστε $S^2 = T$. Συμβολίζουμε $S = T^{\frac{1}{2}}$. Αν $T \in B(H_1, H_2)$ θέτουμε $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Αν $K \subset H$ συμβολίζουμε με $K^{\perp}$ τον υπόχωρο του H που αποτελείται από τα διανύσματα που είναι κάθετα στο σύνολο K. Αν P ορθογώνια προβολή του χώρου Χίλμπερτ H συμβολίζουμε με $P^{\perp}$ την προβολή επί του χώρου $P(H)^{\perp}$. Τέλος αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα συμβολίζουμε με $Ball(X)$ την μοναδιαία σφαίρα του $X : \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

2.1 Τελεστές και τοπολογίες στον $B(H_1, H_2)$

Τα όσα αναφέρονται στην παράγραφο 2.1 μπορούν να βρεθούν στα [30], [53].

2.1.1 Μερικές ισομετρίες

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ. Μία **μερική ισομετρία** είναι ένας τελεστής $U \in B(H_1, H_2)$ για τον οποίο υπάρχει κλειστός υπόχωρος K του H_1 ώστε η απεικόνιση $U|_K$ να είναι ισομετρία και να ισχύει $K^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(U)$. Ο χώρος K λέγεται αρχικός χώρος του U και ο $U(K)$ τελικός χώρος του U. Ο τελεστής U^*U είναι η ορθογώνια προβολή επί του K και ο UU^* είναι η ορθογώνια προβολή επί του $U(K)$. Εύκολα ελέγχεται ότι $UU^*U = U$ και ότι ο τελεστής U^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο τον τελικό του U και τελικό χώρο τον αρχικό του U. Πολύ σημαντικό και χρήσιμο θα μας είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1 ***(Θεώρημα πολικής αναπαράστασης)****[1] Έστω τελεστής $T \in B(H_1, H_2)$ και $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Τότε υπάρχει μοναδική μερική ισομετρία $U \in B(H_1, H_2)$ με αρχικό χώρο τον $\overline{|T|(H_1)}$ και τελικό τον $\overline{T(H_1)}$ ώστε $T = U|T|$.*

2.1.2 Συμπαγείς τελεστές

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ. Ένας τελεστής $T \in B(H_1, H_2)$ λέγεται **συμπαγής** αν το σύνολο $T(Ball(H_1))$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του H_2. Το σύνολο των τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι πυκνό [1] στο σύνολο $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ των συμπαγών τελεστών από τον H_1 στον H_2. Το $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ είναι $B(H_2), B(H_1)$ πρότυπο. Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική βάση του χώρου Χίλμπερτ H_1 και $B(H_1)^+$ το σύνολο των θετικών τελεστών του $B(H_1)$. Η απεικόνιση

$$tr : B(H_1)^+ \to [0, +\infty], \quad tr(S) = \sum_{i \in I} \langle S(e_i), e_i \rangle$$

λέγεται **ίχνος**. Αποδεικνύεται ότι το ίχνος είναι ανεξάρτητο της ορθοκανονικής βάσης που επιλέξαμε. Για κάθε θετικό αριθμό $p \geq 1$ ορίζουμε [15] τον χώρο των **p-Schatten τελεστών** $C_p(H_1, H_2)$ που αποτελείται από τους τελεστές $T \in B(H_1, H_2)$ για τους οποίους το ίχνος του τελεστή $|T|^p$ είναι πραγματικός αριθμός: $tr(|T|^p) < \infty$. Κάθε p-Schatten τελεστής είναι συμπαγής. Ο χώρος $C_p(H_1, H_2)$ εφοδιάζεται με την νόρμα: $\|T\|_p = tr(|T|^p)^{\frac{1}{p}}$. Ο χώρος $C_1(H_1, H_2)$ καλείται χώρος των trace class τελεστών και ο χώρος $C_2(H_1, H_2)$ χώρος των Hilbert Schmidt τελεστών. Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\|T\| \leq \|T\|_p$ για κάθε $T \in C_p(H_1, H_2)$ και για κάθε $p \geq 1$ όπου $\|\cdot\|$ η operator νόρμα στον $B(H_1, H_2)$.

(ii) $\overline{[R_1(B(H_1, H_2))]}^{\|\cdot\|_p} = C_p(H_1, H_2)$ για κάθε $p \geq 1$.

(iii) Ο χώρος $C_p(H_1, H_2)$ είναι $B(H_2), B(H_1)$ πρότυπο.

(iii) Ο χώρος $C_2(H_1, H_2)$ είναι χώρος Χίλμπερτ με εσωτερικό γινόμενο: $\langle T, S \rangle = tr(S^* T)$.

(iv) $tr(TS) = tr(ST)$ για κάθε $T \in B(H_1, H_2), S \in C_1(H_2, H_1)$.

2.1.3 Τοπολογίες στον $B(H_1, H_2)$

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ και $(C_1(H_2, H_1))^*$ ο δυικός του χώρου Banach $C_1(H_2, H_1)$. Η απεικόνιση:

$$\phi : B(H_1, H_2) \to (C_1(H_2, H_1))^* : \phi(T)(S) = tr(TS)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός και επομένως ο χώρος $B(H_1, H_2)$ εφοδιάζεται με w^*-**τοπολογία** [2]. Ως προς αυτή την τοπολογία ένα δίκτυο $(T_i) \subset B(H_1, H_2)$ συγκλίνει στον $T \in B(H_1, H_2)$ αν

$$tr(T_i S) \to tr(TS) \quad \text{για κάθε } S \in C_2(H_2, H_1).$$

Από το Θεώρημα Αλάογλου [2] ο τοπολογικός χώρος $(Ball(B(H_1, H_2)), w^*)$ είναι συμπαγής. Αν δε οι χώροι Χίλμπερτ H_1, H_2 είναι διαχωρίσιμοι είναι μετρικοποιήσιμος [53].

Η **ισχυρή τοπολογία τελεστών (sot)** στον $B(H_1, H_2)$ είναι η τοπολογία που επάγεται από τις ημινόρμες

$$B(H_1, H_2) \to \mathbb{R}^+ : T \to \|T(x)\|, x \in H_1.$$

Ως προς αυτή την τοπολογία ένα δίκτυο $(T_i) \subset B(H_1, H_2)$ συγκλίνει στον $T \in B(H_1, H_2)$ αν και μόνο αν συγκλίνει κατά σημείο, δηλαδή

$$\|T_i(x) - T(x)\| \to 0 \quad \text{για κάθε } x \in H_1.$$

Η **ασθενής τοπολογία τελεστών (wot)** στον $B(H_1, H_2)$ είναι η τοπολογία που επάγεται από τις ημινόρμες

$$B(H_1, H_2) \to \mathbb{R}^+ : T \to |\langle T(x), y\rangle|, x \in H_1, y \in H_2.$$

Ως προς αυτή την τοπολογία ένα δίκτυο $(T_i) \subset B(H_1, H_2)$ συγκλίνει στον $T \in B(H_1, H_2)$ αν και μόνο αν

$$\langle T_i(x), y\rangle \to \langle T(x), y\rangle \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Η wot τοπολογία στον $B(H_1, H_2)$ είναι ασθενέστερη τόσο της sot όσο και της w^* τοπολογίας. Όμως στα norm φραγμένα υποσύνολα του $B(H_1, H_2)$ η wot τοπολογία συμπίπτει με την w^*.

2.2 Άλγεβρες von Neumann

Έστω H χώρος Χίλμπερτ. Μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $B(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή και είναι w^*-κλειστή καλείται **άλγεβρα von Neumann.** Το επόμενο πολύ σπουδαίο θεώρημα καλείται **Θεώρημα του δεύτερου μεταθέτη του von Neumann.**

Θεώρημα 2.2.1 *[16] Έστω $\mathcal{A}$ αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $B(H)$ ώστε ο χώρος $\mathcal{A}(H)$ να είναι πυκνός στον H. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{-w^*} = \mathcal{A}^{-wot} = \mathcal{A}^{-sot}.$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα περιγράφουν σημαντικές ιδιότητες των αλγεβρών von Neumann και θα μας είναι χρήσιμα στην συνέχεια.

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα von Neumann. Τότε*

$$\mathcal{A} = [\mathcal{P}(\mathcal{A})]^{\|\cdot\|}.$$

Θεώρημα 2.2.3 *[19] Κάθε $*-$ισομορφισμός μεταξύ αλγεβρών von Neumann είναι w^*-συνεχής.*

Γενίκευση των αλγεβρών von Neumann αποτελούν οι W^*-άλγεβρες. Μία C^*-άλγεβρα που είναι δυικός χώρου Banach καλείται W^*-**άλγεβρα** . Το επόμενο Θεώρημα ανήκει στον Sakai [51].

Θεώρημα 2.2.4 *Για κάθε W^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, υπάρχει χώρος Χίλμπερτ H και $1-1$, w^*-αμφισυνεχής, $*-$μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$.*

Μία αβελιανή άλγεβρα von Neumann, που δεν περιέχεται σε άλλη αβελιανή θα καλείται **maximal abelian selfadjoint algebra** (μεγιστική αυτοσυζυγής αβελιανή άλγεβρα) εν συντομία **masa**. Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Για κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζεται ο λεγόμενος **πολλαπλασιαστικός τελεστής** $M_f \in B(L^2(X, \mu))$ ως εξής:

$$M_f(g) = fg \text{ για κάθε } g \in L^2(X, \mu).$$

Η άλγεβρα $\{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}$ καλείται **πολλαπλασιαστική άλγεβρα** είναι masa και είναι ισομετρικά $*-$ισόμορφη με την άλγεβρα $L^\infty(X, \mu)$. Αντίστροφα, κάθε masa που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Χίλμπερτ είναι μοναδιαία ισοδύναμη [30] με μία πολλαπλασιαστική άλγεβρα σε χώρο μέτρου (X, μ) όπου ο X μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το μ κανονικό μέτρο Borel σε αυτόν.

Έστω $\mathcal{A}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann και $P \in \mathcal{A}$ προβολή. Η P λέγεται **ελαχιστική** αν δεν υπάρχει άλλη προβολή της $\mathcal{A}$ που να περιέχεται γνήσια στην P. Αν το supremum των ελαχιστικών προβολών της $\mathcal{A}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής η $\mathcal{A}$ λέγεται **ολικά ατομική**. Αν η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει ελαχιστικές προβολές λέγεται **συνεχής**.

Θεώρημα 2.2.5 *[30] Έστω $\mathcal{D}$ masa που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H. Τότε υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{D}$ ώστε η άλγεβρα $\mathcal{D}|_{P(H)} = \{D|_{P(H)} : D \in \mathcal{D}\}$ να είναι ολικά ατομική και η άλγεβρα $\mathcal{D}|_{P(H)^\perp} = \{D|_{P(H)^\perp} : D \in \mathcal{D}\}$ να είναι συνεχής.*

Θεώρημα 2.2.6 *[30] Κάθε $*-$ισομορφισμός ανάμεσα σε masas επάγεται από μοναδιαίο τελεστή, δηλαδή επιφέρει μοναδιαία ισοδυναμία μεταξύ των αλγεβρών.*

2.3 Σύνδεσμοι και ανακλαστικότητα

Ορισμός 2.3.1 *Έστω H χώρος Χίλμπερτ και $\{P_i : i \in I\}$ οικογένεια προβολών του H. Με $\vee_i P_i$ συμβολίζουμε την προβολή επί του χώρου $[\cup_i P_i(H)]^-$ και με $\wedge_i P_i$ την προβολή επί του χώρου $\cap_i P_i(H)$.*

Ορισμός 2.3.2 *Έστω H χώρος Χίλμπερτ. Μία οικογένεια προβολών $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(B(H))$ λέγεται* ***σύνδεσμος*** *αν περιέχει τον μηδενικό και ταυτοτικό τελεστή και*

$$P, Q \in \mathcal{L} \Rightarrow P \vee Q,\ \ P \wedge Q \in \mathcal{L}.$$

Ενώ θα λέγεται ***πλήρης σύνδεσμος*** *αν περιέχει τον μηδενικό και ταυτοτικό τελεστή και για κάθε οικογένεια*

$$\{P_i : i \in I\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \vee_i P_i \in \mathcal{L},\ \ \wedge_i P_i \in \mathcal{L}$$

Ένας σύνδεσμος που είναι sot κλειστός είναι πλήρης σύνδεσμος. Το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με πλήρεις συνδέσμους και για αυτό στην συνέχεια όταν λέμε σύνδεσμο θα εννοούμε πλήρη σύνδεσμο.

Ορισμός 2.3.3 *Ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ για τον οποίο ισχύει*

$$P \in \mathcal{L} \Rightarrow P^{\perp} \in \mathcal{L}$$

θα λέγεται ***ορθοσύνδεσμος.***

Ορισμός 2.3.4 *Έστω $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ σύνδεσμοι προβολών.*

(i) Μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ που είναι $1-1$, επί και διατηρεί την διάταξη, δηλαδή έχει την ιδιότητα :

$$P \leq Q \Rightarrow \phi(P) \leq \phi(Q)$$

θα λέγεται ***ισομορφισμός συνδέσμων****.*

(ii) Αν $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ είναι ορθοσύνδεσμοι και η ϕ ικανοποιεί την επί πλέον συνθήκη $\phi(P^{\perp}) = \phi(P)^{\perp}$ θα λέγεται ***ορθο-ισομορφισμός συνδέσμων****.*

Είναι μία εύκολη άσκηση να αποδειχθεί ότι αν η απεικόνιση $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων είναι sup και inf συνεχής. Δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\phi(\vee_i P_i) = \vee_i \phi(P_i), \quad \phi(\wedge_i P_I) = \wedge_i \phi(P_i)$$

για κάθε οικογένεια $\{P_i : I \in I\} \subset \mathcal{L}_1$.

Ορισμός 2.3.5 *(**Halmos**[26]) Έστω H χώρος Χίλμπερτ και $\mathcal{X} \subset B(H)$, θέτουμε*

$$\mathrm{Lat}(\mathcal{X}) = \{L \in \mathcal{P}(B(H)) : L^{\perp}\mathcal{X}L = 0\}.$$

Έστω $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(B(H))$, θέτουμε

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}) = \{A \in B(H) : L^{\perp}AL = 0 \ \text{ για κάθε } \ L \in \mathcal{L}\}.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η οικογένεια $\mathrm{Lat}(\mathcal{X})$ είναι *sot*-κλειστός σύνδεσμος και ο χώρος $\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ είναι wot κλειστή άλγεβρα με μονάδα.

Ορισμός 2.3.6 *(**Halmos**[26]) Μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ για την οποία ισχύει $\mathrm{Alg}(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ θα καλείται **ανακλαστική άλγεβρα** και ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ για τον οποίο ισχύει $\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ θα καλείται **ανακλαστικός σύνδεσμος**.*

Ορισμός 2.3.7 *Ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ του οποίου οι προβολές μετατίθενται λέγεται **μεταθετικός σύνδεσμος προβολών (CSL: commutative subspace lattice)**. Η δε άλγεβρα $\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ λέγεται **CSL άλγεβρα**. Στην ειδική περίπτωση που το $\mathcal{L}$ είναι ολικά διατεταγμένο θα λέγεται **nest** και η άλγεβρα $\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ **nest άλγεβρα**.*

Θεώρημα 2.3.1 *Κάθε CSL σύνδεσμος είναι ανακλαστικός.*

Το προηγούμενο θεώρημα αποδείχθηκε πρώτα από τον Arveson [5] στην περίπτωση των διαχωρίσιμων χώρων Χίλμπερτ και αργότερα ο Davidson έδειξε [17] ότι ισχύει σε κάθε χώρο Χίλμπερτ.

Ορισμός 2.3.8 *Έστω $\mathcal{S}$ ένας CSL σύνδεσμος και $L \in \mathcal{S}$. Συμβολίζουμε με $L_{\flat}$ την προβολή $\vee\{M \in \mathcal{S} : M < L\}$. Όταν $L_{\flat} < L$ καλούμε την προβολή $L - L_{\flat} \in \mathcal{S}''$ **άτομο** του $\mathcal{S}$. Αν ο σύνδεσμος $\mathcal{S}$ δεν έχει άτομα λέμε ότι είναι **συνεχής**. Αν τα άτομα παράγουν όλο το χώρο, δηλαδή το supremum τους είναι ο ταυτοτικός τελεστής, λέμε ότι ο σύνδεσμος $\mathcal{S}$ είναι **ολικά ατομικός.***

2.4 Ανακλαστικοί υπόχωροι

Η έννοια της ανακλαστικότητας υποχώρων τελεστών εισάγεται για πρώτη φορά από τους Loginov και Shulman [37], γενικεύοντας τον ορισμό 2.3.6.

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ και $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2)$. Η **ανακλαστική θήκη** του $\mathcal{U}$ είναι εξ ορισμού ο χώρος

$$\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) = \{T \in B(H_1, H_2) : T(x) \in \overline{[\mathcal{U}x]} \text{ για κάθε } x \in H_1\}.$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) =& \{T \in B(H_1, H_2) : \text{για κάθε προβολή } E, F : E\mathcal{U}F = 0 \Rightarrow ETF = 0\} \\ =& \{T \in B(H_1, H_2) : \text{για κάθε τελεστή } A, B : A\mathcal{U}B = 0 \Rightarrow ATB = 0\}.\end{aligned}$$

Χρήσιμη θα μας είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.4.1 *[39] Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ, $\mathcal{A}_1 \subset B(H_1), \mathcal{A}_2 \subset B(H_2)$ masas και $\mathcal{U}$ ένα $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_1-$πρότυπο. Τότε*

$$\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) = \{T \in B(H_1, H_2) : E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_2), F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1), E\mathcal{U}F = 0 \Rightarrow ETF = 0\}.$$

Ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ καλείται **ανακλαστικός** αν $\mathcal{U} = \mathrm{Ref}(\mathcal{U})$. Αν το $\mathcal{U}$ είναι μοναδιαία άλγεβρα τότε είναι ανακλαστική ως άλγεβρα, βλέπε ορισμό 2.3.6, αν και μόνο αν είναι ανακλαστικός ως υπόχωρος. Ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ καλείται **ισχυρά ανακλαστικός** αν $\mathcal{U} = \mathrm{Ref}(R_1(\mathcal{U}))$. Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα εδώ είναι το εξής: Σε ποιές περιπτώσεις αν ο $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικός, ο χώρος $[R_1(\mathcal{U})]$ είναι πυκνός στον $\mathcal{U}$ στην w^* η στην wot τοπολογία. Σημειώνουμε εδώ τα ακόλουθα σχετικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 2.4.2 *[36] Μία CSL άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά ανακλαστική αν και μόνο αν $\mathcal{A} = [R_1(\mathcal{A})]^{-w^*}$.*

Θεώρημα 2.4.3 *[24] Ένα ανακλαστικό πρότυπο $\mathcal{U}$ πάνω σε masas είναι ισχυρά ανακλαστικό αν και μόνο αν $\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-wot}$.*

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στο [24] παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ισχυρά ανακλαστικού masa προτύπου $\mathcal{U}$ όπου η ισότητα $\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$ δεν ισχύει.

2.4.1 Θεωρία απεικονίσεων του Erdos

Παρουσιάζουμε τώρα μερικές έννοιες που εισήγαγε ο Erdos [23].

Έστω $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(B(H_i)), i = 1, 2$ και $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2)$. Ορίζουμε $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$ την απεικόνιση $\phi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ που στέλνει κάθε προβολή $P \in \mathcal{P}_1$ στην προβολή επί του υπόχωρου $[TPy : T \in \mathcal{U}, y \in H_1]^-$. Η απεικόνιση ϕ είναι $\vee-$συνεχής (αυτό σημαίνει ότι διατηρεί αυθαίρετα suprema) και διατηρεί το 0.

Έστω $\phi^* = \mathrm{Map}(\mathcal{U}^*), \mathcal{S}_{1,\phi} = \{\phi^*(P)^\perp : P \in \mathcal{P}_2\}, \mathcal{S}_{2,\phi} = \{\phi(P) : P \in \mathcal{P}_1\}$. O Erdos έχει δείξει ότι ο μηδενικός τελεστής ανήκει στον $\mathcal{S}_{1,\phi}$, ο ταυτοτικός τελεστής ανήκει στον $\mathcal{S}_{2,\phi}$, το infimum (αντιστ. supremum) οποιασδήποτε οικογένειας προβολών του $\mathcal{S}_{1,\phi}$ (αντιστ. του $\mathcal{S}_{2,\phi}$,) ανήκει στον $\mathcal{S}_{1,\phi}$ (αντιστ. στον $\mathcal{S}_{2,\phi}$) ενώ η απεικόνιση $\phi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}} : \mathcal{S}_{1,\phi} \to \mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι 1-1 και επί. Επίσης ισχύει

$$(\phi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}})^{-1}(Q) = \phi^*(Q^\perp)^\perp \tag{2.4.1}$$

για κάθε $Q \in \mathcal{S}_{2,\phi}$ και

$$\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P)^\perp TP = 0 \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Καλούμε τις οικογένειες $\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}$ **ημισυνδέσμους** του $\mathcal{U}$.

Ορισμός 2.4.1 *Έστω $\mathcal{U}$ υπόχωρος του $B(H_1, H_2)$ και $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$. Ο $\mathcal{U}$ καλείται **ουσιώδης χώρος** αν $\phi(I_{H_1}) = I_{H_2}$ και $\phi^*(I_{H_2}) = I_{H_1}$. Ισοδύναμα αν $\mathrm{Ker}(\mathcal{U}) = 0$ και $\mathrm{Ker}(\mathcal{U}^*) = 0$.*

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 3.3, 4.4 και το Λήμμα 4.1 στο [23] παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, που το απομονώνουμε ως θεώρημα επειδή θα μας είναι πολύ χρήσιμο στην συνέχεια.

Θεώρημα 2.4.4 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL's που δρουν σε χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα και $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων. Ορίζουμε τον χώρο*

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(L)^\perp TL = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Τότε $\mathcal{S}_{1,\mathrm{Map}(\mathcal{U})} = \mathcal{S}_1, \ \mathcal{S}_{2,\mathrm{Map}(\mathcal{U})} = \mathcal{S}_2$ και $\mathrm{Map}(\mathcal{U})|_{\mathcal{S}_1} = \phi$.

2.5 Συνθετικότητα

Έστω $\mathcal{U}$ ανακλαστικό masa πρότυπο. Τότε υπάρχει ελάχιστο w^* κλειστό masa πρότυπο που περιέχεται στο $\mathcal{U}$ και του οποίου η ανακλαστική θήκη ισούται με το $\mathcal{U}$. Συμβολίζουμε αυτό το masa πρότυπο με $\mathcal{U}_{min}$. Αν $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{min}$ καλούμε το πρότυπο $\mathcal{U}$ **συνθετικό**. Κάθε CSL άλγεβρα περιέχει μία masa και συνεπώς είναι masa πρότυπο. Αποδεικνύεται ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι CSL άλγεβρα τότε το $\mathcal{A}_{min}$ είναι άλγεβρα που περιέχει την διαγώνιο $\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$.

Την άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}$ μπορούμε να την δούμε και από διαφορετική οπτική γωνία. Έστω

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{B},\ w^* - \text{κλειστή υπάλγεβρα της } \mathcal{A} : \mathrm{Lat}(\mathcal{B}) = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}), \Delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι η οικογένεια $\mathfrak{F}$ έχει ελάχιστο στοιχείο που δεν είναι άλλο από την άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}$.

Ανακλαστικά πρότυπα πάνω σε nest άλγεβρες η γενικότερα πρότυπα πάνω σε ισχυρά ανακλαστικές CSL άλγεβρες αποδεικνύεται ότι είναι συνθετικά. Τα ανακλαστικά TRO's (βλέπε παρακάτω) που είναι και masa πρότυπα είναι επίσης συνθετικά [4]. Ο Arveson έδωσε [5] το πρώτο παράδειγμα μη συνθετικής CSL άλγεβρας. Παράδειγμα ανακλαστικού masa προτύπου που δεν είναι συνθετικό υπάρχει στο [4].

Ιστορικά, η έννοια της συνθετικότητας ορίσθηκε από τον Arveson [5] και αφορούσε τις CSL άλγεβρες που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ. Αργότερα, [15], η έννοια αυτή γενικεύθηκε στα masa πρότυπα που δρουν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ. Ενώ πρόσφατα στο [52] η έννοια της συνθετικότητας και τα αποτελέσματα που περιγράψαμε στην αρχή αποδείχθηκε ότι ισχύουν και στην περίπτωση που οι CSL άλγεβρες και γενικότερα τα masa πρότυπα δρουν σε μη διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ.

2.6 Τριαδικοί δακτύλιοι τελεστών (TRO's)

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ. Ένας υπόχωρος $\mathcal{M}$ του $B(H_1, H_2)$ καλείται **τριαδικός δακτύλιος τελεστών** (TRO) αν

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Τα TRO's εισήχθηκαν στο [28] και αποτελούν γενίκευση των αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών [27], [55]. Έχουν πολλές ιδιότητες παρόμοιες με τις C^*−άλγεβρες και τις άλγεβρες von Neumann . Πρόσφατα τα αντικείμενα αυτά έχουν μελετηθεί από την σκοπιά της θεωρίας των αφηρημένων χώρων τελεστών όπου παίζουν σημαντικό ρόλο [20], [34], [50]. Στο [32] τα TRO's μελετήθηκαν

ως «κανονικοποιητές» αλγεβρών, αυτοσυζυγών και μη αυτοσυζυγών.
Σημειώνουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα απο το [32] που θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία αυτή.

Θεώρημα 2.6.1 *Ένα TRO είναι w^* κλειστό αν και μόνο αν είναι wot κλειστό αν και μόνο αν είναι ανακλαστικό.*

Θεώρημα 2.6.2 *Έστω $\mathcal{M} \subset B(H_1, H_2)$ w^* κλειστό TRO, όπου H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ και $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Τότε*

$$\mathcal{M} = \{T \in \ B(H_1, H_2) : TP = \chi(P)T \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\chi}\}.$$

Θεώρημα 2.6.3 *Κάθε w^* κλειστό TRO ισούται με την norm κλειστή γραμμική θήκη των μερικών ισομετριών που περιέχει.*

2.7 Αφηρημένοι χώροι και αφηρημένες άλγεβρες τελεστών

Η θεωρία των αφηρημένων χώρων τελεστών, [10], [21], [43], [44] είναι πολύ πρόσφατη. Ξεκίνησε ουσιαστικά με το Θεώρημα του Ruan [48], (1988), και αναπτύχθηκε περαιτέρω με τις εργασίες των Effros, Ruan, Blecher, Paulsen και άλλων. Η θεωρία των αφηρημένων χώρων τελεστών ενοποιεί ιδέες και μεθόδους της θεωρίας τελεστών με εκείνες της θεωρίας των χώρων Banach. Αφηρημένος χώρος τελεστών είναι κάθε χώρος που μπορεί να εμφυτευθεί «πλήρως ισομετρικά» στον $B(H)$ για κάποιο χώρο Χίλμπερτ H. Κάθε υπόχωρος C^*-άλγεβρας είναι αφηρημένος χώρος τελεστών και επομένως όλοι οι χώροι Banach, αφου εμφυτεύονται ισομετρικά σε μία C^*-άλγεβρα [2], την άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων πάνω στην μοναδιαία σφαίρα του δυικού εφοδιασμένη με την w^* τοπολογία, μπορούν να αποκτήσουν δομή αφηρημένου χώρου τελεστών, την λεγόμενη minimal [10], [21], [43], [44].

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τους ορισμούς των αφηρημένων χώρων τελεστών, των αφηρημένων αλγεβρών τελεστών και των αφηρημένων δυικών αλγεβρών τελεστών. Παρουσιάζουμε δε, τα βασικά θεωρήματα που χρησιμοποιούμε. Αν $\mathcal{X}$ είναι διανυσματικός χώρος, συμβολίζουμε με $M_n(\mathcal{X})$, $n \in \mathbb{N}$ τον χώρο:

$$M_n(\mathcal{X}) = \{(x_{ij})_{1 \le i,j \le n} : x_{ij} \in \mathcal{X}\}.$$

Παρατήρησε ότι ο χώρος $M_n(\mathcal{X})$ είναι πρότυπο πάνω στην άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$. Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ διανυσματικοί χώροι $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική απεικόνιση, συμβολίζουμε με π_n, $n \in \mathbb{N}$ την απεικόνιση από τον χώρο $M_n(\mathcal{X})$ στον χώρο $M_n(\mathcal{Y})$ που δίνεται από τον τύπο $\pi_n((x_{ij})_{i,j}) = (\pi(x_{ij}))_{i,j}$.

Ορισμός 2.7.1 *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ διανυσματικοί χώροι, για τους οποίους οι χώροι $M_n(\mathcal{X})$ και $M_n(\mathcal{Y})$ είναι χώροι με νόρμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μία γραμμική απεικόνιση $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ καλείται* ***πλήρως φραγμένη*** *αν ο τελεστής π_n είναι συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ισχύει $sup_{n\in\mathbb{N}}\|\pi_n\| < \infty$. Συμβολίζουμε σε αυτή την περίπτωση $\|\pi\|_{cb} = sup_{n\in\mathbb{N}}\|\pi_n\|$. Η π καλείται* ***πλήρης συστολή*** *αν $\|\pi\|_{cb} \leq 1$ και τέλος καλείται* ***πλήρης ισομετρία*** *αν ο π_n είναι ισομετρική εμφύτευση για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Στο εξής αν H είναι χώρος Χίλμπερτ, θα εφοδιάζουμε τον χώρο $M_n(B(H))$, $n \in \mathbb{N}$ με την operator νόρμα που επάγεται από την φυσιολογική του ταύτιση με υπόχωρο του $B(H^n)$, όπου H^n είναι ο χώρος Χίλμπερτ που προκύπτει από το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων του H.

Ορισμός 2.7.2 *Έστω $\mathcal{X}$ διανυσματικός χώρος, για τον οποίο ο χώρος $M_n(\mathcal{X})$ είναι χώρος με νόρμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο $\mathcal{X}$ καλείται* ***αφηρημένος χώρος τελεστών*** *αν υπάρχει χώρος Χίλμπερτ H και πλήρης ισομετρία $\pi : \mathcal{X} \to B(H)$.*

Θεώρημα 2.7.1 *(**Θεώρημα του Ruan** [48]) Έστω $(\mathcal{X}, (\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}})$ όπου $\mathcal{X}$ είναι διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\|_n$ νόρμα στον $M_n(\mathcal{X})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο $\mathcal{X}$ είναι αφηρημένος χώρος τελεστών αν και μόνο αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:*

(i) $\|\alpha x\beta\|_n \leq \|\alpha\|\|x\|_n\|\beta\|$ για κάθε $\alpha, \beta \in M_n(\mathbb{C}), x \in M_n(\mathcal{X})$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right\|_{m+n} = max\{\|x\|_m, \|y\|_n\}$ για κάθε $x \in M_m(\mathcal{X}), y \in M_n(\mathcal{Y})$ και για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 2.7.2 *[10] Αν $\mathcal{X}$ είναι αφηρημένος χώρος τελεστών τότε και ο δυικός του χώρος, ο $\mathcal{X}^*$, είναι αφηρημένος χώρος τελεστών όταν τον εφοδιάζουμε με την ακολουθία των νορμών που προκύπτουν από την φυσιολογική εμφύτευση*

$$\theta : M_n(\mathcal{X}^*) \to CB(\mathcal{X}, M_n(\mathbb{C})) : \theta((x^*_{ij})_{ij})(x) = (x^*_{ij}(x))_{ij}$$

όπου $x_{ij}^* \in \mathcal{X}^*, x \in \mathcal{X}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο χώρος $CB(\mathcal{X}, M_n(\mathbb{C}))$ είναι ο χώρος των πλήρως φραγμένων τελεστών από τον $\mathcal{X}$ στον $M_n(\mathbb{C})$ με νόρμα την $\|\cdot\|_{cb}$.

Ορισμός 2.7.3 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα που είναι επίσης αφηρημένος χώρος τελεστών. Ονομάζουμε την $\mathcal{A}$ **αφηρημένη άλγεβρα τελεστών** αν υπάρχει χώρος Χίλμπερτ H και πλήρως ισομετρικός αλγεβρικός μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$.*

Το επόμενο θεώρημα που ανήκει στους Blecher, Ruan, Sinclair χαρακτηρίζει τις αφηρημένες άλγεβρες τελεστών.

Θεώρημα 2.7.3 *(**BRS theorem** [12]). Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα που είναι επίσης αφηρημένος χώρος τελεστών. Η $\mathcal{A}$ είναι αφηρημένη άλγεβρα τελεστών αν και μόνο αν η άλγεβρα $M_n(\mathcal{A})$ είναι άλγεβρα Banach για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ισχύει η ανισότητα*

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j} \right\|_{M_n(\mathcal{A})} \leq \|(a_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})} \|(b_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})}$$

για κάθε $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_n(\mathcal{A})$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ εμφυτεύεται ισομετρικά και ισομορφικά σε κάποιον $B(H), H$ χώρος Χίλμπερτ. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η άλγεβρα $M_n(\mathcal{A})$ λαμβάνει νόρμα θεωρούμενη ως υπάλγεβρα του $B(H^n)$. Η νόρμα αυτή είναι η μοναδική που καθιστά την $M_n(\mathcal{A})$ C^*-άλγεβρα. Με αυτόν τον τρόπο οι C^*-άλγεβρες καθίστανται αφηρημένες άλγεβρες τελεστών σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως.

Χρήσιμο θα μας είναι το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.7.4 *[10] Έστω $\mathcal{A}$ C^*-άλγεβρα, K χώρος Χίλμπερτ και $\pi : \mathcal{A} \to B(K)$ αλγεβρικός μορφισμός. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η π είναι συστολή.

(ii) Η π είναι πλήρης συστολή.

(iii) Η π είναι $*-$μορφισμός.

Αν $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα του $B(H), H$ χώρος Χίλμπερτ, ορίζουμε ως διαγώνιο της, $\Delta(\mathcal{A})$, την άλγεβρα $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$. Αν $\mathcal{A}$ είναι αφηρημένη άλγεβρα τελεστών και $\pi : \mathcal{A} \to B(H), H$ χώρος Χίλμπερτ, ένας πλήρως ισομετρικός αλγεβρικός μορφισμός, ορίζουμε ως διαγώνιο της την άλγεβρα $\pi^{-1}(\Delta(\pi(\mathcal{A})))$ και την συμβολίζουμε με $\Delta(\mathcal{A})$. Αποδεικνύεται εύκολα [10] ότι η διαγώνιος της $\mathcal{A}$ είναι ανεξάρτητη της αναπαράστασης π που επιλέξαμε. Πρόσεξε ακόμα ότι αν K είναι χώρος Χίλμπερτ και $\sigma : \mathcal{A} \to B(K)$ απεικόνιση που είναι συστολή και αλγεβρικός μορφισμός, από το Θεώρημα 2.7.4 προκύπτει ότι η απεικόνιση $\sigma|_{\Delta(\mathcal{A})}$ είναι $*-$μορφισμός.

Ορισμός 2.7.4 *Έστω $\mathcal{A}$ αφηρημένη άλγεβρα τελεστών που είναι δυικός χώρου Banach. Ονομάζουμε την $\mathcal{A}$* ***δυική αφηρημένη άλγεβρα τελεστών*** *αν υπάρχει χώρος Χίλμπερτ H και w^*-συνεχής, πλήρως ισομετρικός αλγεβρικός μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$*

Παρατήρησε πως από το Θεώρημα 2.2.4 προκύπτει ότι οι W^*-άλγεβρες είναι αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών. Ο Sakai έχει δείξει, [51], ότι οι W^*-άλγεβρες έχουν μοναδικό προδυικό κάτι που γενικά δεν συμβαίνει, [10], στις αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών.

Το επόμενο θεώρημα που ανήκει στον Le Merdy χαρακτηρίζει τις αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών.

Θεώρημα 2.7.5 *[41] Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι αφηρημένη δυική άλγεβρα τελεστών αν και μόνο αν είναι αφηρημένη άλγεβρα τελεστών που είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφη με τον δυικό ενός αφηρημένου χώρου τελεστών.*

2.8 Το Θεώρημα Krein Smulian

Θα χρησιμοποιήσουμε συχνά το θεώρημα Krein Smulian και τις συνέπειές του στο κεφάλαιο 5. Απόδειξη του υπάρχει για παράδειγμα στο [40].

Θεώρημα 2.8.1 ***(Krein Smulian theorem).*** *(i) Έστω $\mathcal{E}$ δυικός χώρος Banach και $\mathcal{F}$ υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Ο $\mathcal{F}$ είναι w^*-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{E}$ αν και μόνο αν το σύνολο $Ball(\mathcal{F})$ είναι w^*-κλειστό στον $\mathcal{E}$.*

(ii) Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δυικοί χώροι Banach και $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ φραγμένος τελεστής. Ο T είναι w^*-συνεχής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένο δίκτυο $(x_\lambda) \subset \mathcal{E}$ που συγκλίνει σε $x \in \mathcal{E}$ στην w^* τοπολογία, το δίκτυο $(T(x_\lambda))$ συγκλίνει στο $T(x)$ στην w^* τοπολογία.

Από το προηγούμενο θεώρημα πορίζονται τα ακόλουθα:

Πόρισμα 2.8.2 *Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δυικοί χώροι Banach και $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ w^*-συνεχής ισομετρική εμφύτευση, τότε:*

(i) Ο χώρος $T(\mathcal{E})$ είναι w^*-κλειστός.

(ii) Η απεικόνιση $T^{-1} : T(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ είναι w^*-συνεχής.

2.9 Τανυστικά γινόμενα

Στο κεφάλαιο 5 πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τανυστικά γινόμενα διανυσματικών χώρων [3], για αυτό κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε τι εννοούμε με αυτόν τον όρο. Δεδομένων δύο διανυσματικών χώρων $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ υπάρχει διανυσματικός χώρος $\mathcal{Z}$ και διγραμμική απεικόνιση $\otimes : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ που ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική συνθήκη:

Για κάθε ζεύγος $(\mathcal{M}, \tau)$ αποτελούμενο από ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}$ και μία διγραμμική απεικόνιση $\tau : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{M}$ υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\widetilde{\tau} : \mathcal{Z} \to \mathcal{M}$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \stackrel{\otimes}{\longrightarrow} & \mathcal{Z} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \widetilde{\tau} \\ \mathcal{M} & \stackrel{id_{\mathcal{M}}}{\longrightarrow} & \mathcal{M}. \end{array}$$

Ο χώρος $\mathcal{Z}$ είναι μοναδικός, δηλαδή κάθε άλλος που ικανοποιεί την προηγούμενη καθολική συνθήκη είναι γραμμικά ισόμορφος με αυτόν. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ τον $\mathcal{Z}$. Κάθε στοιχείο της μορφής $\otimes(X, Y)$ θα το αποκαλούμε τανυστικό γινόμενο των X, Y και θα το συμβολίζουμε με $X \otimes Y$. Ο χώρος $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ισούται με την γραμμική θήκη της εικόνας της απεικόνισης $\otimes$.

2.10 Θεωρία κατηγοριών

Στο κεφάλαιο 5 χρησιμοποιούμε βασικές έννοιες της θεωρίας κατηγοριών, [38], τις οποίες εκθέτουμε για την πληρότητα της εργασίας μας.

Ορισμός 2.10.1 *Μία κατηγορία $\mathfrak{M}$ αποτελείται από μία κλάση αντικειμένων ώστε για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (H, K) με $H, K \in \mathfrak{M}$ υπάρχει ένα σύνολο*

$Hom_{\mathfrak{M}}(H,K)$ του οποίου τα στοιχεία καλούνται μορφισμοί από το H στο K και για κάθε διατεταγμένη τριάδα $(H,K,G) \in \mathfrak{M}$ με $H,K,G \in \mathfrak{M}$ υπάρχει μία απεικόνιση την οποία αποκαλούμε σύνθεση

$$Hom_{\mathfrak{M}}(H,K) \times Hom_{\mathfrak{M}}(K,G) \to Hom_{\mathfrak{M}}(H,G) : (f,g) \to fg$$

ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες ιδιότητες:

(i) Η σύνθεση των μορφισμών είναι προσεταιριστική. Δηλαδή αν $H,K,G,D \in \mathfrak{M}$ και $f \in Hom_{\mathfrak{M}}(H,K)$, $g \in Hom_{\mathfrak{M}}(K,G)$, $h \in Hom_{\mathfrak{M}}(G,D)$ τότε

$$(hg)f = h(gf) \in Hom_{\mathfrak{M}}(H,K).$$

(ii) Για κάθε $H \in \mathfrak{M}$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $1_H \in Hom_{\mathfrak{M}}(H,H)$ ώστε $f1_H = f$ για κάθε $f \in Hom_{\mathfrak{M}}(H,K)$ και $K \in \mathfrak{M}$ και $1_H g = g$ για κάθε $g \in Hom_{\mathfrak{M}}(K,H)$ και $K \in \mathfrak{M}$.

Ορισμός 2.10.2 *Ένας μορφισμός* $f \in Hom_{\mathfrak{M}}(H,K)$ *λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει* $g \in Hom_{\mathfrak{M}}(K,H)$ *ώστε* $fg = 1_K$ *και* $gf = 1_H$.

Ορισμός 2.10.3 *Έστω* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *κατηγορίες. Ένας συναρτητής* $\mathcal{F} : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ *είναι ένας κανόνας που:*

(i) Αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο $H \in \mathfrak{M}_1$ ένα αντικείμενο $\mathcal{F}(H) \in \mathfrak{M}_2$.

(ii) Για κάθε $H_1, H_2 \in \mathfrak{M}_1$ ορίζει μία απεικόνιση

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(H_1,H_2) \to Hom_{\mathfrak{M}_2}(\mathcal{F}(H_1),\mathcal{F}(H_2)) : f \to \mathcal{F}(f)$$

ώστε $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$ όταν ορίζεται η σύνθεση gf και $\mathcal{F}(1_H) = 1_{\mathcal{F}(H)}$ για κάθε $H \in \mathfrak{M}_1$.

Ορισμός 2.10.4 *Έστω* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *κατηγορίες και* $\mathcal{F},\mathcal{G} : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ *συναρτητές. Αυτοί λέγονται ισοδύναμοι αν για κάθε* $H \in \mathfrak{M}_1$ *υπάρχει ισομορφισμός* $\xi_H \in Hom_{\mathfrak{M}_2}(\mathcal{F}(H),\mathcal{G}(H))$ *ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(H) & \xrightarrow{\xi_H} & \mathcal{G}(H) \\ \mathcal{F}(f)\downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(K) & \xrightarrow{\xi_K} & \mathcal{G}(K) \end{array}$$

να είναι μεταθετικό για κάθε $H,K \in \mathfrak{M}_1$ *και για κάθε* $f \in Hom_{\mathfrak{M}_1}(H,K)$. *Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε* $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Ορισμός 2.10.5 *Έστω* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *κατηγορίες. Αυτές ονομάζονται ισοδύναμες αν υπάρχουν συναρτητές* $\mathcal{F} : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ *και* $\mathcal{G} : \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_1$ *ώστε* $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong I_{\mathfrak{M}_2}, \mathcal{G}\mathcal{F} \cong I_{\mathfrak{M}_1}$ *όπου* $I_{\mathfrak{M}_1}, I_{\mathfrak{M}_2}$ *είναι ταυτοτικοί συναρτητές των κατηγοριών* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *αντίστοιχα.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα που χαρακτηρίζει τους συναρτητές που επιφέρουν ισοδυναμία μεταξύ δύο κατηγοριών. Για την απόδειξη του δες το Θεώρημα 1, του κεφαλαίου IV-4 στο [38].

Θεώρημα 2.10.1 *Έστω* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *κατηγορίες και* $\mathcal{F} : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ *συναρτητής. Αυτός επιφέρει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών* $\mathfrak{M}_1$,$\mathfrak{M}_2$ *αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Για κάθε $H, K \in \mathfrak{M}_1$ *η απεικόνιση*

$$\mathcal{F} : Hom_{\mathfrak{M}_1}(H, K) \to Hom_{\mathfrak{M}_2}(\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(K))$$

είναι $1-1$ *και επί.*

(ii) Για κάθε $G \in \mathfrak{M}_2$ *υπάρχει αντικείμενο* $H \in \mathfrak{M}_1$ *και ισομορφισμός που ανήκει στο σύνολο* $Hom_{\mathfrak{M}_2}(\mathcal{F}(H), G)$.

Κεφάλαιο 3

Διάσπαση Ανακλαστικών προτύπων πάνω σε Μεγιστικές Αβελιανές Αυτοσυζυγείς Άλγεβρες

Έστω $\mathcal{U}$ υπόχωρος του $B(H_1, H_2), H_1, H_2$ χώροι Χίλμπερτ, που είναι ανακλαστικό πρότυπο πάνω σε μεγιστικές αβελιανές αυτοσυζυγείς άλγεβρες (masa πρότυπο), $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$ και $\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}$ οι ημισύνδεσμοι του $\mathcal{U}$. Όπως σημειώσαμε στην παράγραφο 2.4.1 έχουμε την ισότητα:

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : TP = \phi(P)TP \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Η τριάδα $(\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}, \phi)$ γενικεύει την έννοια του συνδέσμου των αναλλοίωτων υπόχωρων των CSL αλγεβρών αφού στην ειδική περίπτωση που το $\mathcal{U}$ είναι CSL άλγεβρα ισχύει $\mathcal{S}_{1,\phi} = \mathcal{S}_{2,\phi} = \mathrm{Lat}(\mathcal{U})$ και $\phi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{U})} = id_{\mathrm{Lat}(\mathcal{U})}$.

Ξεκινώντας από αυτή την ιδέα, σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύουμε την έννοια της διαγωνίου των CSL αλγεβρών. Το αντίστοιχο αντικείμενο που αποκαλούμε διαγώνιο του $\mathcal{U}$ είναι ο ακόλουθος τριαδικός δακτύλιος τελεστών:

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T \in B(H_1, H_2) : TP = \phi(P)T \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Αν $\mathcal{A}$ είναι CSL άλγεβρα αποδεικνύουμε για το ριζικό της $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ (Πόρισμα 3.4.3) την ακόλουθη ισότητα

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*} = [LTL^\perp : T \in \mathcal{A}, L \in \mathrm{Lat}(\mathcal{A})]^{-w^*}.$$

Ας σημειωθεί εδώ η ανοικτή μέχρι σήμερα εικασία του Hopenwasser ότι το ριζικό $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ ισούται με τον χώρο $[LTL^{\perp} : T \in \mathcal{A}, L \in \mathrm{Lat}(\mathcal{A})]^{-\|\cdot\|}$, (βλέπε σχετικά την εισαγωγή). Το ανάλογο του χώρου $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*}$ για το $\mathcal{U}$ είναι ο χώρος:

$$\mathcal{U}_0 = [\phi(L)TL^{\perp} : T \in \mathcal{U}, L \in \mathcal{S}_{1,\phi}]^{-w^*}.$$

Η μελέτη των χώρων $\Delta(\mathcal{U}), \mathcal{U}_0$ είναι το κύριο αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού.

Στην παράγραφο 3.2 αποδεικνύουμε (Θεώρημα 3.2.3) ότι ο χώρος $\mathcal{U}$ διασπάται ως εξής:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U}).$$

Το προηγούμενο άθροισμα μπορεί να μετατραπεί σε ευθύ (Θεώρημα 3.2.5):

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{M}$$

όπου $\mathcal{M}$ είναι ένα TRO ιδεώδες της διαγωνίου $\Delta(\mathcal{U})$ που περιέχει τους πρώτης τάξης τελεστές της (Πρόταση 3.5.3). Σημειώνουμε ότι ανάλογη διάσπαση για την περίπτωση των nest υπαλγεβρών αλγεβρών von Neumann επιτυγχάνεται στο [35].

Αν $\mathcal{A}$ είναι CSL άλγεβρα τότε η διαγώνιος της $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ ισούται με $\mathrm{Lat}(\mathcal{A})'$. Γενικεύουμε αυτό το γεγονός στην παράγραφο 3.3 αποδεικνύοντας (Θεώρημα 3.3.1) ότι υπάρχει μερική ισομετρία $V \in \Delta(\mathcal{U})$ ώστε:

$$\Delta(\mathcal{U}) = [\mathcal{S}_{2,\phi}' V \mathcal{S}_{1,\phi}']^{-w^*}.$$

Αν $\mathcal{M}$ είναι ένα w^*-κλειστό TRO masa πρότυπο τότε αποδεικνύουμε (Θεώρημα 3.3.2) ότι υπάρχει μερική ισομετρία $U \in \mathcal{M}$ ώστε:

$$\mathcal{M} = [\mathcal{B}_2 U \mathcal{B}_1]^{-w^*}$$

όπου $\mathcal{B}_1 = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{B}_2 = [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$.

Με το Θεώρημα 3.3.3 προσδιορίζουμε τους ημισυνδέσμους της διαγωνίου $\Delta(\mathcal{U})$ και με την Πρόταση 3.3.5 αποδεικνύουμε το ενδιαφέρον γεγονός ότι αν E είναι η προβολή επί του χώρου $[\Delta(\mathcal{U})(H_1)]^-$ και F η προβολή επί του χώρου $[\Delta(\mathcal{U})^*(H_2)]^-$ (δηλαδή οι προβολές στα «ουσιώδη κομμάτια» των χώρων H_1, H_2) τότε οι οικογένειες $F \cdot \mathcal{S}_{1,\phi}, E \cdot \mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι CSL's και η απεικόνιση

$$F \cdot \mathcal{S}_{1,\phi} \to E \cdot \mathcal{S}_{2,\phi} : \quad FP \to E\phi(P)$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων.

Στην παράγραφο 3.4 αποδεικνύουμε ότι ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός. Αυτό το αποτέλεσμα είναι νέο ακόμα και για την θεωρία των CSL αλγεβρών. Σημειώνουμε εδώ ότι αν και τα w^*-κλειστά πρότυπα πάνω σε nest άλγεβρες είναι αυτομάτως ανακλαστικά [25], αυτό δεν είναι αληθές για τα w^*-κλειστά πρότυπα πάνω σε CSL άλγεβρες [24].

Στην παράγραφο 3.5 γενικεύουμε την έννοια των ατόμων των CSL συνδέσμων στην περίπτωση των ημισυνδέσμων των ανακλαστικών masa προτύπων: Έστω $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Υποθέτουμε ότι $\vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\} < \phi(P)$. Αφού ο ημισύνδεσμος $\mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι πλήρης ως προς τα suprema, υπάρχει μοναδική προβολή $P_0 \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έτσι ώστε

$$\phi(P_0) = \vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\}.$$

Καλούμε την προβολή $P - P_0$ άτομο του $\mathcal{U}$ και συμβολίζουμε την προβολή $\phi(P) - \phi(P_0)$ με $\delta(P - P_0)$. Υποθέτουμε ότι $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$. Αποδεικνύουμε στο Θεώρημα 3.5.8 ότι

$$[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \chi(I)\delta(F_n)B(H_1, H_2)F_n$$

όπου $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \{F : \quad F \text{ άτομο του } \mathcal{U}\}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.13 κάθε συμπαγής τελεστής $K \in \mathcal{U}$ διασπάται ως άθροισμα $K_1 + K_2$ όπου $K_1 \in \mathcal{U}_0$ και $K_2 = D(K)$ όπου D η φυσική προβολή στον χώρο $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. Ας σημειωθεί ότι στην ειδική περίπτωση που ο K είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης έχουμε $\mathrm{rank}(K_2) \leq \mathrm{rank}(K)$.

Στην παράγραφο 3.6 διαπραγματευόμαστε την κατάσταση όπου το $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την ακόλουθη διάσπαση (Θεώρημα 3.6.4):

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}.$$

Όταν $\mathcal{A}$ είναι μία ισχυρά ανακλαστική CSL άλγεβρα που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H η τελευταία διάσπαση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathcal{A} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n B(H) A_n$$

όπου $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{A : \quad A \text{ άτομο του } \mathrm{Lat}(\mathcal{A})\}$.

Το κύριο «εργαλείο» που χρησιμοποιούμε για να επιτύχουμε αυτά τα αποτελέσματα είναι μία κατάλληλη ακολουθία προβολών (U_n) του χώρου $B(H, K)$ που εξαρτάται από το $\mathcal{U}$. Αυτή η ακολουθία συμπεριφέρεται ανάλογα προς το δίκτυο των «διαγώνιων αθροισμάτων» στην περίπτωση των nest αλγεβρών (δες για παράδειγμα στο [15]). Στην θεωρία των nest αλγεβρών, το δίκτυο των διαγώνιων αθροισμάτων ενός συμπαγή τελεστή συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας σε ένα συμπαγή τελεστή που ανήκει στο «ατομικό μέρος» της διαγωνίου. Αυτό έχει γενικευθεί στην περίπτωση των CSL αλγεβρών από τον Κατσούλη [33]. Εδώ δείχνουμε (Πρόταση 3.5.10) ότι για κάθε συμπαγή τελεστή K, η ακολουθία $(U_n(K))$ συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας στον $D(K)$.

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Χίλμπερτ, υπενθυμίζουμε ότι με $C_1(H_1, H_2)$ συμβολίζουμε τους trace class τελεστές. Αν $\mathcal{R}$ είναι ένα υποσύνολο του χώρου $C_1(H_1, H_2)$, συμβολίζουμε με $\mathcal{R}^0$ τον ακόλουθο χώρο:

$$\mathcal{R}^0 = \{T \in B(H_2, H_1) : tr(TS) = 0 \text{ για κάθε } S \in \mathcal{R}\}.$$

Υποθέτουμε σε αυτό το κεφάλαιο ότι όλοι οι χώροι Χίλμπερτ είναι διαχωρίσιμοι. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου δημοσιεύθηκαν στο [22].

3.1 Διάσπαση ανακλαστικού TRO

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι κάθε ανακλαστικό TRO διασπάται σε «ατομικό» και «μη ατομικό» μέρος.

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ $\mathcal{M} \subset B(H_1, H_2)$ ένα w^* κλειστό TRO και $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{M}^*\mathcal{M})'', \mathcal{B}_2 = (\mathcal{M}\mathcal{M}^*)''$.

Παρατήρηση 3.1.1 *Υποθέτουμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}_0$ είναι ένα w^* κλειστό TRO ιδεώδες του $\mathcal{M}$ δηλαδή, ο $\mathcal{M}_0$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{M}$ ώστε*

$$\mathcal{M}_0\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0, \ \mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει και η σχέση $\mathcal{M}\mathcal{M}_0^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0$ [20]. Τώρα, παρατηρούμε ότι υπάρχουν προβολές Q_i στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ ώστε $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}Q_1 = Q_2\mathcal{M}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}_0$ είναι ένα $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$-πρότυπο.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{J}_1 = [\mathcal{M}_0^*\mathcal{M}_0]^{-w^*}$ και $\mathcal{J}_2 = [\mathcal{M}_0\mathcal{M}_0^*]^{-w^*}$. Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι ο χώρος $\mathcal{J}_i$ είναι ιδεώδες της άλγεβρας $\mathcal{B}_i, i = 1, 2$. Επομένως υπάρχει προβολή Q_i στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{B}_i$ ώστε $\mathcal{J}_i = \mathcal{B}_i Q_i, i = 1, 2$.

Εύκολα ελέγχεται ότι

$$\mathcal{M}\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{M}, \ \ \mathcal{B}_2\mathcal{M} \subset \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M}\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{M}_0, \ \ \mathcal{J}_2\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}Q_1 \subset \mathcal{M}\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{M}_0$. Για κάθε $T \in \mathcal{M}_0$, $T^*T \in \mathcal{J}_1$, επομένως $T^*T = T^*TQ_1$ και έτσι $T = TQ_1$. Συμπεραίνουμε ότι $T \in \mathcal{M}Q_1$. Έχουμε λοιπόν $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}Q_1$ και άρα η ισότητα ισχύει. Παρόμοια δείχνεται ότι $\mathcal{M}_0 = Q_2\mathcal{M}$. $\square$

Επειδή ο χώρος $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$ είναι ένα ισχυρά ανακλαστικός και TRO, από την Πρόταση 3.5 στο [32] υπάρχουν κάθετες ανά δύο ορθογώνιες προβολές (F_n) στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{B}_1$ και (E_n) στο κέντρο της $\mathcal{B}_2$ ώστε $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_n B(H_1, H_2) F_n$. Ορίζουμε $E = \vee_n E_n, F = \vee_n F_n$.

Θεώρημα 3.1.2 *Ο χώρος $\mathcal{M}$ διασπάται στο ακόλουθο ευθύ άθροισμα*

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0) \oplus [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}.$$

Οι χώροι $\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0$ και $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$ είναι TRO ιδεώδη του $\mathcal{M}$. Επί πλέον

$$[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \mathcal{M}F = E\mathcal{M} = E\mathcal{M}F$$

$$\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0 = \mathcal{M}F^{\perp} = E^{\perp}\mathcal{M} = E^{\perp}\mathcal{M}F^{\perp}.$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι ο χώρος $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$ είναι ένα TRO ιδεώδες του $\mathcal{M}$. Από την παρατήρηση 3.1.1 υπάρχει προβολή Q στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{B}_1$ ώστε $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \mathcal{M}Q$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, έχουμε $E_m B(H_1, H_2) F_m \subset \mathcal{M}Q$. Έπεται ότι

$$E_m B(H_1, H_2) F_m = E_m B(H_1, H_2) F_m Q,$$

και συνεπώς $F_m = F_m Q$. Συμπεραίνουμε ότι $\vee_m F_m = F \leq Q$. Επειδή $F \in \mathcal{B}_1$ έχουμε $\mathcal{M}F \subset \mathcal{M}$ και συνεπώς $\mathcal{M}F = \mathcal{M}FQ \subset \mathcal{M}Q$. Τώρα έχουμε

$$[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \mathcal{M}Q \supset \mathcal{M}F \supset [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}F = [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}.$$

Δείξαμε ότι $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \mathcal{M}F$.

Αν $M \in \mathcal{M}$ και $R \in R_1(\mathcal{M})$, τότε $R = RF$ και συνεπώς $tr(MF^\perp R^*) = tr(M(RF^\perp)^*) = tr(M0) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{M}F^\perp \subset \mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0.$$

Τώρα έχουμε $\mathcal{M} = \mathcal{M}F^\perp + \mathcal{M}F \subset \mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0 + [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} \subset \mathcal{M}$. Συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0) + [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}.$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτό το άθροισμα είναι ευθύ. Αν $T \in [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0$ τότε $T = \sum_{n=1}^\infty E_n T F_n$. Αν R είναι τάξης 1 τελεστής τότε $tr(TR) = \sum_{n=1}^\infty tr(E_n T F_n R) = \sum_{n=1}^\infty tr(TF_n R E_n)$.

Αλλά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $tr(TF_n RE_n) = tr(T(E_n R^* F_n)^*) = 0$ επειδή $E_n R^* F_n \in R_1(\mathcal{M})$ και $T \in (R_1(\mathcal{M})^*)^0$. Συνεπώς $tr(TR) = 0$ για κάθε τάξης 1 τελεστή R, και άρα $T = 0$. Αυτό δείχνει ότι $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} \cap (R_1(\mathcal{M})^\perp)^* = 0$.

Έχουμε δείξει ότι $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0) \oplus [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$.

Επειδή $\mathcal{M} = \mathcal{M}F^\perp \oplus \mathcal{M}F$, $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*} = \mathcal{M}F$ και $\mathcal{M}F^\perp \subset \mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{M}F^\perp = \mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0$.

Οι ισότητες $E^\perp \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0, E\mathcal{M} = [R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$ αποδεικνύονται παρόμοια. $\square$

Πρόταση 3.1.3 *Υποθέτουμε ότι $\theta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ είναι η προβολή επί του χώρου $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$ που ορίζεται από την διάσπαση στο Θεώρημα 3.1.2. Τότε $\theta(T) = \sum_{n=1}^\infty E_n T F_n$ για κάθε $T \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη Επειδή ο χώρος $\mathcal{M}$ διασπάται ως ευθύ άθροισμα των $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$-προτύπων $\mathcal{M} \cap (R_1(\mathcal{M})^*)^0$ και $[R_1(\mathcal{M})]^{-w^*}$, η απεικόνιση θ είναι απεικόνιση $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$-προτύπων:

$$\theta(B_2 T B_1) = B_2 \theta(T) B_1$$

για κάθε $T \in \mathcal{M}, B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2$. Επειδή $(F_n) \subset \mathcal{B}_1, (E_n) \subset \mathcal{B}_2$ έχουμε ότι:

$$\theta(T) = \sum_{n=1}^\infty E_n \theta(T) F_n = \sum_{n=1}^\infty \theta(E_n T F_n) = \sum_{n=1}^\infty E_n T F_n.$$

$\square$

3.2 Διάσπαση ανακλαστικού masa προτύπου

Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(B(H_i)), i = 1,2$, $\mathcal{D}_i \subset B(H_i), i = 1,2$ masas, $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2)$ ανακλαστικό $\mathcal{D}_2$,$\mathcal{D}_1$-πρότυπο. Συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} &\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}), \qquad \phi^* = \mathrm{Map}(\mathcal{U}^*), \\ &\mathcal{S}_{2,\phi} = \phi(\mathcal{P}_1), \quad \mathcal{S}_{1,\phi} = \{P^\perp : P \in \phi^*(\mathcal{P}_2)\} \\ &\mathcal{A}_2 = (\mathcal{S}_{2,\phi})', \qquad \mathcal{A}_1 = (\mathcal{S}_{1,\phi})'. \end{aligned}$$

Παρατήρησε ότι $\mathcal{S}_{i,\phi} \subset \mathcal{D}_i$ και άρα $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{A}_i, i = 1,2$. Ορίζουμε τους χώρους

$$\mathcal{U}_0 = [\phi(P)TP^\perp : T \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{S}_{1,\phi}]^{-w^*},$$

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T : TP = \phi(P)T \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Σημειώνουμε ότι οι χώροι $\mathcal{U}_0$ και $\Delta(\mathcal{U})$ είναι $\mathcal{D}_2$,$\mathcal{D}_1$-πρότυπα που περιέχονται στον χώρο $\mathcal{U}$ και ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ανακλαστικό TRO. Καλούμε τον $\Delta(\mathcal{U})$ **διαγώνιο** του $\mathcal{U}$.

Αυτό το αντικείμενο, στην περίπτωση που το masa πρότυπο είναι CSL άλγεβρα συμπίπτει με την συνήθη διαγώνιο της άλγεβρας.

Παράδειγμα 3.2.1 Σταθεροποιούμε Borel μετρήσιμους χώρους $(X,\mu), (Y,\nu)$. Είναι γνωστό [4] ότι ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ του $B(L^2(X,\mu), L^2(Y,\nu))$ είναι πρότυπο πάνω σε nest άλγεβρες που περιέχουν τις masas $L^\infty(X,\mu), L^\infty(Y,\nu)$ αντίστοιχα αν και μόνο αν υπάρχουν Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1 : X \to [0,1], g_1 : Y \to [0,1]$ ώστε το $\mathcal{U}$ να έχει φορέα με την έννοια των Erdos, Κατάβολου, Shulman [24], ένα σύνολο της μορφής

$$[f_1 \geq g_1] = \{(x,y) \in X \times Y : f_1(x) \geq g_1(y)\}.$$

Όμως δεν είναι αλήθεια ότι τότε η διαγώνιος του φέρεται από το σύνολο

$$[f_1 = g_1] = \{(x,y) \in X \times Y : f_1(x) = g_1(y)\}.$$

Για παράδειγμα πάρε τις συναρτήσεις

$$f_1 : X \to [0,1], f_1(x) = 1 \ \forall x \in X \text{ και } g_1 : Y \to [0,1], g_1(y) = 0 \ \forall y \in Y.$$

Τότε τό πρότυπο $\mathcal{U}$ που φέρεται από το σύνολο $[f_1 \geq g_1] = X \times Y$ είναι το $B(L^2(X,\mu), L^2(Y,\nu))$. Αλλά $[f_1 = g_1] = \emptyset$ και $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Παρόλα αυτά για κάθε πρότυπο $\mathcal{U}$ πάνω σε nest άλγεβρες μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [0,1], g : Y \to [0,1]$ ώστε το $\mathcal{U}$ να έχει φορέα το σύνολο $[f \geq g]$ το $\mathcal{U}_0$ το σύνολο $[f > g]$ και το $\Delta(\mathcal{U})$ το σύνολο $[f = g]$. Στο Θεώρημα 3.2.4 και στο Πόρισμα 3.2.5 του [4] αποδεικνύεται ότι αν $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$ υπάρχουν Borel σύνολα $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X και $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ του Y ώστε $\phi(E(\alpha_n)) = F(\beta_n) \forall n \in \mathbb{N}$ ($E(\alpha_n)$ η προβολή στον χώρο $L^2(\alpha_n, \mu)$ και $F(\beta_n)$ η προβολή στον χώρο $L^2(\beta_n, \nu)$) ώστε οι προβολές $\{E(\alpha_n)\}$ ($\{F(\beta_n)\}$) να είναι w^* πυκνές στον $\mathcal{S}_{1,\phi}(\mathcal{S}_{2,\phi})$ και Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [0,1], g : Y \to [0,1]$ ώστε $[f \geq g] = (\cup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \times \beta_n^c)^c$. Έπεται τώρα ότι το $\mathcal{U}$ φέρεται από το σύνολο $[f \geq g]$. Επίσης από τα επιχειρήματα που αναπτύσσονται στα 3.2.4, 3.2.5 του [4] συνάγεται ότι $[f > g] = \cup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^c \times \beta_n$ και συνεπώς το πρότυπο που φέρεται από το σύνολο $[f > g]$ ισούται με τον χώρο

$$[\phi(E(\alpha_n))B(L^2(X,\mu), L^2(Y,\nu))E(\alpha_n)^\perp : n \in \mathbb{N}]^{-w^*}$$

(για την απόδειξη αυτού παρατήρησε ότι ο τελευταίος χώρος είναι πρότυπο πάνω στις ίδιες nest άλγεβρες και άρα είναι αυτομάτως ανακλαστικός). Είναι φανερό ότι

$$[\phi(E(\alpha_n))B(L^2(X,\mu), L^2(Y,\nu))E(\alpha_n)^\perp : n \in \mathbb{N}]^{-w^*} = \mathcal{U}_0.$$

Παρατήρησε τώρα ότι $[f = g] = [f \geq g] \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^c \times \beta_n)^c$ και συνεπώς ο χώρος που φέρεται από το σύνολο $[f = g]$ ισούται με

$$\mathcal{U} \cap \{T : F(\beta_n)TE(\alpha_n)^\perp = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\} = \Delta(\mathcal{U}).$$

Παράδειγμα 3.2.2 Στον χώρο Χίλμπερτ των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{U}$ που αποτελείται από τους τελεστές που όταν γράφονται σαν $\infty \times \infty$ πίνακες μηδενίζονται εκτός των n πρώτων διαγωνίων. Αυτός ο χώρος είναι ανακλαστικό πρότυπο πάνω στην masa των διαγώνιων πινάκων. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι η διαγώνιος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι η ίδια η masa ενώ ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ο υπόχωρος του $\mathcal{U}$ που αποτελείται από τους πίνακες που μηδενίζονται στην πρώτη διαγώνιο.

Θεώρημα 3.2.3 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$.

Απόδειξη Γνωρίζουμε (παράγραφος 2.4.1), ότι

$$\mathcal{U} = \{T \in\ B(H_1, H_2) : \phi(P)^\perp TP = 0 \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Επειδή οι χώροι H_1, H_2 είναι διαχωρίσιμοι μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία $(P_n) \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$ έτσι ώστε

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P_n)^{\perp} T P_n = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ορίζουμε

$$V_n : B(H_1, H_2) \to B(H_1, H_2) : V_n(T) = \phi(P_n) T P_n + \phi(P_n)^{\perp} T P_n^{\perp}, n \in \mathbb{N}.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι ο τελεστής V_n είναι ταυτοδύναμος και norm συστολή.

Ορίζουμε επίσης $U_n = V_n \circ V_{n-1} \circ ... \circ V_1, n \in \mathbb{N}$. Αν $T \in \mathcal{U}$, τότε

$$T = U_1(T) + \phi(P_1) T P_1^{\perp}$$

$$U_1(T) = U_2(T) + \phi(P_2) U_1(T) P_2^{\perp}$$

και επαγωγικά

$$U_{n-1}(T) = U_n(T) + \phi(P_n) U_{n-1}(T) P_n^{\perp}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προσθέτοντας τις προηγούμενες ισότητες έχουμε

$$T = U_n(T) + M_n$$

όπου

$$M_n = \phi(P_1) T P_1^{\perp} + \phi(P_2) U_1(T) P_2^{\perp} + ... + \phi(P_n) U_{n-1}(T) P_n^{\perp} \in \mathcal{U}_0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $(U_n(T))$ είναι φραγμένη αφού $\|U_n(T)\| \leq \|U_{n-1}(T)\| \leq ... \leq \|T\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει υπακολουθία $(U_{n_m}(T))$ που συγκλίνει στην w^* τοπολογία σε τελεστή L. Τότε $M_{n_m} = T - U_{n_m}(T) \xrightarrow{w^*} T - L = M \in \mathcal{U}_0$.

Παρατηρούμε ότι $\phi(P_i)^{\perp} U_n(T) P_i = \phi(P_i) U_n(T) P_i^{\perp} = 0$ για $i = 1, 2, ...n$. Συνεπάγεται ότι $\phi(P_i)^{\perp} L P_i = \phi(P_i) L P_i^{\perp} = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το συμπέρασμα είναι ότι $L \in \Delta(\mathcal{U})$ και $T = M + L \in \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.4 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathcal{U}$ *είναι TRO.*

(ii) $\mathcal{U} = \Delta(\mathcal{U})$

(iii) $\mathcal{U}_0 = 0$.

Θεώρημα 3.2.5 *Υπάρχουν προβολές* $Q_i \in \mathcal{D}_i, i = 1, 2$ *έτσι ώστε:*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus (I - Q_2)\Delta(\mathcal{U})(I - Q_1) = \mathcal{U}_0 \oplus (I - Q_2)\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_0 \oplus \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1).$$

Απόδειξη Κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

(i) $\mathcal{U}\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}, \ \ \Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$.
Απόδειξη: Έστω $T \in \mathcal{U}, M, N \in \Delta(\mathcal{U})$. Για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε

$$\phi(P)^\perp TM^*NP = \phi(P)^\perp TM^*\phi(P)N = \phi(P)^\perp TPM^*N = 0M^*N = 0.$$

Συνεπώς $TM^*N \in \mathcal{U}$. Παρόμοια έχουμε $MN^*T \in \mathcal{U}$.

(ii) $\mathcal{U}_0\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0, \ \ \Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0$.
Απόδειξη: Έστω $T \in \mathcal{U}, M, N \in \Delta(\mathcal{U})$. Για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε

$$\phi(P)TP^\perp M^*N = \phi(P)TM^*\phi(P)^\perp N = \phi(P)TM^*NP^\perp.$$

Επομένως από την σχέση (i) προκύπτει ότι $TM^*N \in \mathcal{U}$ και έτσι ο τελεστής $\phi(P)TP^\perp M^*N$ ανήκει στον χώρο $\mathcal{U}_0$. Παίρνοντας w^* κλειστή γραμμική θήκη έχουμε $SM^*N \in \mathcal{U}_0$ για κάθε $S \in \mathcal{U}_0, M, N \in \Delta(\mathcal{U})$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0$.

(iii) Ο χώρος $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$ είναι ένα TRO ιδεώδες του $\Delta(\mathcal{U})$.
Απόδειξη: Αφού ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι TRO τότε $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \Delta(\mathcal{U})$. Από την παρατήρηση (ii) έχουμε ότι $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0$. Συνεπάγεται ότι $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$.
Ανάλογα έχουμε ότι $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$. Συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$ είναι TRO ιδεώδες του $\Delta(\mathcal{U})$. Συνεπώς υπάρχουν προβολές $Q_i \in \mathcal{D}_i, i = 1, 2$, έτσι ώστε $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})Q_1 = Q_2\Delta(\mathcal{U})$ (Παρατήρηση 3.1.1).

Από το Θεώρημα 3.2.3 προκύπτει ότι

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})Q_1 + \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1) = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1).$$

Παρατήρησε ότι $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1) = 0$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus (I - Q_2)\Delta(\mathcal{U})$ και συνεπώς $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus (I - Q_2)\Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$. □

Παρατήρηση 3.2.6 *Η προβολή* $\theta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *επί του χώρου* $(I - Q_2)\Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$ *που ορίζεται από την διάσπαση του Θεωρήματος 3.2.5 είναι συστολή.*

Πράγματι, αν $T \in \mathcal{U}$ *όπως στο Θεώρημα 3.2.3 έχουμε* $T = M + S$ *όπου* $M \in \Delta(\mathcal{U}), S \in \mathcal{U}_0$ *και* $\|M\| \leq \|T\|$ *(δες την απόδειξη). Επειδή* $\theta(T) = (I - Q_2)M(I - Q_1)$, *έχουμε* $\|\theta(T)\| \leq \|T\|$.

Έστω $\mathcal{N}_i = \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{i,\phi}) = \{T : P^\perp TP = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{i,\phi}\}, i = 1,2$, και $\mathcal{L}_i = [PTP^\perp : T \in \mathcal{N}_i, P \in \mathcal{S}_{i,\phi}]^{-w^*},\ i = 1,2$.

Λήμμα 3.2.7 *(i)* $\mathcal{A}_2\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_1 \subset \Delta(\mathcal{U})$.

(ii) $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{A}_2\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}_1, \Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_1\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{A}_2$.

(iii) $\mathcal{U} = \mathcal{N}_2\mathcal{U}\mathcal{N}_1$.

(iv) $\mathcal{U}_0 = \mathcal{N}_2\mathcal{U}_0\mathcal{N}_1$.

(v) $\mathcal{U}\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{U}_0,\ \mathcal{L}_2\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$.

(vi) $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \mathcal{N}_1,\ \mathcal{U}\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{N}_2$.

(vii) $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{L}_1,\ \mathcal{U}_0\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{L}_2$.

Απόδειξη Οι ισχυρισμοί $(i), (ii)$ είναι προφανείς και το (iii) είναι το Λήμμα 1.1 στο [32].

(iv) Αν $N_1 \in \mathcal{N}_1, N_2 \in \mathcal{N}_2, T \in \mathcal{U}$ και $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ τότε

$$N_2\phi(P)TP^\perp N_1 = \phi(P)N_2\phi(P)TP^\perp N_1P^\perp \in \mathcal{U}_0$$

επειδή $N_2\phi(P)TP^\perp N_1 \in \mathcal{U}$ από το (iii).
Παίρνοντας w^* κλειστή γραμμική θήκη έχουμε $\mathcal{N}_2\mathcal{U}_0\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{U}_0$.

(v) Αν $N_1 \in \mathcal{N}_1, T \in \mathcal{U}$ και $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ τότε

$$TPN_1P^\perp = \phi(P)TPN_1P^\perp \in \mathcal{U}_0$$

επειδή $TPN_1 \in \mathcal{U}\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{U}$. Παίρνοντας w^* κλειστή γραμμική θήκη έχουμε $TK \in \mathcal{U}_0$ για κάθε $K \in \mathcal{L}_1$. Συμμετρικά αποδεικνύεται και η δεύτερη συμπερίληψη.

(vi) Αν $M \in \Delta(\mathcal{U}), T \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε $PM^*TP = M^*\phi(P)TP = M^*TP$ και συνεπώς $M^*T \in \mathcal{N}_1$. Παρόμοια δείχνεται ότι $TM^* \in \mathcal{N}_2$.

(vii) Αν $M \in \Delta(\mathcal{U}), T \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε $M^*\phi(P)TP^\perp = PM^*TP^\perp \in \mathcal{L}_1$ επειδή $M^*T \in \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \mathcal{N}_1$. Παίρνοντας την w^* κλειστή γραμμική θήκη έχουμε $M^*S \in \mathcal{L}_1$ για κάθε $S \in \mathcal{U}_0$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\mathcal{U}_0\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{L}_2$. □

Πρόταση 3.2.8 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(*i*) $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$.

(*ii*) $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1$.

(*iii*) $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

Απόδειξη Αν $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$ τότε $\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0$ και συνεπώς $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{L}_1$ από το προηγούμενο λήμμα. Επειδή $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}_1$ παίρνουμε

$$\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1.$$

Αν αντίστροφα $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1$, τότε $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})(I-Q_1) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1$, και συνεπώς από το προηγούμενο λήμμα $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})(I-Q_1) \subset \mathcal{U}\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{U}_0$ (Q_1 είναι η προβολή στο Θεώρημα 3.2.5).

Επειδή ο χώρος $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$ είναι TRO ιδεώδες του $\Delta(\mathcal{U})$ (Θεώρημα 3.2.5) έχουμε ότι

$$\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})Q_1 = \Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*(\Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_0) \subset \Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0$. Επειδή ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι TRO, ο υπόχωρος $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})$ είναι norm πυκνός σε αυτόν [20]. Συνεπάγεται ότι $\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0$ και άρα $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$.

Η ισοδυναμία (*i*) $\Leftrightarrow$ (*iii*) αποδεικνύεται παρόμοια. $\square$

Πρόταση 3.2.9 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(*i*) $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \Delta(\mathcal{U})$.

(*ii*) $\Delta(\mathcal{U})\,(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) = 0$.

(*iii*) $(\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{A}_2)\,\Delta(\mathcal{U}) = 0$.

Απόδειξη Παρατήρησε από το Λήμμα 3.2.7 ότι $\Delta(\mathcal{U})(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) \subset \Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_1 \subset \Delta(\mathcal{U})$ και $\Delta(\mathcal{U})(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) \subset \mathcal{U}\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{U}_0$. Επομένως αν το άθροισμα $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$ είναι ευθύ τότε $\Delta(\mathcal{U})\,(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) = 0$.

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι $\Delta(\mathcal{U})(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) = 0$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 3.2.7 έχουμε ότι $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}_1$ και $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{L}_1$ συνεπώς $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1$ από το οποίο προκύπτει $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) = 0$. Αλλά αφού ο χώρος $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})$ είναι ένα TRO (Θεώρημα 3.2.5), ο υπόχωρος του $(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))^*(\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}))$ είναι norm πυκνός σε αυτόν [20]. Επομένως έχουμε $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}) = 0$. Αυτό δείχνει ότι τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα.

Η απόδειξη της ισοδυναμίας (i) και (iii) είναι ανάλογη. $\square$

3.3 Η Διαγώνιος

Έστω $\mathcal{U}, \mathcal{U}_0, \Delta(\mathcal{U}), \phi$ όπως ορίσθηκαν στην παράγραφο 3.2 και $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$.

Θεώρημα 3.3.1 *Υπάρχει μερική ισομετρία $V \in \Delta(\mathcal{U})$ έτσι ώστε*

$$\Delta(\mathcal{U}) = [\mathcal{A}_2 V \mathcal{A}_1]^{-w^*}$$

(Θυμίζουμε ότι $\mathcal{A}_i = (\mathcal{S}_{i,\phi})'$).

Απόδειξη Αν $T \in \Delta(\mathcal{U})$ και $T = U|T|$ η πολική αναπαράσταση του τελεστού T, τότε $U \in \Delta(\mathcal{U})$ και $|T| \in \mathcal{A}_1$ (Πρόταση 2.6 στο [32]).

Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστική οικογένεια από μερικές ισομετρίες $(V_n) \subset \Delta(\mathcal{U})$ ώστε: $V_n^* V_n \perp V_m^* V_m, V_n V_n^* \perp V_m V_m^*$ για κάθε $n \neq m$. Η μερική ισομετρία $V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ ανήκει στον χώρο $\Delta(\mathcal{U})$.

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T \in B(H_1, H_2) : E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1'),\, F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_2'),\, FVE = 0 \;\Rightarrow\; FTE = 0\} \tag{3.3.1}$$

Έστω T τελεστής με την ιδιότητα αν $FVE = 0$ για $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1')$ και $F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_2')$, τότε $FTE = 0$. Αφού $\phi(P)^{\perp} V P = \phi(P) V P^{\perp} = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και $\mathcal{S}_{i,\phi} \subset \mathcal{A}_i', i = 1, 2$ έχουμε $\phi(P)^{\perp} T P = \phi(P) T P^{\perp} = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και άρα $T \in \Delta(\mathcal{U})$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση έστω $T \in \Delta(\mathcal{U})$ και $T = U|T|$ η πολική αναπαράσταση του T. Αν οι προβολές $E \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_1')$, $F \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_2')$ ικανοποιούν την σχέση $FVE = 0$, αφού $|T| \in \mathcal{A}_1$, έχουμε $FTE = FU|T|E = FUE|T|$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $FUE = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} V^*V(FUE)^*FUE &= (V^*V)EU^*FUE = E(V^*V)U^*FUE \quad (V^*V \in \mathcal{A}_1) \\ &= EV^*(VU^*)FUE = EV^*F(VU^*)UE \quad (VU^* \in \mathcal{A}_2) \\ &= 0VU^*UE = 0 \end{aligned}$$

και άρα

$$(FUE)^*FUE \leq I - V^*V. \tag{3.3.2}$$

Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$FUE(FUE)^* \leq I - VV^*. \tag{3.3.3}$$

Επειδή ο τελεστής FUE είναι μερική ισομετρία που ανήκει στον χώρο $\Delta(\mathcal{U})$, από την μεγιστικότητα που παράχθηκε ο V και από τις σχέσεις (3.3.2),(3.3.3) συνεπάγεται ότι $FUE = 0$. Επομένως η (3.3.1) ισχύει.

Έστω $\mathcal{M} = [\mathcal{A}_2 V \mathcal{A}_1]^{-w^*}$. Παρατηρούμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ένα TRO που περιέχεται στον $\Delta(\mathcal{U})$. Επειδή ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι w^* κλειστός είναι ανακλαστικός. Αν $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$, και P προβολή

$$\zeta(P) = [A_2VA_1Py : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, y \in H_1]^-.$$

Συνεπώς $\zeta(P) \in \mathcal{A}_2'$ για κάθε προβολή P και άρα $\mathcal{S}_{2,\zeta} \subset \mathcal{A}_2'$. Παρόμοια αν $\zeta^* = \mathrm{Map}(\mathcal{M}^*)$ τότε $\mathcal{S}_{2,\zeta^*} \subset \mathcal{A}_1'$. Αλλά $\mathcal{S}_{1,\zeta} = \{P^\perp : P \in \mathcal{S}_{2,\zeta^*}\}$ και επομένως έχουμε ότι $\mathcal{S}_{1,\zeta} \subset \mathcal{A}_1'$. Τώρα αφού $V \in \mathcal{M}$ συμπεραίνουμε ότι $\zeta(P)^\perp VP = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\zeta}$. Από την σχέση (3.3.1) έχουμε $\zeta(P)^\perp \Delta(\mathcal{U})P = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\zeta}$ και επομένως αφού ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ανακλαστικός $\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$. $\square$

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι αν ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι w^* κλειστός, TRO masa πρότυπο και $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$ τότε υπάρχει μία μερική ισομετρία $V \in \mathcal{M}$ έτσι ώστε $\mathcal{M} = [(\mathcal{S}_{2,\zeta})'V(\mathcal{S}_{1,\zeta})']^{-w^*}$. Θα αποδείξουμε όμως το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω $\mathcal{M}$ ένα w^* κλειστό TRO masa πρότυπο και οι άλγεβρες $\mathcal{B}_1 = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \mathcal{B}_2 = [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$. Υπάρχει μερική ισομετρία V ώστε $\mathcal{M} = [\mathcal{B}_2 V \mathcal{B}_1]^{-w^*}$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{D}_i \subset B(H_i), i = 1, 2$ masas έτσι ώστε $\mathcal{D}_2\mathcal{M}\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{M}$ και $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{B}_2'\mathcal{M}\mathcal{B}_1' \subset \mathcal{M}$.
Στο [32], Θεώρημα 2.10 δείχνεται ότι

$$\mathcal{B}_2' = (\mathcal{M}\mathcal{M}^*)' \subset \mathcal{D}_2|_{\zeta(I)} \oplus B(\zeta(I)^\perp(H_2))$$

και

$$\mathcal{B}_1' = (\mathcal{M}^*\mathcal{M})' \subset \mathcal{D}_1|_{\zeta^*(I)} \oplus B(\zeta^*(I)^\perp(H_1)).$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\mathcal{D}_2|_{\zeta(I)} \oplus B(\zeta(I)^{\perp}(H_2)))\ \mathcal{M}\ (\mathcal{D}_1|_{\zeta^*(I)} \oplus B(\zeta^*(I)^{\perp}(H_1))) \subset \mathcal{M}.$$

Αυτό όμως είναι αληθές επειδή

$$\mathcal{D}_2\mathcal{M}\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{M}, \zeta(I) \in \mathcal{D}_2, \zeta^*(I) \in \mathcal{D}_1 \text{ και } \mathcal{M} = \zeta(I)\mathcal{M}\zeta^*(I).$$

Τώρα θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος: Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστική οικογένεια από μερικές ισομετρίες $(V_n) \subset \mathcal{M}$ έτσι ώστε: $V_n^*V_n \perp V_m^*V_m, V_nV_n^* \perp V_mV_m^*$ για $n \neq m$. Η μερική ισομετρία $V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$, ανήκει στον χώρο $\mathcal{M}$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{M} \subset \{T \in B(H_1, H_2) : E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_1'),\ F \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2'),\ FVE = 0\ \Rightarrow\ FTE = 0\} \tag{3.3.4}$$

Έστω $T \in \mathcal{M}$ και $T = U|T|$ η πολική αναπαράσταση του τελεστή T. Από την Πρόταση 2.6 στο [32] προκύπτει ότι $|T| \in (\mathcal{M}^*\mathcal{M})''$ και $U \in \mathcal{M}$.
Αν $E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_1')$, $F \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2')$ είναι προβολές έτσι ώστε $FVE = 0$, αφού $|T| \in (\mathcal{M}^*\mathcal{M})''$ και $E \in \mathcal{B}_1' = (\mathcal{M}^*\mathcal{M})'$, έχουμε $FTE = FU|T|E = FUE|T|$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $FUE = 0$.

Όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε ότι

$$V^*V \perp (FUE)^*(FUE) \text{ και } VV^* \perp (FUE)(FUE)^*.$$

Αλλά $FUE \in \mathcal{B}_2'\mathcal{M}\mathcal{B}_1' \subset \mathcal{M}$, και έτσι από την μεγιστικότητα που παράχθηκε ο τελεστής V έχουμε $FUE = 0$.

Έστω $\mathcal{W} = [\mathcal{B}_2 V \mathcal{B}_1]^{-w^*}$. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$. Για το αντίστροφο, ακολουθούμε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος και χρησιμοποιούμε την σχέση (3.3.4). $\square$

Μία εναλλακτική, της προηγούμενης και αρχικής απόδειξης, μας κοινοποίησε ο I. Todorov, βασισμένη στην εργασία του [54].

Θεώρημα 3.3.3 *Οι ημισύνδεσμοι του χώρου $\Delta(\mathcal{U})$ είναι οι ακόλουθοι:*

$$\mathcal{S}_{1,\chi} = \chi^*(I)^{\perp} \oplus \chi^*(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'')$$

$$\mathcal{S}_{2,\chi} = \chi(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi})'').$$

Η απεικόνιση $\chi : \mathcal{S}_{1,\chi} \longrightarrow \mathcal{S}_{2,\chi}$ ικανοποιεί την σχέση

$$\chi(\chi^*(I)^{\perp} \oplus \chi^*(I)Q) = \chi(I)\phi(Q) \quad \text{για κάθε } Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}. \tag{3.3.5}$$

Απόδειξη Στο θεώρημα 3.3.1 δείξαμε ότι υπάρχει μερική ισομετρία V του χώρου $\Delta(\mathcal{U})$ ώστε $\Delta(\mathcal{U}) = [(\mathcal{S}_{2,\phi})' V (\mathcal{S}_{1,\phi})']^{-w^*}$. Επομένως αν $P \in \mathcal{S}_{1,\chi}$ τότε $\chi(P)$ είναι η προβολή επί του χώρου $[(\mathcal{S}_{2,\phi})' V (\mathcal{S}_{1,\phi})' P(H_1)]^-$. Συμπεραίνουμε ότι $\chi(P) \in (\mathcal{S}_{2,\phi})''$. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{S}_{2,\chi} \subset (\mathcal{S}_{2,\phi})''$.

Αν H είναι χώρος Χίλμπερτ, $\mathcal{B}$ ένα υποσύνολο του $B(H)$ και Q προβολή της άλγεβρας $\mathcal{B}'$ το σύνολο $\{T|_{Q(H)} : T \in \mathcal{B}\}$ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{B}|_Q$.

Έχουμε δείξει ότι $(\mathcal{S}_{2,\chi})''|_{\chi(I)} \subset (\mathcal{S}_{2,\phi})''|_{\chi(I)}$.

Έστω $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Επειδή $\Delta(\mathcal{U})P = \phi(P)\Delta(\mathcal{U})$ συνεπάγεται ότι $\chi(P) = \phi(P)\chi(I)$. Άρα $\chi(I)\mathcal{S}_{2,\phi} \subset \mathcal{S}_{2,\chi}$ και συνεπώς, $(\mathcal{S}_{2,\phi})''|_{\chi(I)} \subset (\mathcal{S}_{2,\chi})''|_{\chi(I)}$. Δείξαμε ότι

$$(\mathcal{S}_{2,\phi})''|_{\chi(I)} = (\mathcal{S}_{2,\chi})''|_{\chi(I)}.$$

Αφού ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι TRO, από το θεώρημα 2.10 στο [32] (δες την απόδειξη) έχουμε ότι

$$\mathcal{S}_{2,\chi}|_{\chi(I)} = \mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\chi})''|_{\chi(I)}).$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\mathcal{S}_{2,\chi} = \chi(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi})'').$$

Επαναλαμβάνοντας τα ίδια επιχειρήματα για τον χώρο $\Delta(\mathcal{U})^* = \Delta(\mathcal{U}^*)$,

$$\mathcal{S}_{2,\chi^*} = \chi^*(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi^*})'').$$

Αφου $\mathcal{S}_{1,\phi} = \{Q^\perp : Q \in \mathcal{S}_{2,\phi^*}\}$ (βλέπε την παράγραφο 2.4.1) έχουμε ότι

$$\mathcal{S}_{2,\chi^*} = \chi^*(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'').$$

Όμως

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1,\chi} = \{Q^\perp : Q \in \mathcal{S}_{2,\chi^*}\} &= \{(\chi^*(I)Q)^\perp : Q \in \mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'')\} \\ &= \{\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)Q : Q \in \mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'')\}.\end{aligned}$$

Αν $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ τότε

$$\begin{aligned}\chi(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)Q) &= \chi(\chi^*(I)Q) \qquad (\chi(\chi^*(I)^\perp) = 0) \\ &= \chi(Q) \qquad (\Delta(\mathcal{U})\chi^*(I) = \Delta(\mathcal{U})) \\ &= \phi(Q)\chi(I). \qquad (\Delta(\mathcal{U})Q = \phi(Q)\Delta(\mathcal{U}))\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.3.4 *Ο μικρότερος ορθοσύνδεσμος που περιέχει την μεταθετική οικογένεια $\chi(I)\mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι ο $\chi(I)\mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi})'')$, που ισούται με $\mathcal{S}_{2,\chi}$. Παρόμοια η οικογένεια $\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)\mathcal{S}_{1,\phi}$ παράγει τον πλήρη ορθοσύνδεσμο $\mathcal{S}_{1,\chi}$. Επομένως αφού η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\chi}}$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων (Θεώρημα 2.10 στο [32]) η ισότητα (3.3.5) καθορίζει την απεικόνιση χ.*

Πρόταση 3.3.5 *Οι οικογένειες $\chi^*(I)\mathcal{S}_{1,\phi}$ και $\chi(I)\mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι πλήρεις σύνδεσμοι και η απεικόνιση*

$$\vartheta : \chi^*(I)\mathcal{S}_{1,\phi} \to \chi(I)\mathcal{S}_{2,\phi} : \vartheta(\chi^*(I)P) = \chi(I)\phi(P)$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων.

Απόδειξη Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.3.3 και το γεγονός [32] ότι η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\chi}}$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων.

Έστω $(P_i)_{i\in I} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\wedge_{i\in I}\chi(I)\phi(P_i) = \chi(I)\phi(\wedge_{i\in I}P_i). \tag{3.3.6}$$

Πράγματι, από την (3.3.5),

$$\begin{aligned}\wedge_{i\in I}\chi(I)\phi(P_i) &= \wedge_{i\in I}\,\chi(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)P_i)\\ &=\chi(\wedge_{i\in I}(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)P_i)) = \chi(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)(\wedge_{i\in I}P_i)).\end{aligned}$$

Αφού $\wedge_{i\in I}P_i \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ χρησιμοποιώντας ξανά την (3.3.5) παίρνουμε ότι $\chi(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)(\wedge_{i\in I}P_i)) = \chi(I)\phi(\wedge_{i\in I}P_i)$.

Από την (2.4.1), υπάρχει οικογένεια $(Q_i)_{i\in I} \subset \mathcal{S}_{1,\phi^*}$ έτσι ώστε $\phi^*(Q_i)^\perp = P_i$ για κάθε $i \in I$. Θα δείξουμε ότι

$$\vee_{i\in I}\chi^*(I)P_i = \chi^*(I)(\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp. \tag{3.3.7}$$

Αφού $\Delta(\mathcal{U}^*) = \Delta(\mathcal{U})^*$ έχουμε ότι $\chi^* = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}^*))$ και άρα παίρνοντας την εξίσωση (3.3.6) για την χ^* έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\wedge_{i\in I}\chi^*(I)\phi^*(Q_i) =&\chi^*(I)\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i) \Rightarrow\\ \vee_{i\in I}(\chi^*(I)\phi^*(Q_i))^\perp =&(\chi^*(I)\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i)^\perp \Rightarrow\\ \vee_{i\in I}(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)(\phi^*(Q_i))^\perp) =&\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)(\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp \Rightarrow\\ \vee_{i\in I}(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)P_i) =&\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)(\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp \Rightarrow\\ \vee_{i\in I}\chi^*(I)P_i =&\chi^*(I)(\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp.\end{aligned}$$

Από τις ισότητες (3.3.6) και (3.3.7) συμπεραίνουμε ότι οι οικογένειες $\chi^*(I)\mathcal{S}_{1,\phi}$, $\chi(I)\mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι πλήρεις σύνδεσμοι.

Επειδή $\chi(\chi^*(I)^\perp \oplus \chi^*(I)Q) = \chi(I)\phi(Q)$ για κάθε $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\chi}}$ είναι $1-1$, η απεικόνιση ϑ είναι $1-1$. Απομένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϑ είναι sup και inf συνεχής.

Έστω $(P_i)_{i\in I} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$ και $(Q_i)_{i\in I} \subset \mathcal{S}_{1,\phi^*}$ προβολές τέτοιες ώστε $\phi^*(Q_i)^\perp = P_i$, η ισοδύναμα από την εξίσωση (2.4.1) $\phi(P_i)^\perp = Q_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε, αφού $\wedge_{i\in I} P_i \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, από τον ορισμό της ϑ έχουμε

$$\begin{aligned}\vartheta(\wedge_{i\in I}\chi^*(I)P_i) &= \vartheta(\chi^*(I)(\wedge_{i\in I}P_i)) = \chi(I)\phi(\wedge_{i\in I}P_i)\\ &= \wedge_{i\in I}\,\chi(I)\phi(P_i) = \wedge_{i\in I}\vartheta(\chi^*(I)P_i).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (3.3.7) και (2.4.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\vartheta(\vee_{i\in I}\chi^*(I)P_i) &= \vartheta(\chi^*(I)(\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp) = \chi(I)\phi((\phi^*(\wedge_{i\in I}Q_i))^\perp)\\ &= \chi(I)(\wedge_{i\in I}Q_i)^\perp = \vee_{i\in I}\chi(I)Q_i^\perp\\ &= \vee_{i\in I}\,\chi(I)\phi(P_i) = \vee_{i\in I}\vartheta(\chi^*(I)P_i).\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.3.6 *Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν η διαγώνιος είναι ουσιώδης (ορισμός 2.4.1) τότε οι ημισύνδεσμοι του προτύπου $\mathcal{U}$ είναι CSL's και η απεικόνιση* $\mathrm{Map}(\mathcal{U})$ *είναι ισομορφισμός συνδέσμων.*

3.4 Ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός

Έστω $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_0$, $\Delta(\mathcal{U})$ και ϕ όπως στην παράγραφο 3.2 και $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$, $\psi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}_0)$.

Λήμμα 3.4.1 *Αν ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης, δηλαδή $\chi(I) = I, \chi^*(I) = I$, τότε $\mathcal{S}_{1,\psi} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$ και $\mathcal{S}_{2,\psi} \subset \mathcal{S}_{2,\phi}$.*

Απόδειξη Αφού ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης από το Θεώρημα 3.3.5 οι ημισύνδεσμοι $\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}$, είναι CSL's.

Αν E είναι προβολή, έχουμε $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{2,\phi})\mathcal{U}_0 E \subset \mathcal{U}_0 E$ (Λήμμα 3.2.7). Συνεπάγεται ότι $\psi(E)^\perp \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{2,\phi})\psi(E) = 0$ και συνεπώς $\psi(E) \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{2,\phi}))$. Επειδή

οι πλήρεις μεταθετικοί σύνδεσμοι είναι ανακλαστικοί, έπεται ότι $\psi(E) \in \mathcal{S}_{2,\phi}$. Έτσι $\mathcal{S}_{2,\psi} \subset \mathcal{S}_{2,\phi}$.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{U}_0 \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi}) \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi})$ και άρα $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi}^{\perp})\mathcal{U}_0^* \subset \mathcal{U}_0^*$. Όπως παραπάνω έχουμε $\mathcal{S}_{2,\psi^*} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}^{\perp}$ και άρα $\mathcal{S}_{1,\psi} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$. $\square$

Θεώρημα 3.4.2 *Ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη Αρχικά, υποθέτουμε ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης ($\chi(I) = I, \chi^*(I) = I$).
Από το Θεώρημα 3.3.3 έχουμε ότι $\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})''), \mathcal{S}_{2,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi})'')$ και $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}} = \phi$.

Αν $E \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, τότε $\phi(E), \psi(E) \in \mathcal{P}((\mathcal{S}_{2,\phi})'')$ και άρα υπάρχει μοναδική προβολή $F \in \mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'')$ έτσι ώστε $\chi(F) = \phi(E) - \psi(E)$. Παρατηρούμε ότι $\chi(F) \leq \phi(E) = \chi(E)$. Αφού η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\chi}}$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων, $F \leq E$ και άρα $\psi(F) \leq \psi(E)$; από το οποίο έχουμε $\chi(F) \perp \psi(F)$. Συνεπάγεται ότι $\Delta(\mathcal{U})F(H_1) \perp \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_0)F(H_1)$ και $\Delta(\mathcal{U})F \cap \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_0)F = 0$.

Από το Θεώρημα 3.2.3 έχουμε την διάσπαση, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$, και άρα $\mathcal{U}F = \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_0)F \oplus \Delta(\mathcal{U})F$ και $\mathcal{U}F = \mathcal{U}_0 F \oplus \Delta(\mathcal{U})F$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{U}_0 F = \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_0)F$ και συνεπώς ο χώρος $\mathcal{U}_0 F$ είναι ανακλαστικός.

Έστω

$$P = \vee\{F \in \mathcal{P}((\mathcal{S}_{1,\phi})'') : \chi(F) = \phi(E) - \psi(E), E \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Βάσει της προηγούμενης επιχειρηματολογίας ο χώρος $\mathcal{U}_0 P$ είναι ανακλαστικός. Επειδή η απεικόνιση χ είναι $\vee$-συνεχής έχουμε ότι

$$\chi(P) = \vee\{\phi(E) - \psi(E), E \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Έστω $Q = \chi(P)^{\perp}$. Επειδή $Q\phi(E) = Q\psi(E)$ για όλα τα $E \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} Q\mathcal{U} &= \{T : Q\phi(E)^{\perp}TE = 0 \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}_{1,\phi}\} = \\ &= \{T : Q\psi(E)^{\perp}TE = 0 \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα ($\mathcal{S}_{1,\psi} \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$) παίρνουμε ότι ο χώρος $Q\mathcal{U}$ περιέχεται στον χώρο

$$\{T : Q\psi(E)^{\perp}TE = 0 \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}_{1,\psi}\} =$$

$$= Q\mathrm{Ref}(\mathcal{U}_0) = \mathrm{Ref}(Q\mathcal{U}_0) \subset Q\mathcal{U}.$$

Αυτό δείχνει ότι $Q\mathcal{U} = \mathrm{Ref}(Q\mathcal{U}_0)$.

Οι Κατάβολος και Todorov [32] έχουν δείξει ότι $\Delta(\mathcal{U}) \subset (\mathcal{U})_{min}$. Επομένως $Q\Delta(\mathcal{U}) \subset Q(\mathcal{U})_{min} = (Q\mathcal{U})_{min}$. Αλλά αφού το $Q\mathcal{U}_0$ είναι ένα w^* κλειστό masa πρότυπο έτσι ώστε $\mathrm{Ref}(Q\mathcal{U}_0) = Q\mathcal{U}$ συνεπάγεται ότι $Q\Delta(\mathcal{U}) \subset Q\mathcal{U}_0$. Τώρα $Q\Delta(\mathcal{U}) = \chi(P)^{\perp}\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})P^{\perp}$ και άρα $\Delta(\mathcal{U})P^{\perp} \subset \mathcal{U}_0$.
Επομένως $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})P^{\perp} + \Delta(\mathcal{U})P = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})P$ και συνεπώς $\mathcal{U}P^{\perp} = \mathcal{U}_0P^{\perp}$.
Συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathcal{U}_0P^{\perp}$ είναι ανακλαστικός. Αφού ο $\mathcal{U}_0P$ είναι επίσης ανακλαστικός προκύπτει τελικά ότι ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός.

Τώρα, αίρουμε την υπόθεση ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης. Έστω $\mathcal{W} = \chi(I)\mathcal{U}|_{\chi^*(I)}$. Αυτό είναι ένα masa πρότυπο που περιέχεται στον χώρο $B(\chi^*(I)(H_1), \chi(I)(H_2))$.

Έχουμε ότι

$$\mathcal{W} = \{T : \chi(I)\phi(L)^{\perp}TL|_{\chi^*(I)} = 0 \ \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_{1,\phi}\}.$$

Από την Πρόταση 3.3.5 οι οικογένειες $\mathcal{S}_{1,\phi}|_{\chi^*(I)}, \mathcal{S}_{2,\phi}|_{\chi(I)}$ είναι πλήρεις σύνδεσμοι και η απεικόνιση $\mathcal{S}_{1,\phi}|_{\chi^*(I)} \to \mathcal{S}_{2,\phi}|_{\chi(I)} : P|_{\chi^*(I)} \to \phi(P)|_{\chi(I)}$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Από το θεώρημα 2.4.4 συνεπάγεται ότι οι (ημι)σύνδεσμοι του $\mathcal{W}$ είναι οι οικογένειες $\mathcal{S}_{1,\phi}|_{\chi^*(I)}, \mathcal{S}_{2,\phi}|_{\chi(I)}$.

Από αυτό έχουμε $\mathcal{W}_0 = [\chi(I)\phi(L)TL^{\perp}|_{\chi^*(I)} : \ T \in \mathcal{W}, L \in \mathcal{S}_{1,\phi}]^{-w^*} = \chi(I)\mathcal{U}_0|_{\chi^*(I)}$. Επειδή

$$\chi(I)\Delta(\mathcal{U})|_{\chi^*(I)} = \{T : TP|_{\chi^*(I)} = \phi(P)|_{\chi(I)}T \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_{1,\phi}\} = \Delta(\mathcal{W})$$

η διαγώνιος του $\mathcal{W}$ είναι ουσιώδης. Συνεπάγεται από το πρώτο μέρος της απόδειξης ότι ο χώρος $\chi(I)\mathcal{U}_0\chi^*(I)$ είναι ανακλαστικός.

Αλλά $\chi(I)^{\perp}\mathcal{U} = \chi(I)^{\perp}\mathcal{U}_0$ και $\mathcal{U}\chi^*(I)^{\perp} = \mathcal{U}_0\chi^*(I)^{\perp}$. Επομένως οι χώροι $\chi(I)^{\perp}\mathcal{U}_0$ και $\mathcal{U}_0\chi^*(I)^{\perp}$ είναι ανακλαστικοί και άρα τελικά ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ανακλαστικός. $\square$

Για το υπόλοιπο αυτής της παραγράφου υποθέτουμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι ένα CSL και $\mathcal{U} = \mathrm{Alg}(\mathcal{S})$. Έστω $\mathcal{J}$ το ιδεώδες $[PTP^{\perp} : T \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{S}]^{-\|\cdot\|}, \mathcal{U}_0 = \mathcal{J}^{-w^*}$ και $\psi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}_0)$. Είναι γνωστό ότι $\mathcal{J} \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{U})$, όπου $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})$ είναι το «ριζικό» του $\mathcal{U}$. Η ισότητα $\mathcal{J} = \mathrm{Rad}(\mathcal{U})$ είναι ένα ανοικτό πρόβλημα (εικασία του Hopenwasser), [29], [18]. Ο I.Todorov [4] έχει αποδείξει ότι οι χώροι $\mathcal{J}$ και $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})$ έχουν την ίδια ανακλαστική θήκη. Βελτιώνουμε αυτό το αποτέλεσμα με το παρακάτω.

Πόρισμα 3.4.3 *Οι χώροι $\mathcal{J}$ και $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})$ έχουν την ίδια w^* κλειστή θήκη.*

Απόδειξη

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{J}^{-w^*} \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} \subset \mathrm{Ref}(\mathrm{Rad}(\mathcal{U})) = \mathrm{Ref}(\mathcal{J}) = \mathcal{U}_0.$$

Πόρισμα 3.4.4 $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} = \{T : \psi(E)^\perp TE = 0$ *για κάθε* $E \in \mathcal{S}\}$.

Απόδειξη $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} = \mathcal{U}_0 = \{T : \psi(E)^\perp TE = 0$ για κάθε προβολή $E\} \subset \{T : \psi(E)^\perp TE = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{S}\}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4.1 συμπεραίνουμε ότι ο τελευταίος χώρος περιέχεται στον χώρο:
$\{T : \psi(E)^\perp TE = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{S}_{1,\psi}\} = \mathcal{U}_0 = \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*}$. $\square$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε την συγκεκριμένη μορφή της διάσπασης του χώρου $\mathcal{U}$ στην περίπτωση που αυτός είναι CSL άλγεβρα:

Πρόταση 3.4.5 *Έστω* $Q = \vee\{E - \psi(E) : E \in \mathcal{S}\}$ *τότε*

$$\mathcal{U} = \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} \oplus Q\mathcal{S}'.$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι $Q^\perp E = Q^\perp \psi(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$ και άρα έχουμε:

$$Q^\perp \mathcal{U} = \{T : Q^\perp E^\perp TE = 0 \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}\}$$

$$= \{T : Q^\perp \psi(E)^\perp TE = 0 \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}\}.$$

Από το προηγούμενο πόρισμα ο τελευταίος χώρος ισούται με τον χώρο $Q^\perp \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*}$. Έτσι έχουμε ότι $Q^\perp \mathcal{S}' \subset Q^\perp \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*}$. Επειδή $\mathcal{U} = \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} + \mathcal{S}'$ παίρνουμε ότι $\mathcal{U} = \mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} + Q\mathcal{S}'$.

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\mathrm{Rad}(\mathcal{U})^{-w^*} \cap Q\mathcal{S}' = 0$. Παίρνοντας $E \in \mathcal{S}$ και $T \in \mathcal{U}_0 \cap (E - \psi(E))\mathcal{S}'$ έχουμε $T = (E - \psi(E))T = \psi(E)^\perp ET = \psi(E)^\perp TE = 0$, επειδή $T \in \mathcal{U}_0$.
Αν $T \in \mathcal{U}_0 \cap Q\mathcal{S}'$ τότε $(E - \psi(E))T \in \mathcal{U}_0 \cap (E - \psi(E))\mathcal{S}' = 0$. Επομένως $(E - \psi(E))T = 0$ για όλα τα $E \in \mathcal{S}$. Αλλά $T = (\vee\{E - \psi(E) : E \in \mathcal{S}\})T$ και άρα $T = 0$. $\square$

3.5 Διάσπαση συμπαγών τελεστών ανακλαστικών masa προτύπων

Έστω $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_0$, $\Delta(\mathcal{U})$, ϕ, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, Q_1 όπως στην παράγραφο 3.2 και $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών και με C_p την κλάση των p-Schatten τελεστών που περιέχονται στον χώρο $B(H_1, H_2)$.

Πρόταση 3.5.1 *Αν $T \in R_1(\mathcal{U})$, τότε υπάρχει $L \in R_1(\Delta(\mathcal{U}))$ και $S \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-\| \|_1}$ έτσι ώστε $T = L + S$.*

Απόδειξη Ο χώρος $\mathcal{U}$ γράφεται $\mathcal{U} = \{X : \phi(P_n)^\perp X P_n = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$ για κατάλληλη ακολουθία $(P_n) \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$. Έστω $T \in R_1(\mathcal{U})$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3

$$T = L_1 + \phi(P_1)TP_1^\perp, \text{όπου } L_1 = \phi(P_1)TP_1 + \phi(P_1)^\perp TP_1^\perp.$$

Επειδή $\phi(P_1)^\perp TP_1 = 0$ και ο τελεστής T έχει τάξη 1, είτε $\phi(P_1)^\perp T = 0$ είτε $TP_1 = 0$ και άρα είτε $L_1 = \phi(P_1)TP_1$ είτε $L_1 = \phi(P_1)^\perp TP_1^\perp$. Τώρα

$$L_1 = L_2 + \phi(P_2)L_1P_2^\perp, \text{όπου } L_2 = \phi(P_2)L_1P_2 + \phi(P_2)^\perp L_1P_2^\perp.$$

Αφού $\phi(P_2)^\perp L_1P_2 = 0$, είτε $L_2 = \phi(P_2)L_1P_2$ είτε $L_2 = \phi(P_2)^\perp L_1P_2^\perp$. Παρόμοια

$$L_{n-1} = L_n + \phi(P_n)L_{n-1}P_n^\perp, \text{όπου } L_n = \phi(P_n)L_{n-1}P_n + \phi(P_n)^\perp L_{n-1}P_n^\perp.$$

Όπως προηγούμενα, είτε $L_n = \phi(P_n)L_{n-1}P_n$ είτε $L_n = \phi(P_n)^\perp L_{n-1}P_n^\perp$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες προβολών $(Q_n) \subset \mathcal{D}_2, (R_n) \subset \mathcal{D}_1$ έτσι ώστε $L_n = (\wedge_{i=1}^n Q_i)T(\wedge_{i=1}^n R_i), n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $T = L_n + M_n$ όπου $M_n = \phi(P_1)TP_1^\perp + \phi(P_2)L_1P_2^\perp + ... + \phi(P_n)L_{n-1}P_n^\perp$, $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $\wedge_{i=1}^n Q_i \overset{sot}{\to} \wedge_{i=1}^\infty Q_i$, $\wedge_{i=1}^n R_i \overset{sot}{\to} \wedge_{i=1}^\infty R_i$ και ο τελεστής T έχει τάξη 1,

$$L_n \overset{\| \|_1}{\to} (\wedge_{i=1}^\infty Q_i)T(\wedge_{i=1}^\infty R_i) = L.$$

Τώρα $\phi(P_i)^\perp L_n P_i = \phi(P_i)L_nP_i^\perp = 0, i = 1, 2, ...n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ συνεπώς $\phi(P_i)^\perp LP_i = \phi(P_i)LP_i^\perp = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έτσι $L \in R_1(\Delta(\mathcal{U}))$.

Έχουμε $M_n = T - L_n \overset{\| \|_1}{\to} T - L = S \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-\| \|_1}$. $\square$

Πρόταση 3.5.2 $\mathcal{U}_0 \subset (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$.

Απόδειξη Για κάθε $T \in \mathcal{U},\ P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και $R \in R_1(\Delta(\mathcal{U}))$ έχουμε

$$tr(\phi(P)TP^{\perp}R^*) = tr(T(\phi(P)RP^{\perp})^*) = tr(T0) = 0.$$

Παίρνοντας γραμμική θήκη και w^* κλειστότητα παίρνουμε $tr(SR^*) = 0$ για κάθε $S \in \mathcal{U}_0$. □

Πρόταση 3.5.3 (i) $R_1(\Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$.

(ii) $\Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K} = [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-\|\cdot\|} \subset \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$.

Απόδειξη Έστω $R \in R_1(\Delta(\mathcal{U}))$, όπως στο Θεώρημα 3.2.5 $RQ_1 \in \Delta(\mathcal{U})Q_1 = \mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_0$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε: $tr(RQ_1R^*) = 0 \Rightarrow tr(R^*RQ_1) = 0 \Rightarrow RQ_1 = 0 \Rightarrow R = R(I - Q_1)$. Συμπεραίνουμε ότι $R_1(\Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$.

Για το μέρος (ii), παρατήρησε ότι αν $K \in \Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K}$ τότε ο τελεστής K μπορεί να προσεγγιστεί στην τοπολογία της νόρμας από αθροίσματα τελεστών τάξης 1 του χώρου $\Delta(\mathcal{U})$ (Πρόταση 3.4 στο [32]). □

Παρατήρηση 3.5.4 *Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι αν ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι ένα ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο τότε έχουμε την ισότητα $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$. Αυτό δεν είναι αληθές γενικά. Για παράδειγμα πάρε $\mathcal{U}$ να είναι ένα TRO που δεν είναι ισχυρά ανακλαστικό. Τότε ο χώρος $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$ περιέχεται γνήσια στον $\Delta(\mathcal{U})(I - Q_1) = \mathcal{U}$.*

Πρόταση 3.5.5 $\Delta(\mathcal{U}) \subset (R_1(\mathcal{U}_0)^*)^0$.

Απόδειξη Έστω $T \in R_1(\mathcal{U}_0)$. Όπως στην Πρόταση 3.5.1 διασπούμε τον τελεστή T ως άθροισμα $T = L + M$ όπου

$$L \in R_1(\Delta(\mathcal{U})) \text{ και } M \in [R_1(\phi(P_n)\mathcal{U}P_n^{\perp}) : n \in \mathbb{N}]^{-\|\ \|_1} \subset \mathcal{U}_0.$$

Έτσι $L = T - M \in \mathcal{U}_0 \cap R_1(\Delta(\mathcal{U}))$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.5.3, $\mathcal{U}_0 \cap R_1(\Delta(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$ που μηδενίζεται από το Θεώρημα 3.2.5 άρα $L = 0$ και συνεπώς $T = M$.

Συμπεραίνουμε ότι

$$R_1(\mathcal{U}_0) \subset [R_1(\phi(P_n)\mathcal{U}P_n^{\perp}) : n \in \mathbb{N}]^{-\|\ \|_1}. \tag{3.5.1}$$

Έστω $A \in \Delta(\mathcal{U})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $tr(A^*R) = 0$ για κάθε $R \in R_1(\mathcal{U}_0)$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.5.1) είναι αρκετό να δείξουμε ότι $tr(A^*R) = 0$ για κάθε $R \in R_1(\phi(P_n)\mathcal{U}P_n^\perp)$ και $n \in \mathbb{N}$. Αν ο R είναι τάξης 1 τελεστής έτσι ώστε $R = \phi(P_n)RP_n^\perp$ τότε

$$\begin{aligned} tr(A^*R) =& tr(A^*\phi(P_n)RP_n^\perp) = tr(P_n^\perp A^*\phi(P_n)R) \\ =& tr((\phi(P_n)AP_n^\perp)^*R) = tr(0R) = 0. \end{aligned}$$

□

Έστω $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Υποθέτουμε ότι $\vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\} < \phi(P)$.
Αφού $\mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι πλήρης ως προς τα suprema τότε υπάρχει $P_0 \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έτσι ώστε

$$\phi(P_0) = \vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\}.$$

Καλούμε την προβολή $P - P_0$ **άτομο** του $\mathcal{U}$ και συμβολίζουμε την προβολή $\phi(P) - \phi(P_0)$ με $\delta(P - P_0)$.

Πρόταση 3.5.6 *Έστω F άτομο του χώρου $\mathcal{U}$.*

(i) Η προβολή F είναι ελαχιστική στην άλγεβρα $(\mathcal{S}_{1,\phi})''$.

(ii) Η προβολή $\chi(I)\delta(F)$ είναι ελαχιστική στην άλγεβρα $\chi(I)(\mathcal{S}_{2,\phi})''$.

(iii) $\chi(I)\delta(F)B(H_1, H_2)F \subset \Delta(\mathcal{U})$.

(iv) $\chi(I)^\perp\delta(F)B(H_1, H_2)F \subset \mathcal{U}_0$.

Απόδειξη *(i)* Έστω $P, P_0 \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ τέτοιες ώστε $\phi(P_0) = \vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\} < \phi(P)$ και $F = P - P_0$. Αν $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ είτε $P \leq Q$ είτε $QP < P$.
Αν $P \leq Q$ τότε $QF = F$. Αν $QP < P$ τότε (επειδή $QP \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και ϕ είναι 1-1 ως απεικόνιση περιορισμένη στο $\mathcal{S}_{1,\phi}$) $\phi(QP) < \phi(P) \Rightarrow \phi(QP) \leq \phi(P_0) \Rightarrow QP \leq P_0$, έτσι $QF = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι $QFB(H_1)F = FB(H_1)QF$ για κάθε $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, συνεπώς $FB(H_1)F \subset (\mathcal{S}_{1,\phi})'$, και άρα η F είναι ελαχιστική προβολή στην άλγεβρα $(\mathcal{S}_{1,\phi})''$.

(ii) Επειδή $P, P_0 \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε ότι $\phi(P)\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})P$ και $\phi(P_0)\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})P_0$ άρα

$$\delta(F)\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})F \text{ και συνεπώς } \chi(I)\delta(F) = \chi(F).$$

Έστω $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$.

$$\text{Αν } \; QF = 0 \text{ τότε } \chi(I)\delta(F)\phi(Q) = 0. \tag{3.5.2}$$

Πράγματι, αφού $\delta(F)\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})F$ παίρνουμε $\delta(F)\Delta(\mathcal{U})Q = 0$. Έχουμε ότι $\delta(F)\chi(Q) = 0$ και άρα $\chi(I)\delta(F)\phi(Q) = 0$.

$$\text{Αν } QF = F \text{ τότε } \chi(I)\delta(F)\phi(Q) = \chi(I)\delta(F). \tag{3.5.3}$$

Πράγματι, $\delta(F)\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U})F$ άρα $\delta(F)\Delta(\mathcal{U})Q = \Delta(\mathcal{U})F$. Έχουμε ότι $\delta(F)\chi(Q) = \chi(F)$ και άρα $\chi(I)\delta(F)\phi(Q) = \chi(I)\delta(F)$.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.5.2),(3.5.3) όπως στο (i) έχουμε ότι $\chi(I)\delta(F)$ είναι ελαχιστική προβολή στην άλγεβρα $\chi(I)(\mathcal{S}_{2,\phi})''$.

(iii) Έστω $T \in B(H_1, H_2)$ και $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Από τις εξισώσεις (3.5.2),(3.5.3) συνεπάγεται ότι $\phi(Q)\chi(I)\delta(F)TF = \chi(I)\delta(F)TFQ$, και άρα $\chi(I)\delta(F)TF \in \Delta(\mathcal{U})$.

(iv) Αν $T \in \mathcal{U}$ τότε $\chi(I)^{\perp}T \in \mathcal{U}_0$. Πράγματι, από το Θεώρημα 3.2.3 υπάρχουν $T_1 \in \mathcal{U}_0$, $T_2 \in \Delta(\mathcal{U})$ έτσι ώστε $T = T_1 + T_2$. Αλλά $T_2 = \chi(I)T_2$ και άρα $\chi(I)^{\perp}T = \chi(I)^{\perp}T_1 \in \mathcal{U}_0$.

Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι $\delta(F)B(H_1, H_2)F \subset \mathcal{U}$. Έστω $T \in B(H_1, H_2)$ και $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Αν $FQ = 0$ τότε $\phi(Q)^{\perp}\delta(F)TFQ = 0$. Αν $FQ = F$ τότε $P - P_0 \leq Q$ άρα $\delta(F) = \phi(P) - \phi(P_0) \leq \phi(P - P_0) \leq \phi(Q)$ και συνεπώς $\phi(Q)^{\perp}\delta(F)TFQ = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\delta(F)TF \in \mathcal{U}$. □

Παρατήρηση 3.5.7 *Υπάρχει ένα απλό παράδειγμα ανακλαστικού masa προτύπου $\mathcal{U}$ έτσι ώστε $\delta(F)B(H_1, H_2)F \subset \mathcal{U}_0$ για κάθε άτομο F στο $\mathcal{U}$: Πάρε $\mathcal{U}$ να είναι το σύνολο των 3×3 πινάκων με μηδενική διαγώνιο. Σε αυτή την περίπτωση ελέγχεται ότι $\Delta(\mathcal{U}) = 0$. Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα διαφορετικής συμπεριφοράς των αλγεβρών από τα πρότυπα: είναι γνωστό ότι αν $\mathcal{U}$ είναι μία CSL άλγεβρα που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H και F είναι ένα άτομο του $\mathcal{U}$ τότε $FB(H)F \subset \Delta(\mathcal{U})$.*

Ο I. Todorov πρότεινε την «ατομική διάσπαση» στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.8 *Υποθέτουμε ότι $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \{F : F \text{ άτομο του } \mathcal{U}\}$, τότε*

$$[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \chi(I)\delta(F_n)B(H_1, H_2)F_n.$$

Απόδειξη Από την προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται ότι

$$[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} \supset \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \chi(I)\delta(F_n)B(H_1, H_2)F_n.$$

Έστω ο μη μηδενικός τελεστής $R = x \odot y^* \in \Delta(\mathcal{U})$. Για κάθε $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε ότι $x \odot (Qy)^* = (\phi(Q)x) \odot y^*$ και άρα $\phi(Q)x \neq 0 \Leftrightarrow Qy \neq 0 \Leftrightarrow \phi(Q)x = x \Leftrightarrow Qy = y$.

Η προβολή $P = \wedge\{Q \in \mathcal{S}_{1,\phi} : Qy = y\}$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{S}_{1,\phi}$. Αν $Q \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ έτσι ώστε $\phi(Q) < \phi(P)$ τότε $\phi(Q)x = 0$. (Αν $\phi(Q)x = x$ τότε $Qy = y$ και άρα $Q \geq P$).

Έστω $P_0 \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ με $\phi(P_0) = \vee\{\phi(L) : L \in \mathcal{S}_{1,\phi}, \phi(L) < \phi(P)\}$. Παρατηρούμε ότι $\phi(P_0)x = 0$ και $\phi(P)x = x$, άρα $\phi(P_0) < \phi(P)$. Συμπεραίνουμε ότι η προβολή $F = P - P_0$ είναι ένα άτομο του $\mathcal{U}$.
Οι ισότητες $(P - P_0)y = y$ και $(\phi(P) - \phi(P_0))x = x$ συνεπάγονται ότι $R = \delta(F)RF$. Αλλά $R = \chi(I)R$ και άρα $R = \chi(I)\delta(F)RF$. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Κάθε ισχυρά ανακλαστικό TRO είναι masa πρότυπο [32]. Επομένως χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε μία νέα απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος στο [32].

Πόρισμα 3.5.9 *Αν $\mathcal{M}$ είναι ένα ισχυρά ανακλαστικό TRO, $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$ και $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{A : A \text{ άτομο } \text{ του } \mathcal{M}\}$, τότε*

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \zeta(A_n)B(H_1, H_2)A_n.$$

Έστω $(P_n) \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$ μία ακολουθία έτσι ώστε

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P_n)^{\perp}TP_n = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Έστω $V_n, U_n : B(H_1, H_2) \longrightarrow B(H_1, H_2), n \in \mathbb{N}$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3
Από το Θεώρημα 3.5.8

$$[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_n B(H_1, H_2)F_n,$$

όπου $E_n = \chi(I)\delta(F_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έτσι ο χώρος $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$ είναι η εικόνα της απεικόνισης D που ορίζεται ως εξής

$$D : B(H_1, H_2) \longrightarrow B(H_1, H_2) : D(T) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n T F_n.$$

Πρόταση 3.5.10 *Αν $K \in \mathcal{K}$, τότε η ακολουθία $(U_n(K))$ συγκλίνει στον τελεστή $D(K)$ στην τοπολογία της νόρμας.*

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(V_n|_{C_2})$ αποτελείται από ορθογώνιες προβολές του χώρου Χίλμπερτ C_2 που μετατίθενται. Επομένως η ακολουθία $(U_n|_{C_2})$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία από ορθογώνιες προβολές. Συνεπώς αν $T \in C_2$ η ακολουθία $(U_n(T))$ συγκλίνει στην Hilbert-Schmidt νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Έστω $K \in \mathcal{K}$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \in C_2$ έτσι ώστε $\|K - K_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\|U_n(K_\varepsilon) - U_m(K_\varepsilon)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\|U_n(K) - U_m(K)\| \\
\leq &\|U_n(K) - U_n(K_\varepsilon)\| + \|U_n(K_\varepsilon) - U_m(K_\varepsilon)\| + \|U_m(K_\varepsilon) - U_m(K)\| \\
\leq &\|K - K_\varepsilon\| + \|U_n(K_\varepsilon) - U_m(K_\varepsilon)\|_2 + \|K - K_\varepsilon\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $n, m \geq n_0$. Άρα η ακολουθία $(U_n(K))$ συγκλίνει στην operator νόρμα. Έστω $D_1(K)$ το όριό της.

Επειδή $\phi(P_i)^\perp U_n(K) P_i = \phi(P_i) U_n(K) P_i^\perp = 0$ για κάθε $i = 1, 2, ...n$, το όριο $D_1(K)$ ανήκει στην διαγώνιο $\Delta(\mathcal{U})$. Επίσης επειδή $\|U_n(K)\| \leq \|K\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η D_1 είναι συστολή. Παρατηρούμε ότι αν $K \in \Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K}$ τότε $U_n(K) = K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα η D_1 προβάλλει επί του χώρου $\Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K}$. Τώρα η $D_1|_{C_2}$ είναι ορθογώνια προβολή επί του χώρου $\Delta(\mathcal{U}) \cap C_2$, ως infimum της ακολουθίας $(U_n|_{C_2})$.

Επίσης παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $D|_{C_2}$ είναι ορθογώνια προβολή του χώρου Χίλμπερτ C_2. Αν $T \in \Delta(\mathcal{U}) \cap C_2$ τότε από την Πρόταση 3.5.3 $T = \sum_{n=1}^{\infty} E_n T F_n = D(T)$.

Επομένως οι $D|_{C_2}$ και $D_1|_{C_2}$ είναι ορθογώνιες προβολές επί του χώρου $\Delta(\mathcal{U}) \cap C_2$, και άρα $D|_{C_2} = D_1|_{C_2}$. Επειδή ο χώρος C_2 είναι πυκνος στον $\mathcal{K}$ στην τοπολογία της νόρμας και οι απεικονίσεις $D|_{\mathcal{K}}, D_1$ είναι norm συνεχείς έχουμε $D|_{\mathcal{K}} = D_1$. $\square$

Η προηγούμενη απόδειξη ανήκει στον Α. Κατάβολο.

Πρόταση 3.5.11 *Υποθέτουμε ότι* $\vee_n F_n = F$. *Τότε η ακολουθία* $(U_n(T)F)$ *συγκλίνει sot στον τελεστή* $D(T)$ *για κάθε* $T \in B(H_1, H_2)$.

Απόδειξη Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $x \in F_m(H_1), m \in \mathbb{N}$ ο τελεστής $x \odot x^*$ ανήκει στην άλγεβρα $(\mathcal{S}_{1,\phi})'$. Πράγματι, αν $y \in E_m(H_2)$ τότε $R = y \odot x^* \in \Delta(\mathcal{U})$. Συνεπάγεται ότι $R^*R = \|y\|^2 x \odot x^* \in \Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset (\mathcal{S}_{1,\phi})'$.

Έστω $T \in B(H_1, H_2)$ και $x \in F_m(H_1), m \in \mathbb{N}, \|x\| = 1$. Από την Πρόταση 3.5.10

$$U_i(Tx \odot x^*) \xrightarrow{\|\cdot\|} D(Tx \odot x^*), i \to \infty,$$

επομένως

$$U_i(Tx \odot x^*)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} D(Tx \odot x^*)(x), i \to \infty \tag{3.5.4}$$

$$D(Tx \odot x^*)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(Tx \odot x^*)F_n(x) = E_m T(x) \tag{3.5.5}$$

$$D(T)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n T F_n(x) = E_m T(x) \tag{3.5.6}$$

Από τον ορισμό του τελεστή V_i έχουμε ότι

$$V_i(Tx \odot x^*) = \phi(P_i)\ (T\ x \odot x^*)\ P_i + \phi(P_i)^{\perp}(T\ x \odot x^*)\ P_i^{\perp},\ i \in \mathbb{N}$$

και επειδή $x \odot x^* \in (\mathcal{S}_{1,\phi})'$ προκύπτει ότι

$$V_i(Tx \odot x^*) = (\phi(P_i)\ T\ P_i)\ (x \odot x^*) + (\phi(P_i)^{\perp} T\ P_i^{\perp})\ (x \odot x^*),\ i \in \mathbb{N}.$$

Συνεπάγεται ότι

$$U_i(Tx \odot x^*) = U_i(T)x \odot x^* \Rightarrow U_i(Tx \odot x^*)(x) = U_i(T)(x), i \in \mathbb{N} \tag{3.5.7}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.5.4),(3.5.5),(3.5.6),(3.5.7) έχουμε

$$U_i(T)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} D(T)(x),\ i \to \infty \text{ για κάθε } x \in [\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(H_1)].$$

Επειδή οι U_i είναι συστολές παίρνουμε ότι $U_i(T)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} D(T)(x)$ για κάθε $x \in F(H_1)$. Τέλος, επειδή $D(T)F = D(T)$ φθάνουμε στο συμπέρασμα. $\square$

Παρατήρηση 3.5.12 *Η ακολουθία $(U_n(T))$ έχει παρόμοιες ιδιότητες με το δίκτυο των πεπερασμένων διαγώνιων αθροισμάτων στην περίπτωση των nest αλγεβρών. Οι Προτάσεις 3.5.10, 3.5.11 είναι ανάλογες με τις Προτάσεις 4.3,4.4 στο [15].*

Θεώρημα 3.5.13 *Για κάθε συμπαγή τελεστή $K \in \mathcal{U}$ υπάρχουν μοναδικοί συμπαγείς τελεστές $K_1 \in \mathcal{U}_0, K_2 \in \Delta(\mathcal{U})$ έτσι ώστε $K = K_1 + K_2$. Επί πλέον $K_2 = D(K)$.*

Απόδειξη Έστω $K_2 = D(K)$ και $K_1 = K - K_2$. Από την Πρόταση 3.5.10 έχουμε $K_1 = \lim(K - U_n(K))$. Όπως στο Θεώρημα 3.2.3 $K - U_n(K) \in \mathcal{U}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $K_1 \in \mathcal{U}_0$.

Η διάσπαση $K = K_1 + K_2$ στο $\mathcal{U}_0 + (\Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K})$ είναι μοναδική επειδή από την Πρόταση 3.5.3, $\Delta(\mathcal{U}) \cap \mathcal{K} \subset \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$, ενώ από το Θεώρημα 3.2.5, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$. □

Παρατήρηση 3.5.14 Έστω $F \in B(H_1, H_2)$ τελεστής πεπερασμένης τάξης και P, Q προβολές ώστε $Q^\perp FP = 0$. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $L = QFP + Q^\perp FP^\perp$ έχει τάξη το πολύ όσο ο F. Έχουμε $F = K_1 + L$ και $L = K_2 + K_3$ όπου $K_1 = QFP^\perp, K_2 = QFP, K_3 = Q^\perp FP^\perp$. Αν $rank(K_2) = n$ και $rank(K_3) = m$ τότε $rank(L) = n+m$. Έστω $K_2(x_i)$ με $P(x_i) = x_i, i = 1, ..., n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $K_3(y_j)$ με $P^\perp(y_j) = y_j, j = 1, ..., m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα επίσης. Αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $F(x_1), ..., F(x_n), F(y_1), ..., F(y_m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \xi_j F(y_j) = 0$$

τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_2(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \xi_j (K_1 + K_3)(y_j) = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_2(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \xi_j K_1(y_j) = -\sum_{j=1}^{m} \xi_j K_3(y_j).$$

Τα πρώτα από τα προηγούμενα διανύσματα ανήκουν στον χώρο $Q(H)$ ενώ τα δεύτερα στον $Q(H)^\perp$. Επομένως $\sum_{j=1}^{m} \xi_j K_3(y_j) = 0 \Rightarrow \xi_1 = ... = \xi_m = o$ και

άρα
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_2(x_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Πόρισμα 3.5.15 *Για κάθε πεπερασμένης τάξης τελεστή $F \in \mathcal{U}$ υπάρχουν μοναδικοί πεπερασμένης τάξης τελεστές $F_1 \in \mathcal{U}_0, F_2 \in \Delta(\mathcal{U})$ έτσι ώστε $F = F_1 + F_2$. Επί πλέον $rank F_2 \leq rank F$ και $F_2 = D(F)$.*

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε από την τελευταία παρατήρηση $\mathrm{rank}(U_n(F)) \leq \mathrm{rank}(F)$. Από αυτό αν $F_2 = \|\cdot\|\text{-}\lim U_n(F)$ τότε $\mathrm{rank}(F_2) \leq \mathrm{rank}(F)$ και $F_2 = D(F)$. Θέτοντας $F_1 = F - F_2$ παίρνουμε την επιθυμούμενη διάσπαση. $\square$

Πόρισμα 3.5.16 *Έστω $1 \leq p < \infty$ και $K \in \mathcal{U} \cap C_p$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί τελεστές $K_1 \in \mathcal{U}_0 \cap C_p, K_2 \in \Delta(\mathcal{U}) \cap C_p$ έτσι ώστε $K = K_1 + K_2$. Επί πλέον $\|K_2\|_p \leq \|K\|_p$.*

Απόδειξη Όπως στο Θεώρημα 3.5.13 $K = K_1 + D(K)$ όπου $K_1 \in \mathcal{U}_0$. Παρατηρούμε ότι $D(K) \in C_p$ και $\|D(K)\|_p \leq \|K\|_p$. $\square$

3.6 Διάσπαση ισχυρά ανακλαστικού masa προτύπου

Έστω $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_0$, $\Delta(\mathcal{U})$, ϕ, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ όπως στην παράγραφο 3.2 και $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$. Υποθέτουμε σε αυτή την παράγραφο ότι ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο.

Πρόταση 3.6.1 *Ο χώρος $\mathcal{U}_0$ είναι ισχυρά ανακλαστικός.*

Απόδειξη Έστω $T \in \mathcal{U}$, $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$. Επειδή ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο, από το Θεώρημα 2.4.3 υπάρχει ένα δίκτυο $(R_i) \subset [R_1(\mathcal{U})]$ έτσι ώστε $R_i \overset{wot}{\to} T$. Επομένως έχουμε ότι $\phi(P)R_iP^\perp \overset{wot}{\to} \phi(P)TP^\perp$. Επειδή $(\phi(P)R_iP^\perp) \subset [R_1(\mathcal{U}_0)]$ συμπεραίνουμε ότι $\phi(P)TP^\perp \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-wot}$. Αποδείξαμε ότι $\phi(P)\mathcal{U}P^\perp \subset [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-wot}$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$ και άρα $\mathcal{U}_0 = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-wot}$.
$\square$

Παρατήρηση 3.6.2 *Η διαγώνιος ενός ισχυρά ανακλαστικού masa προτύπου δεν είναι απαραίτητα ισχυρά ανακλαστική. Για παράδειγμα αν* $\mathcal{U}$ *είναι μία μη ατομική nest άλγεβρα, τότε η διαγώνιος* $\Delta(\mathcal{U})$ *δεν περιέχει τάξης 1 τελεστές.*

Πρόταση 3.6.3 (i) $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$.

(ii) $\mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$.

Απόδειξη Από την Πρόταση 3.5.2 έχουμε ότι $\mathcal{U}_0 \subset (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι $\mathcal{U} \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0 \subset \mathcal{U}_0$.

Αφού ο χώρος $\mathcal{U} \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$ είναι masa πρότυπο, όπως στο Θεώρημα 3.2.3 μπορούμε να τον διασπάσουμε στο ακόλουθο άθροισμα:

$$\mathcal{U} \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0 = \mathcal{U}_0 \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0 + \Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0.$$

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι $\Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0 \subset \mathcal{U}_0$. Από το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχουν προβολές $P_1 \in \mathcal{D}_1, P_2 \in \mathcal{D}_2$ έτσι ώστε $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = P_2 \Delta(\mathcal{U}) P_1$ και $\Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0 = P_2^\perp \Delta(\mathcal{U}) P_1^\perp$.

Έστω $T \in \Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U}))^*)^0$. Αφού ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο υπάρχει ένα δίκτυο $(R_i) \subset [R_1(\mathcal{U})]$ έτσι ώστε $R_i \overset{wot}{\to} T$. Από την Πρόταση 3.5.1 υπάρχουν $M_i \in [R_1(\Delta(\mathcal{U}))], L_i \in \mathcal{U}_0$ έτσι ώστε $R_i = M_i + L_i$. Επομένως $M_i + L_i \overset{wot}{\to} T$ και άρα $P_2^\perp M_i P_1^\perp + P_2^\perp L_i P_1^\perp \overset{wot}{\to} P_2^\perp T P_1^\perp$ από το οποίο προκύπτει $P_2^\perp L_i P_1^\perp \overset{wot}{\to} T$. Συνεπάγεται ότι $T \in \mathcal{U}_0$. $\square$

Θεώρημα 3.6.4 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 3.1.2,

$$\Delta(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{U}) \cap (R_1(\Delta(\mathcal{U})^*)^0 \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$$

και άρα από την Πρόταση 3.6.3 $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_0 \cap \Delta(\mathcal{U}) + [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. Επειδή $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \Delta(\mathcal{U})$ έχουμε ότι $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. Από την Πρόταση 3.5.3 και το Θεώρημα 3.2.5 το τελευταίο άθροισμα είναι ευθύ. $\square$

Οι Προτάσεις 3.2.8 και 3.2.9 έχουν τις ακόλουθες συνέπειες:

Πόρισμα 3.6.5 (i) *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

$a)$ $R_1(\Delta(\mathcal{U})) = 0$.

b) $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1$.

c) $\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

(ii) Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

a)$\Delta(\mathcal{U})$ *είναι ισχυρά ανακλαστικό.*

b) $\Delta(\mathcal{U})\,(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{A}_1) = 0$.

c) $(\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{A}_2)\,\Delta(\mathcal{U}) = 0$.

Σημειώνουμε ότι μία CSL άλγεβρα είναι ισχυρά ανακλαστική αν και μόνο αν ο σύνδεσμός της είναι «πλήρως επιμεριστικός» [36]. Τα Θεωρήματα 3.5.8, 3.6.4 και το Πόρισμα 3.4.3 δίνουν την ακόλουθη μορφή της διάσπασης του $\mathcal{U}$ όταν αυτό είναι ισχυρά ανακλαστική CSL άλγεβρα.

Πόρισμα 3.6.6 *Αν $\mathcal{S}$ είναι ένας πλήρως επιμεριστικός CSL σύνδεσμος που δρα σε ένα χώρο Χίλμπερτ H και $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{A : A \text{ άτομο } \text{ του } \mathcal{S}\}$ τότε:*

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{S}) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Alg}(\mathcal{S}))^{-w^*} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n B(H) A_n.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \chi(I)\delta(F_n)B(H_1, H_2)F_n$, όπου $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \{F : F \text{ άτομο } \text{ του } \mathcal{U}\}$ και

$$D : B(H_1, H_2) \longrightarrow B(H_1, H_2) : D(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(I)\delta(F_n)TF_n.$$

Πρόταση 3.6.7 *Έστω $\theta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ η προβολή επί του $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$ που ορίζεται από την διάσπαση στο Θεώρημα 3.6.4. Τότε $\theta = D|_{\mathcal{U}}$.*

Απόδειξη Αφού το $\mathcal{U}$ διασπάται ως ευθύ άθροισμα των masa προτύπων $\mathcal{U}_0$ και $[R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$, η απεικόνιση θ είναι απεικόνιση masa προτύπων, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\theta(D_2TD_1) = D_2\theta(T)D_1$$

για κάθε $T \in \mathcal{U}, D_1 \in \mathcal{D}_1, D_2 \in \mathcal{D}_2$. Επομένως αν $T \in \mathcal{U}$:

$$\theta(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(I)\delta(F_n)\theta(T)F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\chi(I)\delta(F_n)TF_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(I)\delta(F_n)TF_n = D(T).$$

□

Πρόταση 3.6.8 $\mathcal{U}_0 = \{T \in \mathcal{U} : \chi(I)\delta(F)TF = 0$ *για κάθε άτομο* F *του* $\mathcal{U}\}$.

Απόδειξη Έστω F άτομο του $\mathcal{U}$. Αν $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, όπως στην πρόταση 3.5.6 είτε $PF = F \Rightarrow P^{\perp}F = 0$ είτε $PF = 0 \Rightarrow \chi(I)\delta(F)\phi(P) = 0$. Επομένως $\chi(I)\delta(F)\phi(P)TP^{\perp}F = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_{1,\phi}$, $T \in \mathcal{U}$ και άρα $\chi(I)\delta(F)\mathcal{U}_0F = 0$ για κάθε άτομο F. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{U}_0 \subset \{T \in \mathcal{U} : \chi(I)\delta(F)TF = 0,$ για κάθε άτομο F στο $\mathcal{U}\}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $T \in \mathcal{U}$ έτσι ώστε $\chi(I)\delta(F)TF = 0$ για κάθε άτομο F στο $\mathcal{U}$. Από την προηγούμενη πρόταση $D(T) = 0$ και άρα $T \in \mathcal{U}_0$. □

Όπως σημειώσαμε και στην παράγραφο 1.4 η γραμμική θήκη των τελεστών τάξης 1 που περιέχονται σε ένα ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο είναι *wot* πυκνό υποσύνολο του προτύπου. Αυτό δεν είναι αληθές για την w^* τοπολογία. Για αυτό το θέμα παρουσιάζουμε την Πρόταση 3.6.10. Προηγούμενα χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.6.9 *Αν* $\mathcal{U}$ *είναι ανακλαστικό masa πρότυπο (όχι απαραίτητα ισχυρά ανακλαστικό) τότε:*

$$[R_1(\mathcal{U})]^{-w^*} = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*} \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}.$$

Απόδειξη Αφού $R_1(\Delta(\mathcal{U})) \subset \Delta(\mathcal{U})(I - Q_1)$ (Πρόταση 3.5.3), από το θεώρημα 3.2.5 το προηγούμενο άθροισμα είναι ευθύ.

Έχουμε
$$[R_1(\mathcal{U})]^{-w^*} \supset [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*} \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $T \in [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$. Υπάρχει ένα δίκτυο $(R_i) \subset [R_1(\mathcal{U})]$ ώστε $R_i \xrightarrow{w^*} T$. Όπως στην Πρόταση 3.5.1, μπορούμε να διασπάσουμε τον τελεστή R_i ως άθροισμα $L_i + M_i$ όπου $L_i \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-\|\cdot\|_1}$ και $M_i \in [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]$ για κάθε i.

Επειδή $M_i = D(R_i)$ (Πόρισμα 3.5.15) και η απεικόνιση D είναι w^*-συνεχής το δίκτυο (M_i) συγκλίνει σε κάποιο τελεστή $M \in [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. Επομένως $L_i = R_i - M_i \xrightarrow{w^*} T - M = L \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*}$. Έχουμε τώρα $T = L + M \in [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*} \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. $\square$

Πρόταση 3.6.10 *Αν $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό masa πρότυπο, τότε:*

$$\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*} \Leftrightarrow \mathcal{U}_0 = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*}.$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$. Τότε από το Θεώρημα 3.6.4 έχουμε $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.6.9 παίρνουμε $\mathcal{U}_0 = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*}$.

Αν αντίστροφα $\mathcal{U}_0 = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*}$ τότε ξανά από το Θεώρημα 3.6.4

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = [R_1(\mathcal{U}_0)]^{-w^*} \oplus [R_1(\Delta(\mathcal{U}))]^{-w^*} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*},$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.6.9. $\square$

Κεφάλαιο 4

TRO ισοδυναμία αλγεβρών

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε μία νέα σχέση ισοδυναμίας μεταξύ w^*-κλειστών αλγεβρών τελεστών. Έστω $\mathcal{A} \subset B(H), \mathcal{B} \subset B(K)$ w^* κλειστές άλγεβρες τελεστών, όχι απαραίτητα αυτοσυζυγείς. Λέμε ότι οι άλγεβρες αυτές είναι TRO ισοδύναμες αν υπάρχει ένα TRO $\mathcal{M} \subset B(H, K)$ ώστε

$$\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*} \text{ και } \mathcal{B} = [\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$

Αποδεικνύουμε στην παράγραφο 4.1 ότι η σχέση αυτή είναι πράγματι μία σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των w^* κλειστών αλγεβρών τελεστών. Αν οι άλγεβρες είναι αυτοσυζυγείς τότε υπάρχει (παράγραφος 4.1) ένα TRO $\mathcal{N}$, ενδεχόμενα μεγαλύτερο από το $\mathcal{M}$, που είναι «πρότυπο ισοδυναμίας» για τις άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ και τις καθιστά «Morita ισοδύναμες» με την έννοια του Rieffel [45]. Παρατήρησε ότι η TRO ισοδυναμία είναι γενίκευση της μοναδιαίας ισοδυναμίας αλγεβρών.

Αποδεικνύουμε στην παράγραφο 4.2 ότι δύο ανακλαστικές άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ένας $*$-ισομορφισμός μεταξύ των μεταθετών των διαγωνίων τους που απεικονίζει τον σύνδεσμο των αναλλοίωτων υπόχωρων της πρώτης άλγεβρας επί αυτού της δεύτερης. Αυτό κατά κάποιο τρόπο γενικεύει στην μη αυτοσυζυγή περίπτωση την παρατήρηση του Connes, βλέπε [10], ότι δύο άλγεβρες είναι Morita ισοδύναμες κατά Rieffel αν και μόνο αν έχουν πιστές αναπαραστάσεις των οποίων οι εικόνες έχουν ισόμορφους τους μεταθέτες τους.

Ειδικότερα στην παράγραφο 4.4 μελετάμε την περίπτωση της TRO ισοδυναμίας των CSL αλγεβρών που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ.

Με βάση το προαναφερθέν κριτήριο για το πότε δύο ανακλαστικές άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες το πρόβλημα έχει ως εξής:

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι CSL άλγεβρες σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ και $\phi : \mathrm{Lat}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$ ισομορφισμός συνδέσμων κάτω από ποιές συνθήκες η ϕ επεκτείνεται σε $*$- ισομορφισμό από την άλγεβρα $\mathrm{Lat}(\mathcal{A})''$ επί της άλγεβρας $\mathrm{Lat}(\mathcal{B})''$. Το ενδιαφέρον είναι ότι ενώ η ϕ επεκτείνεται πάντα ως $*$-ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $[\mathrm{Lat}(\mathcal{A})]^{-\|\cdot\|}, [\mathrm{Lat}(\mathcal{B})]^{-\|\cdot\|}$ (Λήμμα 4.4.7) δεν επεκτείνεται πάντα στις w^* κλειστές θήκες των τελευταίων αλγεβρών (Παρατήρηση 4.4.9, παραδείγματα 4.3.5, 4.3.6).
Αποδεικνύουμε στο Θεώρημα 4.4.13 ότι η ϕ επεκτείνεται στις w^* κλειστές θήκες και συνεπώς εξασφαλίζεται η TRO ισοδυναμία των αλγεβρών, αν και μόνο αν είναι ειδικού τύπου ισομορφισμός συνδέσμων: ισομορφισμός που σέβεται τα «συνεχή κομμάτια» των συνδέσμων. Αν δύο CSL άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες τότε έχουν στενή σχέση μεταξύ τους. Εξετάζουμε τις συνέπειες αυτής της σχέσης στην παράγραφο 4.6.

Επίσης στην εργασία αυτή ορίζουμε μία ασθενέστερη της TRO ισοδυναμίας σχέση μεταξύ w^* κλειστών αλγεβρών τελεστών, την spacial Morita ισοδυναμία (παράγραφος 4.3). Δύο w^* κλειστές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ καλούνται spacially Morita ισοδύναμες αν υπάρχουν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ πρότυπο $\mathcal{U}$ και $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ πρότυπο $\mathcal{V}$ ώστε $\mathcal{A} = [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*}$ και $\mathcal{B} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$. Δείχνουμε ότι δύο CSL άλγεβρες είναι spacially Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ισόμορφους συνδέσμους. Σε αυτή την περίπτωση, αν η μία άλγεβρα είναι «συνθετική» τότε είναι και η άλλη.

Τέλος επεκτείνοντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3 παρουσιάζουμε στην παράγραφο 4.5 ένα θεώρημα που χαρακτηρίζει τα ανακλαστικά πρότυπα πάνω σε μεγιστικές αβελιανές αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών με ουσιώδη διαγώνιο.

4.1 TRO ισοδυναμία αλγεβρών

Το παρακάτω θεώρημα απομονώνει κάποιες συνέπειες του Θεωρήματος 2.10 στο [32] και θα μας είναι πολύ χρήσιμο στην συνέχεια.

Θεώρημα 4.1.1 *(i) Ένα TRO $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες αν και μόνο αν οι άλγεβρες $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$ $[\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$ περιέχουν τους ταυτοτικούς τελεστές.*

(ii) Αν το $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO και $\chi = \mathrm{Map}\mathcal{M}$ τότε

$$\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})'), \mathcal{S}_{2,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{M}\mathcal{M}^*)')$$

και η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_{1,\chi}} : \mathcal{S}_{1,\chi} \to \mathcal{S}_{2,\chi}$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων με αντίστροφο την απεικόνιση $\chi^*|_{\mathcal{S}_{2,\chi}}$.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w^* κλειστές άλγεβρες που δρούν στους χώρους Χίλμπερτ H_1 και H_2 αντίστοιχα. Αν υπάρχει TRO $\mathcal{M} \subset B(H_1, H_2)$ ώστε $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{B} = [\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$ γράφουμε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Λέμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι **TRO ισοδύναμες** αν υπάρχει TRO $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$.*

Ένα απλό παράδειγμα TRO ισοδύναμων, όχι απαραίτητα αυτοσυζυγών αλγεβρών, είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε τις μοναδιαίες w^* κλειστές άλγεβρες

$$\mathcal{A} \subset B(H) \text{ και } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \subset B(H \oplus H).$$

Έστω το TRO

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \Delta(\mathcal{A}) \\ \Delta(\mathcal{A}) \end{bmatrix} \subset B(H, H \oplus H).$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$.

Πρόταση 4.1.2 *Έστω $\mathcal{A} \subset B(H_1), \mathcal{B} \subset B(H_2)$ w^* κλειστές άλγεβρες. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες.

(ii) Υπάρχει ουσιώδες TRO $\mathcal{M} \subset B(H_1, H_2)$ έτσι ώστε $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$.

Αν το (ii) ισχύει τότε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{N} \subset B(H_1, H_2)$ TRO ώστε

$$\mathcal{A} = [\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}]^{-w^*} \text{ και } \mathcal{B} = [\mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{N}^*]^{-w^*}.$$

Αν P είναι η προβολή επί του χώρου $\ker\mathcal{N}$ και Q η προβολή επί του $\ker\mathcal{N}^*$, τότε ο χώρος $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \oplus QB(H_1, H_2)P$ είναι ουσιώδες TRO που ικανοποιεί τις σχέσεις $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO ώστε $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$, τότε $[\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*} \subset \mathcal{A}$ και επειδή $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$, έχουμε

$$\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \Rightarrow [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}\mathcal{A}[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} \subset [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}.$$

Από το γεγονός ότι $I \in [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$ έπεται ότι $\mathcal{A} \subset [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$.

Ανάλογα μπορεί να δειχθεί ότι $\mathcal{B} = [\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$. $\square$

Θα δείξουμε ότι η TRO ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας. Χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα που θα είναι χρήσιμο και σε άλλα σημεία της εργασίας αυτής.

Λήμμα 4.1.3 *Έστω $\mathcal{S}_i$ σύνολο προβολών στον χώρο Χίλμπερτ $H_i, i = 1, 2$, $\chi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ απεικόνιση επί του $\mathcal{S}_2$, και*

$$\mathcal{M} = \{T \in B(H_1, H_2) : TL = \chi(L)T \ \ \text{για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Παρατήρησε ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ανακλαστικό TRO [32]. Επί πλέον αν έχουμε την πληροφορία ότι είναι ουσιώδες, τότε $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_1)'$ και $[\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*} = (\mathcal{S}_2)'$.

Απόδειξη Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{M}(\mathcal{S}_1)' \subset \mathcal{M}$. Επομένως αν P είναι προβολή

$$(\mathcal{S}_1)'\mathcal{M}^*P(H_2) \subset \mathcal{M}^*P(H_2) \Rightarrow (\mathcal{S}_1)'\phi^*(P)(H_1) \subset \phi^*(P)(H_1).$$

Συνεπάγεται ότι $\phi^*(P) \in (\mathcal{S}_1)''$. Αποδείξαμε ότι $\mathcal{S}_{2,\phi^*} \subset (\mathcal{S}_1)''$ από το οποίο έχουμε $\mathcal{S}_{1,\phi} \subset (\mathcal{S}_1)''$ και συνεπώς $(\mathcal{S}_{1,\phi})' \supset (\mathcal{S}_1)'$. Επειδή το $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO τότε από το Θεώρημα 4.1.1 προκύπτει ότι $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_{1,\phi})'$. Αποδείξαμε ότι $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} \supset (\mathcal{S}_1)'$. Επειδή $\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset (\mathcal{S}_1)'$ έχουμε τελικά την ισότητα $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_1)'$.
Παρόμοια επειδή η χ απεικονίζει επί του $\mathcal{S}_2$ παίρνουμε $\mathcal{M}^*(\mathcal{S}_2)' \subset \mathcal{M}^*$ και χρησιμοποιώντας ανάλογα με πριν επιχειρήματα επιτυγχάνουμε την ισότητα $[\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*} = (\mathcal{S}_2)'$. $\square$

Θεώρημα 4.1.4 *Η TRO ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη Έχουμε μόνο να δείξουμε την μεταβατικότητα. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ w^* κλειστές άλγεβρες και $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ουσιώδη TRO's έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{C}$.
Έστω $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$, τότε η απεικόνιση χ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων

από τον $\mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})')$ επί του $\mathcal{P}((\mathcal{M}\mathcal{M}^*)')$ (Θεώρημα 4.1.1).
Έστω $\mathcal{S}_2 = \mathcal{P}((\mathcal{M}\mathcal{M}^*)') \cap \mathcal{P}((\mathcal{N}^*\mathcal{N})')$ τότε $(\mathcal{S}_2)' = ((\mathcal{M}\mathcal{M}^*) \cup (\mathcal{N}^*\mathcal{N}))''$. Επειδή $\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$ και $\mathcal{N}^*\mathcal{N}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{N}^*\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ συνεπάγεται ότι $(\mathcal{S}_2)'\mathcal{B}(\mathcal{S}_2)' \subset \mathcal{B}$.

Έστω $\mathcal{S}_1 = \chi^{-1}(\mathcal{S}_2)$ και $\mathcal{Z} = \{T : TL = \chi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}$. Επειδή $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_{1,\chi}$ έχουμε ότι $\mathcal{M} \subset \mathcal{Z}$ και άρα το TRO $\mathcal{Z}$ είναι ουσιώδες. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $[\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*]^{-w^*} = (\mathcal{S}_2)'$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{B}$. Συνεπώς $\mathcal{M}^*\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ και άρα $\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ από το οποίο προκύπτει

$$[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}[\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}]^{-w^*}[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} \subset \mathcal{A}.$$

Επειδή το TRO $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες συνεπάγεται ότι $[\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}]^{-w^*} \subset \mathcal{A}$.

Επειδή $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*} \subset [\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}]^{-w^*}$ παίρνουμε $\mathcal{A} = [\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}]^{-w^*}$. Από αυτό επειδή $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{B}$ έχουμε $\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}[\mathcal{Z}^*\mathcal{B}\mathcal{Z}]^{-w^*}\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{B}$. Συνεπάγεται τελικά από την Πρόταση 4.1.2 ότι $\mathcal{B} = [\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{Z}^*]^{-w^*}$.

Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{N})$, τότε η ϕ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων απο τον $\mathcal{P}((\mathcal{N}^*\mathcal{N})')$ επί του $\mathcal{P}((\mathcal{N}\mathcal{N}^*)')$ (Θεώρημα 4.1.1).
Ορίζουμε $\mathcal{Y} = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_2\}$. Επειδή $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_{1,\phi}$ έχουμε ότι $\mathcal{N} \subset \mathcal{Y}$ και άρα το TRO $\mathcal{Y}$ είναι ουσιώδες. Από το προηγούμενο λήμμα $[\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_2)'$. Επίσης, χρησιμοποιώντας παρόμοια με πριν επιχειρήματα έχουμε

$$\mathcal{C} = [\mathcal{Y}\mathcal{B}\mathcal{Y}^*]^{-w^*}, \mathcal{B} = [\mathcal{Y}^*\mathcal{C}\mathcal{Y}]^{-w^*}.$$

Έστω $\mathcal{L} = [\mathcal{Y}\mathcal{Z}]^{-w^*}$. Επειδή $[\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_2)' = [\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*]^{-w^*}$ έχουμε $\mathcal{Y}\mathcal{Z}\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{Y}$. Συνεπάγεται ότι $(\mathcal{Y}\mathcal{Z})(\mathcal{Y}\mathcal{Z})^*(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) = \mathcal{Y}\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}\mathcal{Z}$ και άρα $\mathcal{L}\mathcal{L}^*\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Αποδείξαμε ότι ο χώρος $\mathcal{L}$ είναι TRO. Είναι δε ουσιώδες αφού οι χώροι $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ είναι ουσιώδη TRO's.

Στην συνέχεια έχουμε $(\mathcal{Y}\mathcal{Z})\mathcal{A}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})^* = \mathcal{Y}\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}^* \subset \mathcal{Y}\mathcal{B}\mathcal{Y}^* \subset \mathcal{C}$ και άρα $\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{L}^* \subset \mathcal{C}$.

Επίσης $\mathcal{Y}\mathcal{B}\mathcal{Y}^* \subset \mathcal{Y}[\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{Z}^*]^{-w^*}\mathcal{Y}^* \subset [\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{L}^*]^{-w^*}$. Επειδή $\mathcal{C} = [\mathcal{Y}\mathcal{B}\mathcal{Y}^*]^{-w^*}$ έχουμε $\mathcal{C} = [\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{L}^*]^{-w^*}$. Αν δείξουμε ότι $\mathcal{L}^*\mathcal{L}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}\mathcal{L}^*\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, μετά εύκολα συνεπάγεται ότι $\mathcal{L}^*\mathcal{C}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ και επομένως απο το 4.1.2 έχουμε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{C}$.

Έχουμε $(\mathcal{Y}\mathcal{Z})^*(\mathcal{Y}\mathcal{Z})\mathcal{A} = \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}\mathcal{Z}\mathcal{A}$. Αλλά $[\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}]^{-w^*} = [\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*]^{-w^*}$. Επομένως $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}^*\mathcal{Z}$ και συνεπώς $(\mathcal{Y}\mathcal{Z})^*(\mathcal{Y}\mathcal{Z})\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}^*\mathcal{Z}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{L}^*\mathcal{L}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Παρόμοια έχουμε $\mathcal{A}\mathcal{L}^*\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση 4.1.5 *Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες άλγεβρες και οι $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ είναι επίσης TRO ισοδύναμες άλγεβρες τότε υπάρχουν $\mathcal{Z}, \mathcal{Y}$ ουσιώδη TRO's έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{Z}}{\sim} \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \overset{\mathcal{Y}}{\sim} \mathcal{C}$, $[\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}]^{-w^*} = [\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*]^{-w^*}$, ο χώρος $\mathcal{L} = [\mathcal{Y}\mathcal{Z}]^{-w^*}$ είναι ουσιώδες TRO και $\mathcal{A} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{C}$.*

Πρόταση 4.1.6 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w^* κλειστές άλγεβρες και $\mathcal{M}$ ένα ουσιώδες TRO ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Τότε $\Delta(\mathcal{A}) \overset{\mathcal{M}}{\sim} \Delta(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι $\mathcal{M}^*\Delta(\mathcal{B})\mathcal{M} \subset \Delta(\mathcal{A})$ και $\mathcal{M}\Delta(\mathcal{A})\mathcal{M}^* \subset \Delta(\mathcal{B})$. □

Θεώρημα 4.1.7 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μοναδιαίες w^* κλειστές άλγεβρες, $\mathcal{M}$ ένα ουσιώδες TRO ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$ και $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Τότε η απεικόνιση $\chi : pr(\Delta(\mathcal{A})') \to pr(\Delta(\mathcal{B})')$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων και $\chi(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη Από την παραπάνω πρόταση έχουμε $\Delta(\mathcal{A}) \overset{\mathcal{M}}{\sim} \Delta(\mathcal{B})$. Από το Πόρισμα 5.9 στο [32] έπεται ότι $\chi(\mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})')) = \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{B})')$. Επειδή $\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \Delta(\mathcal{A})$ έχουμε $\mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})') \supset \mathcal{P}((\Delta(\mathcal{A}))')$. Από το Θεώρημα 4.1.1 συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\chi : \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})') \to \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{B})')$ είναι ορθοισομορφισμός.

Αν E, F είναι προβολές έτσι ώστε $E\mathcal{A}F = 0$ τότε $E\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}F = 0$ και άρα $E\mathcal{M}^*\mathrm{Ref}(\mathcal{B})\mathcal{M}F = 0$. Εξάγουμε το συμπέρασμα ότι

$$\mathcal{M}^*\mathrm{Ref}(\mathcal{B})\mathcal{M} \subset \mathrm{Ref}(\mathcal{A}).$$

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathcal{M}\mathrm{Ref}(\mathcal{A})\mathcal{M}^* \subset \mathrm{Ref}(\mathcal{B})$ και συνεπώς $\mathrm{Ref}(\mathcal{A}) \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathrm{Ref}(\mathcal{B})$. Επειδή $\mathrm{Lat}(\mathrm{Ref}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{A})$ και ανάλογα για την άλγεβρα $\mathcal{B}$, χρησιμοποιώντας ξανά το Πόρισμα 5.9 στο [32] παίρνουμε $\chi(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$. □

Παρατήρηση 4.1.8 (i) Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες w^* κλειστές άλγεβρες και η $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική τότε και η $\mathcal{B}$ είναι ανακλαστική. Πράγματι αν $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$ όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει ότι $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathrm{Ref}(\mathcal{B})$ και άρα $\mathrm{Ref}\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

(ii) Ένας ορθοισομορφισμός $\chi : pr(\mathcal{C}) \to pr(\mathcal{D})$, όπου οι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι άλγεβρες von Neumann δεν επεκτείνεται ως $*$-μορφισμός μεταξύ των αλγεβρών αυτών. Για παράδειγμα επέλεξε [30] μη αβελιανές $*$ αντι-ισόμορφες άλγεβρες von Neumann $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ·ενα $*$ αντι-ισομορφισμό και όρισε $\chi = \theta|_{pr(\mathcal{C})}$. Σύγκρινε τώρα τα Θεωρήματα 4.1.7 και 4.2.3.

Πρόταση 4.1.9 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μοναδιαίες w^* κλειστές άλγεβρες και $\mathcal{M}$ ένα ουσιώδες TRO έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Τότε υπάρχει ένα TRO $\mathcal{N}$ που περιέχει το $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{B}$ και $\Delta(\mathcal{A}) = [\mathcal{N}^*\mathcal{N}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}) = [\mathcal{N}\mathcal{N}^*]^{-w^*}$.*

Απόδειξη Έστω $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Από το Θεώρημα 4.1.7 έπεται ότι $\chi(\mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})') = \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{B})')$. Έστω $\mathcal{N} = \{T : TL = \chi(L)T \ \text{ για κάθε } L \in \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})')\}$.
Επειδή $\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})') \supset \mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})')$ έχουμε ότι $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ και επομένως ο χώρος $\mathcal{N}$ είναι ουσιώδες TRO.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.3 έχουμε $\Delta(\mathcal{A}) = [\mathcal{N}^*\mathcal{N}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}) = [\mathcal{N}\mathcal{N}^*]^{-w^*}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} = [\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}]^{-w^*}$. Επειδή $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}$ παίρνουμε $\mathcal{A} \subset [\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}]^{-w^*}$. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{N}^* \subset \mathcal{B} &\Rightarrow \mathcal{M}^*\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \end{aligned}$$

και άρα $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} \subset \mathcal{A}$.
Συνεπάγεται ότι $\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ από το οποίο παίρνουμε την ισότητα $\mathcal{A} = [\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}]^{-w^*}$.
Τώρα αφού $\mathcal{N}\mathcal{N}^* \subset \mathcal{B}$ έχουμε $\mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{N}^* = \mathcal{N}[\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}]^{-w^*}\mathcal{N}^* \subset \mathcal{B}$. Από την Πρόταση 4.1.2 προκύπτει ότι $\mathcal{A} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{B}$. $\square$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε μετά από την τελευταία πρόταση ότι αν οι μοναδιαίες άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες τότε οι διαγώνιοι τους $\Delta(\mathcal{A})$ και $\Delta(\mathcal{B})$ είναι Morita ισοδύναμες κατά Rieffel [45].

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι αν δύο άλγεβρες, όχι απαραίτητα μοναδιαίες, είναι TRO ισοδύναμες τότε υπάρχουν μοναδιαίες TRO ισοδύναμες άλγεβρες που περιέχουν τις προηγούμενες ως ιδεώδη.

Πρόταση 4.1.10 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μη μοναδιαίες w^* κλειστές άλγεβρες και $\mathcal{M}$ ένα ουσιώδες TRO έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Αν $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = [\mathcal{A}, \mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}} = [\mathcal{B}, \mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$, τότε*

(i) Οι χώροι $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ είναι μοναδιαίες άλγεβρες.

(ii) Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ (αντιστ. $\mathcal{B}$) είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ (αντιστ. $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$).

(iii)$\mathcal{A}_\mathcal{M} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}_\mathcal{M}$.

(iv) Υπάρχει ένα ουσιώδες TRO $\mathcal{N}$ *που περιέχει το* $\mathcal{M}$ *έτσι ώστε* $\mathcal{A} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{B}$, $\Delta(\mathcal{A}_\mathcal{M}) = [\mathcal{N}^*\mathcal{N}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}_\mathcal{M}) = [\mathcal{N}\mathcal{N}^*]^{-w^*}$. *(Παρατήρησε ότι* $\mathcal{A}_\mathcal{M} = \mathcal{A}_\mathcal{N}$ *και* $\mathcal{B}_\mathcal{M} = \mathcal{B}_\mathcal{N}$*).*

Απόδειξη Οι ισχυρισμοί $(i), (ii)$ είναι συνέπειες των συνθηκών: $\mathcal{A}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.
Επίσης, αφού $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$ και $\mathcal{M}(\mathcal{M}^*\mathcal{M})\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}\mathcal{M}^*$ εύκολα προκύπτει ότι $\mathcal{M}\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}_\mathcal{M}$. Ανάλογα έχουμε $\mathcal{M}\mathcal{B}_\mathcal{M}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{A}_\mathcal{M}$.

(iv) Επειδή $\mathcal{A}_\mathcal{M} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}_\mathcal{M}$ από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα ουσιώδες TRO $\mathcal{N}$ που περιέχει το $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{A}_\mathcal{M} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{B}_\mathcal{M}$, $\Delta(\mathcal{A}_\mathcal{M}) = [\mathcal{N}^*\mathcal{N}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}_\mathcal{M}) = [\mathcal{N}\mathcal{N}^*]^{-w^*}$. Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \overset{\mathcal{N}}{\sim} \mathcal{B}$.
Επειδή $\mathcal{N}\mathcal{N}^* \subset \mathcal{B}_\mathcal{M}$ και η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}_\mathcal{M}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{N}^* \subset \mathcal{B} &\Rightarrow \mathcal{M}^*\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Από το τελευταίο έχουμε $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N}[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} \subset \mathcal{A}$ και άρα $\mathcal{N}^*\mathcal{B}\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί $\mathcal{N}^*\mathcal{A}\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$. $\square$

Πρόταση 4.1.11 *Έστω* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w^* *κλειστές άλγεβρες και* $\mathcal{M}$ *ουσιώδες TRO ώστε* $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. *Αν* $\mathcal{J}$ *είναι* w^* *κλειστό* $\mathcal{A}$*-πρότυπο τότε ο χώρος* $F(\mathcal{J}) = [\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$ *είναι* $\mathcal{B}$*-πρότυπο και* $\mathcal{J} \overset{\mathcal{M}}{\sim} F(\mathcal{J})$. *Η απεικόνιση* F *είναι* $1-1$ *και επί μεταξύ των* w^* *κλειστών προτύπων της άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *και αυτών της* $\mathcal{B}$. *Επί πλέον ο περιορισμός της* F *στο σύνολο των* w^* *κλειστών διπλών ιδεωδών της άλγεβρας* $\mathcal{A}$ *απεικονίζει επί αυτών της* $\mathcal{B}$.

Απόδειξη Επειδή $\mathcal{A}\mathcal{M}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ έχουμε ότι $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^*$. Επομένως $\mathcal{B}F(\mathcal{J}) \subset F(\mathcal{J})$. Παρόμοια ισχύει ότι $F(\mathcal{J})\mathcal{B} \subset F(\mathcal{J})$.
Αν $\mathcal{I}$ είναι w^* κλειστό πρότυπο της $\mathcal{B}$, ο χώρος $\mathcal{J} = [\mathcal{M}^*\mathcal{I}\mathcal{M}]^{-w^*}$ είναι πρότυπο της άλγεβρας $\mathcal{A}$ και $F(\mathcal{J}) = \mathcal{I}$. Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση F είναι επί. Εύκολα ελέγχεται ότι η F είναι $1-1$. Επίσης παρατήρησε ότι αν το $\mathcal{J}$ είναι w^* κλειστό διπλό ιδεώδες της άλγεβρας $\mathcal{A}$ τότε ο χώρος $F(\mathcal{J})$ είναι w^* κλειστό διπλό ιδεώδες της άλγεβρας $\mathcal{B}$. $\square$

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται εύκολα.

Πρόταση 4.1.12 *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w^* κλειστές άλγεβρες και $\mathcal{M}$ ένα ουσιώδες TRO έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Συμβολίζουμε $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ (αντιστ. $\mathcal{K}(\mathcal{B})$) το σύνολο των συμπαγών τελεστών της άλγεβρας $\mathcal{A}$(αντιστ. $\mathcal{B}$), $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ (αντιστ. $\mathcal{F}(\mathcal{B})$) το σύνολο των τελεστών πεπερασμένης τάξης της άλγεβρας $\mathcal{A}$(αντιστ. $\mathcal{B}$), $R_1(\mathcal{A})$ (αντιστ. $R_1(\mathcal{B})$) το σύνολο των τελεστών πρώτης τάξης της άλγεβρας $\mathcal{A}$(αντιστ. $\mathcal{B}$). Τότε $\mathcal{K}(\mathcal{A})^{-w^*} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{K}(\mathcal{B})^{-w^*}$, $\mathcal{F}(\mathcal{A})^{-w^*} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{F}(\mathcal{B})^{-w^*}$, $[R_1(\mathcal{A})]^{-w^*} \overset{\mathcal{M}}{\sim} [R_1(\mathcal{B})]^{-w^*}$.*

4.2 TRO ισοδύναμες ανακλαστικές άλγεβρες

Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να ορίσει ικανές και αναγκαίες συνθήκες της ύπαρξης TRO ισοδυναμίας μεταξύ ανακλαστικών αλγεβρών.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{E}$ άλγεβρες von Neumann, $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας $*$ ισομορφισμός και*

$$\mathcal{M} = \{T : TA = \theta(A)T \ \ \text{για κάθε } A \in \mathcal{C}\}.$$

Τότε ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ένα ουσιώδες TRO.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{D} = \{A \oplus \theta(A) : A \in \mathcal{C}\}$. Από το Θεώρημα 2.2.3 έπεται ότι η θ είναι w^* συνεχής. Από αυτό προκύπτει ότι η $\mathcal{D}$ είναι άλγεβρα von Neumann. Ο μεταθέτης της $\mathcal{D}$ είναι η άλγεβρα

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{C}' & \mathcal{M}^* \\ \mathcal{M} & \mathcal{E}' \end{array} \right].$$

Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Επειδή $\mathcal{E}'\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ έχουμε $\phi(I)^{\perp}\mathcal{E}'\phi(I) = 0$ και άρα $\phi(I) \in \mathcal{E}$. Έστω $P = 0 \oplus \phi(I)^{\perp}$. Επειδή $\phi(I)\mathcal{M} = \mathcal{M}$ και $\phi(I) \in \mathcal{E}$ μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι $P^{\perp}\mathcal{D}'P = 0$ και άρα $P \in \mathcal{D}$. Συνεπάγεται ότι η προβολή P είναι της μορφής $A \oplus \theta(A)$ για κάποιο τελεστή $A \in \mathcal{C}$ και επομένως $\phi(I) = I$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\phi^*(I) = I$ και συνεπώς ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO . $\square$

Δίνουμε τώρα μία νέα απόδειξη της παρατήρησης του Connes (βλέπε την εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου) που μας δίνει την επί πλέον πληροφορία ότι ο ισομορφισμός μεταξύ των μεταθετών των αλγεβρών επεκτείνει το «Map» του «προτύπου της Morita ισοδυναμίας». Αυτό το γεγονός θα είναι χρήσιμο παρακάτω.

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω $\mathcal{A},\mathcal{B}$ άλγεβρες von Neumann, $\mathcal{M}$ TRO ώστε $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \mathcal{B} = [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$ και $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\theta : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ που επεκτείνει την απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{P}(\mathcal{A}')}$.*
Αντίστροφα αν οι άλγεβρες $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ είναι $*$-ισόμορφες τότε οι άλγεβρες $\mathcal{A},\mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{L} = \{L \oplus \chi(L) : L \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')\}$. Από το Θεώρημα 4.1.1 έχουμε ότι

$$\mathcal{M} = \{T : TL = \chi(L)T \ \text{ για κάθε } L \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')\}$$

μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}' = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{M}^* \\ \mathcal{M} & \mathcal{B} \end{bmatrix}.$$

Επομένως η άλγεβρα $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα von Neumann που δρα στο ευθύ άθροισμα των αντίστοιχων χώρων Χίλμπερτ.

Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι ο μεταθέτης της άλγεβρας $\mathcal{C}$ είναι

$$\{\begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} : T \in \mathcal{A}', S \in \mathcal{B}' \ \text{ έτσι ώστε } \ MT = SM \text{ για κάθε } M \in \mathcal{M}\}.$$

Έστω

$$\pi_1 : \mathcal{C}' \to \mathcal{A}' : \begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} \to T$$

$$\pi_2 : \mathcal{C}' \to \mathcal{B}' : \begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} \to S.$$

Θα δείξουμε ότι οι απεικονίσεις π_1, π_2 είναι επί. Παρατηρούμε ότι η άλγεβρα $\pi_1(\mathcal{C}')$ είναι von Neumann, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\pi_1(\mathcal{C}')' \subset \mathcal{A}$.
Έστω $A \in \pi_1(\mathcal{C}')'$ τότε $AT = TA$ για κάθε $\begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} \in \mathcal{C}'$. Επομένως
$\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$ για κάθε $\begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} \in \mathcal{C}'$
και άρα $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} \in \mathcal{C}$, από το οποίο προκύπτει $A \in \mathcal{A}$.

Έστω $\begin{bmatrix} T & O \\ O & S_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T & O \\ O & S_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}'$ τότε $S_1M = MT = S_2M$ για κάθε $M \in \mathcal{M}$. Επειδή το TRO $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες έχουμε $S_1 = S_2$.

Το συμπέρασμα είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $\theta : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ από τον τύπο
$$\theta(T) = S \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T & O \\ O & S \end{bmatrix} \in \mathcal{C}'.$$
Η απεικόνιση θ είναι $*$-ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι η θ είναι επέκταση της $\chi|_{\mathcal{P}(\mathcal{A}')}$. Αν $L \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$ έχουμε $ML = \theta(L)M$ για κάθε $M \in \mathcal{M}$. Από αυτό προκύπτει $\theta(L)^\perp \mathcal{M} L = 0$ και άρα $\chi(L) \leq \theta(L)$. Επίσης $\theta(L)\mathcal{M}L^\perp = 0$ και συνεπώς $\chi(L^\perp) \leq \theta(L)^\perp$. Επειδή το TRO $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες από το Θεώρημα 4.1.1 συνεπάγεται ότι $\chi(L^\perp) = \chi(L)^\perp$ και επομένως $\theta(L) = \chi(L)$.

Αντίστροφα, έστω $\theta : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ ένας $*$-ισομορφισμός και
$$\mathcal{M} = \{T : TA = \theta(A)T \text{ για κάθε } T \in \mathcal{A}'\}.$$
Ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO από το προηγούμενο λήμμα. Είναι προφανές ότι $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$. □

Η προηγούμενη απόδειξη ανήκει στον Α. Κατάβολο.

Θεώρημα 4.2.3 *Οι ανακλαστικές άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\theta : \Delta(\mathcal{A})' \to \Delta(\mathcal{B})'$ έτσι ώστε $\theta(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη Έστω ότι οι ανακλαστικές άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες. Από την Πρόταση 4.1.9 υπάρχει ένα ουσιώδες TRO $\mathcal{M}$ έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$ και $\Delta(\mathcal{A}) = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}) = [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει ένας $*$-ισομορφισμός $\theta : \Delta(\mathcal{A})' \to \Delta(\mathcal{B})'$ που επεκτείνει την απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{P}(\Delta(\mathcal{A})')}$. Από το Θεώρημα 4.1.7
$$\theta(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \chi(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B}).$$
Αντίστροφα, έστω $\theta : \Delta(\mathcal{A})' \to \Delta(\mathcal{B})'$ ένας $*$-ισομορφισμός έτσι ώστε
$$\theta(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$$
και
$$\mathcal{M} = \{T : TA = \theta(A)T \text{ για κάθε } T \in \Delta(\mathcal{A})'\}.$$
Από το Λήμμα 4.2.1 ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ένα ουσιώδες TRO. Απομένει να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$. Έστω $A \in \mathcal{A}, L \in \mathrm{Lat}(\mathcal{A}), M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ τότε
$$M_1AM_2^*\theta(L) = M_1ALM_2^* = M_1LALM_2^* = \theta(L)M_1AM_2^*\theta(L).$$

Επομένως $M_1 A M_2^* \in \mathcal{B}$. Αποδείξαμε ότι $\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^* \subset \mathcal{B}$. Παρόμοια έχουμε $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$. $\square$

Παρατήρηση 4.2.4 *Αν οι άλγεβρες δεν είναι ανακλαστικές, δεν ισχύει το προηγούμενο θεώρημα. Πάρε για παράδειγμα $\mathcal{A}$ να είναι μία CSL άλγεβρα έτσι ώστε η άλγεβρα $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}_{min}$ να περιέχεται γνήσια σε αυτήν. Γνωρίζουμε ότι $\Delta(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{B})$ και $\mathrm{Lat}\mathcal{A} = \mathrm{Lat}\mathcal{B}$. Αλλά οι άλγεβρες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δεν μπορεί να είναι TRO ισοδύναμες αφού η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική αλλά η $\mathcal{B}$ όχι. (Βλέπε παρατήρηση 4.1.8 (i)).*

4.3 TRO ισοδυναμία και spacial Morita ισοδυναμία

Ο ακόλουθος ορισμός ανήκει στον I. Todorov (προσωπική κοινοποίηση).

Ορισμός 4.3.1 *Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ και $\mathcal{A} \subset B(H_1), \mathcal{B} \subset B(H_2)$ w^* κλειστές άλγεβρες. Αν υπάρχουν χώροι $\mathcal{U} \subset B(H_1, H_2), \mathcal{V} \subset B(H_2, H_1)$ έτσι ώστε $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, $[\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} = \mathcal{A}$, $[\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*} = \mathcal{B}$ τότε λέμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι **spacial Morita ισοδύναμες** και το σύστημα $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ καλείται **spacial Morita σύστημα**.*

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ ένα spacial Morita σύστημα και υποθέτουμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι μοναδιαίες. Αν $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}), \psi = \mathrm{Map}(\mathcal{V})$ τότε*

$(i)\mathcal{S}_{1,\phi} = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}), \mathcal{S}_{2,\phi} = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$ και άρα η απεικόνιση $\phi : \mathrm{Lat}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων.

$(ii)\psi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{B})} = (\phi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{A})})^{-1}$

Απόδειξη Έστω $\zeta_1 = \mathrm{Map}(\mathcal{A})$ και $\zeta_2 = \mathrm{Map}(\mathcal{B})$. Επειδή $[\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*} = \mathcal{B}$ παίρνουμε $\zeta_2 = \phi \circ \psi$ και άρα $\zeta_2(\mathcal{P}(B(H_2))) \subset \mathcal{S}_{2,\phi}$ η ισοδύναμα $\mathrm{Lat}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}_{2,\phi}$. Επειδή $\zeta_1 = \psi \circ \phi$ για τυχούσα προβολή $P \in \mathcal{P}(B(H_1))$ έχουμε

$$\mathcal{U}\mathcal{V}\phi(P)(H_2) \subset \mathcal{U}\psi(\phi(P))(H_1) = \mathcal{U}\zeta_1(P)(H_1).$$

Αλλά

$$\mathcal{U}\mathcal{A}P \subset \mathcal{U}P \Rightarrow \mathcal{U}\zeta_1(P)(H_1) \subset \phi(P)(H_2) \Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{V}\phi(P)(H_2) \subset \phi(P)(H_2).$$

Αποδείξαμε ότι

$$\phi(P)^{\perp}\mathcal{U}\mathcal{V}\phi(P) = 0 \Rightarrow \phi(P)^{\perp}\mathcal{B}\phi(P) = 0$$

για κάθε $P \in \mathcal{P}(B(H_1))$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{S}_{2,\phi} \subset \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$ από το οποίο τελικά προκύπτει ισότητα.

Επειδή η τετράδα $(\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{U}^*, \mathcal{V}^*)$ είναι ένα Morita σύστημα, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα επιχειρήματα έχουμε

$$\mathcal{S}_{2,\phi^*} = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}^*) \Rightarrow \mathcal{S}_{1,\phi} = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}).$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathrm{Lat}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$ είναι 1-1, επί και διατηρεί την διάταξη. Επομένως είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Επειδή $\psi \circ \phi = \zeta_1$ συνεπάγεται ότι $\psi \circ (\phi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{A})}) = Id|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{A})}$. Παρόμοια έχουμε $\phi \circ (\psi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{B})}) = Id|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{B})}$. Το τελικό μας συμπέρασμα είναι ότι $\psi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{B})} = (\phi|_{\mathrm{Lat}(\mathcal{A})})^{-1}$. □

Παρατήρηση 4.3.2 *(i) Αν οι μοναδιαίες άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι spacial Morita ισοδύναμες και η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ανακλαστική τότε και η $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική. Πράγματι έστω $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ ένα spacial Morita σύστημα. Αν οι E, F είναι προβολές έτσι ώστε $E\mathcal{B}F = 0$, έχουμε*

$$E\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U}\mathcal{V}F = 0 \Rightarrow E\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{V}F = 0 \Rightarrow E\mathcal{U}\mathrm{Ref}(\mathcal{A})\mathcal{V}F = 0.$$

Αποδείξαμε ότι $\mathcal{U}\mathrm{Ref}(\mathcal{A})\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, συνεπώς

$$\mathcal{V}\mathcal{U}\mathrm{Ref}(\mathcal{A})\mathcal{V}\mathcal{U} \subset \mathcal{V}\mathcal{B}\mathcal{U} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\mathrm{Ref}(\mathcal{A})\mathcal{A} \subset \mathcal{A}.$$

Επειδή η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία έχουμε $\mathrm{Ref}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

(ii) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση και το παράδειγμα στην παρατήρηση 4.2.4 συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.3.1 δεν είναι αληθές. Αλλά όπως δείχνουμε στο επόμενο θεώρημα το αντίστροφο είναι αληθές στην περίπτωση των CSL αλγεβρών.

Θεώρημα 4.3.3 *Δύο CSL άλγεβρες $\mathcal{A} \subset B(H_1)$, $\mathcal{B} \subset B(H_2)$ είναι spacial Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ισόμορφους συνδέσμους.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 4.3.1 αρκεί να δείξουμε ότι ο ισομορφισμός μεταξύ των CSL's έπεται την spacial Morita ισοδυναμία.

Έστω $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}), \mathcal{S}_2 = \mathrm{Lat}(\mathcal{B}), \phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός CSL συνδέσμων και

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(L)^\perp T L = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\},$$
$$\mathcal{V} = \{S \in B(H_2, H_1) : L^\perp S \phi(L) = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Από το Θεώρημα 2.4.4 έχουμε ότι

$$\mathcal{S}_{1,\mathrm{Map}(\mathcal{U})} = \mathcal{S}_1, \;\; \mathcal{S}_{2,\mathrm{Map}(\mathcal{U})} = \mathcal{S}_2, \;\; \mathrm{Map}(\mathcal{U})|_{\mathcal{S}_1} = \phi,$$

$$\mathcal{S}_{1,\mathrm{Map}(\mathcal{V})} = \mathcal{S}_2, \;\; \mathcal{S}_{2,\mathrm{Map}(\mathcal{V})} = \mathcal{S}_1, \;\; \mathrm{Map}(\mathcal{V})|_{\mathcal{S}_2} = \phi^{-1}.$$

Έστω $\mathcal{W} = \mathrm{Ref}(\mathcal{V}\mathcal{U})$ και $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{W})$. Έπεται ότι $\zeta = \mathrm{Map}(\mathcal{V}) \circ \mathrm{Map}(\mathcal{U})$. Επίσης αφού $\mathcal{W}^* = \mathrm{Ref}(\mathcal{U}^*\mathcal{V}^*)$ έχουμε $\zeta^* = \mathrm{Map}(\mathcal{U}^*) \circ \mathrm{Map}(\mathcal{V}^*)$, και άρα $\mathcal{S}_{2,\zeta^*} \subset \mathcal{S}_{2,\mathrm{Map}(\mathcal{U}^*)} = (\mathcal{S}_{1,\mathrm{Map}(\mathcal{U})})^\perp = (\mathcal{S}_1)^\perp$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S}_{1,\zeta} \subset \mathcal{S}_1$. Επομένως αν $L \in \mathcal{S}_{1,\zeta}$ έχουμε

$$\zeta(L) = \mathrm{Map}(\mathcal{V}) \circ \mathrm{Map}(\mathcal{U})(L) = \phi^{-1} \circ \phi(L) = L,$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{W} =& \{T : \zeta(L)^\perp T L = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_{1,\zeta}\} \\ =& \{T : L^\perp T L = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_{1,\zeta}\} \\ \supset& \{T : L^\perp T L = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\} = \mathcal{A} \end{aligned}$$

Επειδή $\mathcal{V}\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ έχουμε ότι $\mathcal{A} = \mathrm{Ref}(\mathcal{V}\mathcal{U})$.

Παρατήρησε ότι ο χώρος $[\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$ είναι masa πρότυπο και άρα περιέχει τον χώρο $\mathcal{A}_{min}$. Αλλά ο χώρος $\mathcal{A}_{min}$ είναι μοναδιαία άλγεβρα και ο χώρος $[\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$ είναι ιδεώδες της άλγεβρας $\mathcal{A}$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\mathcal{B} = [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*}$. $\square$

Θεώρημα 4.3.4 *Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι w^* κλειστές TRO ισοδύναμες άλγεβρες τότε είναι spacial Morita ισοδύναμες.*

Απόδειξη Έστω ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO έτσι ώστε $\mathcal{A} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}$ και $\mathcal{A}_\mathcal{M} = [\mathcal{A}, \mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$,$\mathcal{B}_\mathcal{M} = [\mathcal{B}, \mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}$. Αν οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι μοναδιαίες έχουμε $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathcal{M}, \mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{M}$. Αν δεν είναι υπενθυμίζουμε από την Πρόταση 4.1.10 ότι $\mathcal{A}_\mathcal{M} \overset{\mathcal{M}}{\sim} \mathcal{B}_\mathcal{M}$ και $\mathcal{A}$, (αντιστ. $\mathcal{B}$) είναι ένα ιδεώδες της $\mathcal{A}_\mathcal{M}$, (αντιστ. $\mathcal{B}_\mathcal{M}$).

Ορίζουμε $\mathcal{U} = [\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{V} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}}]^{-w^*}$. Θα δείξουμε ότι το σύστημα $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ είναι ένα spacial Morita σύστημα.

(i) Επειδή η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ έχουμε

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}\mathcal{M})(\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{U}.$$

Επειδή $\mathcal{U} = [\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$.

(ii) Ομοίως έχουμε

$$(\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M})(\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}})\mathcal{B} \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B} \subset \mathcal{V}.$$

Επειδή $\mathcal{A} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$ και $\mathcal{V} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}}]^{-w^*}$ παίρνουμε $\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$.

(iii) Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{V}$ και άρα $\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{V}\mathcal{U}$. Έπεται ότι $[\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} \supset \mathcal{A}$. Επειδή η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ έχουμε

$$(\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}})(\mathcal{B}\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{A}.$$

Αλλά $\mathcal{V} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}}]^{-w^*}$ και $\mathcal{U} = [\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{V}\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ και άρα $\mathcal{A} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$.

(iv) Πάλι επειδή η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ έχουμε $(\mathcal{B}\mathcal{M})(\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{B}$ και συνεπώς $\mathcal{U}\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}\mathcal{V}$ και επομένως

$$[\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}\mathcal{B}_{\mathcal{M}} \subset [\mathcal{M}\mathcal{V}]^{-w^*} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \subset [\mathcal{M}\mathcal{V}]^{-w^*}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{U}\mathcal{V} \supset \mathcal{B}\mathcal{M}\mathcal{V}$ και άρα

$$[\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*} \supset \mathcal{B}[\mathcal{M}\mathcal{V}]^{w^*} \supset \mathcal{B}\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \mathcal{B}.$$

Αποδείξαμε ότι $\mathcal{B} = [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*}$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Η spacial Morita ισοδυναμία δεν συνεπάγεται την TRO ισοδυναμία ακόμα και στην περίπτωση των nest αλγεβρών. Δίνουμε τα ακόλουθα παραδείγματα:

Παράδειγμα 4.3.5 Στον χώρο Χίλμπερτ $H_1 = l^2(\mathbb{Q} \cap [0,1]), \mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών, ορίζουμε για κάθε $t \in [0,1]$ τις προβολές Q_t^+, Q_t^- όπου Q_t^+ (αντιστ. Q_t^-) είναι η προβολή επί του υποχώρου των συναρτήσεων που φέρονται στο διάστημα $[0,t]$ (αντιστ. $[0,t)$). Θεωρούμε το nest

$$\mathcal{N}_1 = \{Q_t^+, Q_t^- : t \in [0,1]\}.$$

Στον χώρο Χίλμπερτ $(L^2([0,1]),\lambda), \lambda$ το μέτρο Lebesgue, ορίζουμε για κάθε $t \in [0,1]$ την προβολή N_t επί του υποχώρου των συναρτήσεων που φέρονται στο διάστημα $[0,t]$. Θεωρούμε στον χώρο Χίλμπερτ $H_2 = H_1 \oplus L^2([0,1])$ το nest

$$\mathcal{N}_2 = \{Q_t^+ \oplus N_t, Q_t^- \oplus N_t : t \in [0,1]\}.$$

Η απεικόνιση

$$\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 : Q_t^+ \to Q_t^+ \oplus N_t, \;\; Q_t^- \to Q_t^- \oplus N_t$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων και συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα οι άλγεβρες $\mathrm{Alg}(\mathcal{N}_1), \mathrm{Alg}(\mathcal{N}_2)$ είναι spacial Morita ισοδύναμες. Όμως δεν είναι TRO ισοδύναμες επειδή δεν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $(\mathcal{N}_1)'', (\mathcal{N}_2)''$, αφού η πρώτη είναι ολικά ατομική masa ενώ η δεύτερη περιέχει συνεχείς προβολές.

Το προηγούμενο παράδειγμα ανήκει στον Davidson, [15]. Μία παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 4.3.6 Έστω $X \subset [0,1]$ το σύνολο του Cantor και $h : [0,1] \to [0,1]$ μία γνησίως αύξουσα επί απεικόνιση έτσι ώστε $\lambda(h(X)) > 0$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue. Υποθέτουμε ότι $[0,1] \setminus X = \cup(l_n, r_n)$ και μ, ν τα Borel μέτρα στο $[0,1]$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu(S) = \sum_{n=1}^{\infty}(r_n - l_n)\delta_{r_n}(S)$$

και

$$\nu(S) = \lambda(h(X) \cap S) + \sum_{n=1}^{\infty}(h(r_n) - h(l_n))\delta_{h(r_n)}(S),$$

όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac με φορέα $\{x\}$.

Έστω $\mathcal{N}_1 = \{M_s : 0 \leq s \leq 1\}$ (αντιστ. $\mathcal{N}_2 = \{M_{h(s)} : 0 \leq s \leq 1\}$) όπου M_s (αντιστ. $M_{h(s)}$) είναι η προβολή επί του υποχώρου $L^2([0,s],\mu)$ (αντιστ. $L^2([0,h(s)],\nu)$). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 : M_s \to M_{h(s)}$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι οι nest άλγεβρες $\mathrm{Alg}(\mathcal{N}_1), \mathrm{Alg}(\mathcal{N}_2)$ είναι spacial Morita ισοδύναμες. Αλλά δεν είναι TRO ισοδύναμες άλγεβρες επειδή δεν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $\mathcal{N}_1'', \mathcal{N}_2''$ (Θεώρημα 4.2.3). Παρατήρησε ότι η άλγεβρα $\mathcal{N}_1''$ είναι ολικά ατομική αλλά η άλγεβρα $\mathcal{N}_2''$ περιέχει συνεχείς προβολές. (Η προβολή επί του χώρου $L^2(Y,\nu), Y = h(X) \setminus \{h(r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συνεχής.)

Θεώρημα 4.3.7 *Έστω $\mathcal{A} \subset B(H_1)$, $\mathcal{B} \subset B(H_2)$ CSL άλγεβρες $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Lat}(\mathcal{A}), \mathcal{S}_2 = \mathrm{Lat}(\mathcal{B}), \phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ένας ισομορφισμός συνδέσμων και*

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(L)^{\perp} TL = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι συνθετική αν και μόνο αν το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι συνθετικό αν και μόνο αν η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι συνθετική.

Απόδειξη Έστω

$$\mathcal{L} = \{\phi(L) \oplus L : L \in \mathcal{S}_1\}, \ \ \mathcal{C} = \mathrm{Alg}(\mathcal{L})$$

και

$$\mathcal{V} = \{S \in B(H_2, H_1) : L^{\perp} S\phi(L) = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε ότι

$$\mathcal{A} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} \ \text{ και } \ \mathcal{B} = [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{D}$ είναι ένα ανακλαστικό masa πρότυπο με $\mathcal{D}_{min}$ συμβολίζουμε το μικρότερο w^* κλειστό masa πρότυπο του οποίου η ανακλαστική θήκη είναι ο χώρος $\mathcal{D}$.

Είναι γνωστό από το [32] ότι

$$\mathcal{C} = \mathrm{Alg}(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{U} \\ \mathcal{V} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \ \text{ και } \ \mathcal{C}_{min} \subset \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{min} & \mathcal{U}_{min} \\ \mathcal{V}_{min} & \mathcal{A}_{min} \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset \mathcal{C}_{min}.$$

Έστω $\mathcal{W}$ ένα w^* κλειστό masa πρότυπο έτσι ώστε $\mathrm{Ref}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}$ και $Q = 0 \oplus I$ τότε

$$\mathrm{Ref}(Q^{\perp}\mathcal{W}Q) = Q^{\perp}\mathcal{C}Q = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{min} \subset Q^{\perp}\mathcal{W}Q \subset \mathcal{W}.$$

Θέτοντας $\mathcal{W} = \mathcal{C}_{min}$ έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset \mathcal{C}_{min}.$$

Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{V}_{min} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{min} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset \mathcal{C}_{min}.$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\mathcal{C}_{min} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{min} & \mathcal{U}_{min} \\ \mathcal{V}_{min} & \mathcal{A}_{min} \end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Αν οι E, F είναι προβολές έτσι ώστε $E\mathcal{U}_{min}\mathcal{V}F = 0$ τότε $E\mathcal{U}\mathcal{V}F = 0$ και άρα $E\mathcal{B}F = 0$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{B} \subset \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_{min}\mathcal{V})$ και από αυτό $\mathcal{B} = \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_{min}\mathcal{V})$. Ανάλογα έχουμε ότι $\mathcal{A} = \mathrm{Ref}(\mathcal{V}_{min}\mathcal{U})$.

Τώρα υποθέτουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι συνθετική. Επειδή $\mathcal{B} = \mathrm{Ref}(\mathcal{U}_{min}\mathcal{V})$ έχουμε ότι $\mathcal{B}_{min} \subset [\mathcal{U}_{min}\mathcal{V}]^{-w^*}$ και άρα

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_{min}\mathcal{U} \subset [\mathcal{U}_{min}\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} \subset [\mathcal{U}_{min}\mathcal{A}]^{-w^*} = [\mathcal{U}_{min}\mathcal{A}_{min}]^{-w^*}.$$

Από την ισότητα (4.3.1) έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min}\mathcal{A}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{min} \end{bmatrix} \subset \mathcal{C}_{min}.$$

Συνεπάγεται ότι $\mathcal{U}_{min}\mathcal{A}_{min} \subset \mathcal{U}_{min}$ από το οποίο προκύπτει ότι $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{min}$ και άρα το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι συνθετικό.

Για την αντίθετη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι συνθετικό. Από την ισότητα (4.3.1) έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{min}\mathcal{U}_{min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{V}_{min} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{V}_{min}\mathcal{U}_{min} \subset \mathcal{A}_{min}$ και άρα $\mathcal{V}_{min}\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_{min}$. Επειδή $\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ έχουμε ότι $\mathcal{V}_{min}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{min}$. Από την ισότητα $\mathcal{A} = \mathrm{Ref}(\mathcal{V}_{min}\mathcal{U})$ προκύπτει ότι $\mathcal{A}_{min} \subset [\mathcal{V}_{min}\mathcal{U}]^{-w^*}$. Από το γεγονός ότι $\mathcal{V}_{min}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{min}$ έπεται ότι $\mathcal{A}_{min}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{min}$ και άρα $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{min}$.

Έχουμε αποδείξει ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι συνθετική αν και μόνο αν το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι συνθετικό. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι συνθετικό αν και μόνο αν η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι συνθετική. $\square$

4.4 TRO ισοδυναμία και CSL άλγεβρες

Υποθέτουμε σε αυτή την παράγραφο ότι όλοι οι χώροι Χίλμπερτ είναι διαχωρίσιμοι. Εξετάζουμε πότε δύο CSL άλγεβρες που δρουν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ είναι TRO ισοδύναμες. Αποδεικνύουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει ειδικού τύπου ισομορφισμός μεταξύ των συνδέσμων τους: ισομορφισμός που «σέβεται την συνέχεια».

Λήμμα 4.4.1 *Έστω $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ ολικά ατομικά nests και $\phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ ένας ισομορφισμός nests. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\rho : \mathcal{N}_1'' \to \mathcal{N}_2''$ που επεκτείνει την ϕ.*

Απόδειξη Έστω $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ (αντιστ. $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$) τα άτομα του $\mathcal{N}_1$ (αντιστ. $\mathcal{N}_2$). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_n = N_n - (N_n)_\flat$ και $F_n = \phi(N_n) - \phi((N_n)_\flat)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\{N_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}_1$.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$\mathcal{N}_1'' = \{\sum_n \lambda_n E_n : \ sup\, |\lambda_n| < \infty\}$$

$$\mathcal{N}_2'' = \{\sum_n \lambda_n F_n : \ sup\, |\lambda_n| < \infty\}.$$

Ορίζουμε

$$\rho : \mathcal{N}_1'' \to \mathcal{N}_2'' : \rho(\sum_n \lambda_n E_n) = \sum_n \lambda_n F_n.$$

Η απεικόνιση ρ είναι $*$-ισομορφισμός που επεκτείνει την ϕ. $\square$

Λήμμα 4.4.2 *Έστω $\mathcal{S}$ CSL σύνδεσμος που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H και Q προβολή τέτοια ώστε $QB(H)Q \subset \mathcal{S}'$. Τότε υπάρχει άτομο E του συνδέσμου $\mathcal{S}$ ώστε $Q \leq E$.*

Απόδειξη Επειδή $QB(H)Q \subset \mathcal{S}'$ έχουμε $QL = 0$ η $QL = Q$ για κάθε $L \in \mathcal{S}$. Έστω

$$M = \wedge\{L \in \mathcal{S} : LQ = Q\}.$$

Παρατήρησε ότι $MQ = Q$ και $LQ = 0$ για όλα τα $L \in \mathcal{S}$ ώστε $L < M$. Συνεπάγεται ότι $M_\flat Q = 0$ και άρα $(M - M_\flat)Q = Q$. Αποδείξαμε ότι $Q \leq M - M_\flat = E$. $\square$

Λήμμα 4.4.3 *Έστω $\mathcal{S}$ CSL σύνδεσμος που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H και P το sup όλων των ατόμων του $\mathcal{S}$. Τότε ο σύνδεσμος $\mathcal{S}|_{p^\perp} = \{L|_{P(H)^\perp} : L \in \mathcal{S}\}$ είναι συνεχής CSL σύνδεσμος.*

Απόδειξη Αν ο σύνδεσμος $\mathcal{S}|_{P^\perp}$ έχει κάποιο άτομο έπεται ότι υπάρχει προβολή $Q \leq P^\perp$ τέτοια ώστε

$$B(Q(H)) \subset (\mathcal{S}|_{P^\perp})' = \mathcal{S}'|_{P^\perp}$$

και άρα $B(Q(H)) \subset \mathcal{S}'$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα άτομο E του $\mathcal{S}$ έτσι ώστε $Q \leq E$. Αυτό είναι αντίφαση επειδή $E \leq P$. $\square$

Λήμμα 4.4.4 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL's που δρουν σε χώρο Χίλμπερτ H έτσι ώστε $\mathcal{S}_1'' = \mathcal{S}_2''$. Τότε η προβολή E είναι άτομο του $\mathcal{S}_1$ αν και μόνο αν είναι άτομο του $\mathcal{S}_2$.*

Απόδειξη Έστω E_1 άτομο του $\mathcal{S}_1$. Έπεται ότι $E_1 B(H) E_1 \subset \mathcal{S}_1'$. Από το Λήμμα 4.4.2 υπάρχει άτομο F του $\mathcal{S}_2$ έτσι ώστε $E_1 \leq F$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 4.4.2 υπάρχει άτομο E_2 του $\mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $F \leq E_2$. Συνεπάγεται ότι $E_1 = E_2 = F$ και άρα η προβολή E_1 είναι άτομο του $\mathcal{S}_2$. $\square$

Λήμμα 4.4.5 *Έστω $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ nests, $\phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων, P το sup των ατόμων του $\mathcal{N}_1$ και Q το sup των ατόμων του $\mathcal{N}_2$. Τότε η απεικόνιση*

$$\mathcal{N}_1|_P \to \mathcal{N}_2|_Q : N|_P \to \phi(N)|_Q$$

είναι επίσης ισομορφισμός συνδέσμων.

Απόδειξη Έστω $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_1$ τέτοια ώστε $N_1|_P = N_2|_P$. Θα αποδείξουμε ότι $\phi(N_1)|_Q = \phi(N_2)|_Q$. Αν $N_1 = N_2$ αυτό είναι προφανές. Υποθέτουμε τώρα ότι $N_1 < N_2$.
Έχουμε ότι $(N_2 - N_1)P = 0$ η ισοδύναμα $(N_2 - N_1)(N - N_\flat) = 0$ για κάθε $N \in \mathcal{N}_1$. Συνεπάγεται ότι $N \leq N_1 < N_2$ η $N_1 < N_2 \leq N_\flat$ για όλα τα $N \in \mathcal{N}_1$ έτσι ώστε $N_\flat < N$. Έπεται ότι $\phi(N) \leq \phi(N_1) < \phi(N_2)$ η $\phi(N_1) < \phi(N_2) \leq \phi(N_\flat)$ και άρα $(\phi(N_2) - \phi(N_1))(\phi(N) - \phi(N_\flat)) = 0$ για κάθε $N \in \mathcal{N}_1$. Από αυτό προκύπτει ότι $\phi(N_1)|_Q = \phi(N_2)|_Q$.

Παρόμοια αν $\phi(N_1)|_Q = \phi(N_2)|_Q$ έχουμε $N_1|_P = N_2|_P$. Το συμπέρασμα είναι ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{N}_1|_P \to \mathcal{N}_2|_Q : N|_P \to \phi(N)|_Q$$

είναι ισομορφισμός. $\square$

Λήμμα 4.4.6 *Έστω $\mathcal{S}_1$ ένας CSL σύνδεσμος και $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}_1$. Τότε υπάρχει nest $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [\mathcal{N}]$.*

Απόδειξη Θα δημιουργήσουμε ολικά διατεταγμένα σύνολα $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{S}_1$ ώστε

$$0, I \in \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset ... \subset \mathcal{L}_k \subset ... \subset \mathcal{S}_1 \text{ και } \{P_1, ...P_k\} \subset [\mathcal{L}_k], \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

χρησιμοποιώντας επαγωγή. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{L}_1 = \{0, P_1, I\}$ και ότι έχουμε βρεί ολικά διατεταγμένα σύνολα $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset ... \subset \mathcal{L}_{n-1} \subset \mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $\{P_1, ...P_k\} \subset [\mathcal{L}_k], k = 1, 2, ...n-1$.
Υποθέτουμε ακόμα ότι

$$\mathcal{L}_{n-1} = \{0 = E_0 \leq E_1 \leq ... \leq E_r = I\}.$$

Έστω

$$F_k = (E_{k-1} \vee P_n) \wedge E_k = E_{k-1} + (E_k - E_{k-1})P_n, k = 1, 2, ...r.$$

Ορίζουμε

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} \cup \{F_k, k = 1, 2, ...r\}.$$

Παρατηρούμε ότι:
$(i)\{F_k, k = 1, 2, ...r\} \subset \mathcal{S}_1$.
$(ii)E_{k-1} \leq F_k \leq E_k$
$(iii)P_n = \sum_{k=1}^r P_n(E_k - E_{k-1}) = \sum_{k=1}^r (F_k - E_{k-1}) \in [\mathcal{L}_n]$.
Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{L}_n$ ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες.

Ορίζουμε
$$\mathcal{L} = \cup_n \mathcal{L}_n.$$
Αυτό το σύνολο είναι ολικά διατεταγμένο, περιέχεται στο $\mathcal{S}_1$ και ικανοποιεί την σχέση $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [\mathcal{L}]$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn βρίσκουμε μεγιστική ολικά διατεταγμένη οικογένεια $\mathcal{N}$ έτσι ώστε $\mathcal{L} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{S}_1$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{N}$ είναι nest.
Πράγματι, έστω $\{N_i : i \in I\} \subset \mathcal{N}$ και $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{\vee_i N_i\}$. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{S}_1$. Έστω $N \in \mathcal{N}$, αν υπάρχει δείκτης $i_0 \in I$ τέτοιος ώστε $N \leq N_{i_0}$ τότε $N \leq \vee_i N_i$. Αν $N \geq N_i$ για κάθε $i \in I$ τότε $N \geq \vee_i N_i$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{M}$ είναι ολικά διατεταγμένο. Από την υπόθεση της μεγιστικότητας έπεται ότι $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ και άρα $\vee_i N_i \in \mathcal{N}$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι $\wedge_{i \in I} \in \mathcal{N}$ και συνεπώς το σύνολο $\mathcal{N}$ είναι nest. □

Η προηγούμενη απόδειξη στηρίζεται σε μία συνήθη διαδικασία. Δες για παράδειγμα την απόδειξη του θεωρήματος 4.1 στο [30].

Λήμμα 4.4.7 *Έστω $H_i, i = 1, 2$ χώροι Χίλμπερτ, $\mathcal{S}_i, i = 1, 2$ μεταθετικοί σύνδεσμοι (όχι απαραίτητα πλήρεις) που περιέχουν τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή και $\theta : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων, Τότε η απεικόνιση θ επεκτείνεται σε $*$-ισομορφισμό $\rho : [\mathcal{S}_1]^{-\|\cdot\|} \to [\mathcal{S}_2]^{-\|\cdot\|}$.*

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας επαγωγή θα δείξουμε ότι αν $P_1, ...P_n$ είναι προβολές που ανήκουν στον $\mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^n c_i P_i = 0, c_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$ τότε $\sum_{i=1}^n c_i \theta(P_i) = 0$.
Για $n = 1, 2$ είναι προφανές ότι ο ισχυρισμός ισχύει. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $k \in \{1, ..., n-1\}$.
Έστω $\sum_{i=1}^n c_i P_i = 0, c_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$. Ορίζουμε $A = \sum_{i=1}^n c_i \theta(P_i)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\theta(P_k)A = 0$ για όλα τα $k \in \{1, ...n\}$. Έστω $B = \theta(P_n)A$. Θα δείξουμε ότι $B = 0$.
Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $\sum_{i=1}^n c_i P_i = 0$ με $P_1 \wedge P_n$ έχουμε
$$(c_1 + c_n)(P_1 \wedge P_n) + c_2(P_2 \wedge P_1 \wedge P_n) + ... + c_{n-1}(P_{n-1} \wedge P_1 \wedge P_n) = 0.$$
Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι
$$(c_1 + c_n)\theta(P_1 \wedge P_n) + c_2\theta(P_2 \wedge P_1 \wedge P_n) + ... + c_{n-1}\theta(P_{n-1} \wedge P_1 \wedge P_n) = 0$$

και άρα $\theta(P_1)B = 0$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\theta(P_i)B = 0, 1 \leq i \leq n-1$. Επειδή $P_n = (-c_n)^{-1} \sum_{i \neq n} c_i P_i$ έπεται ότι

$$P_n \leq \vee_{i \neq n} P_i \Rightarrow \theta(P_n) \leq \vee_{i \neq n} \theta(P_i) \Rightarrow \theta(P_n)B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Δείξαμε ότι $\theta(P_n)A = 0$. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο μπορούμε να δείξουμε ότι $\theta(P_k)A = 0, k = 1, ...n$ και άρα ο ισχυρισμός ισχύει.

Το συμπέρασμα είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση

$$\rho : [\mathcal{S}_1] \to [\mathcal{S}_2] : \rho(\sum_{i=1}^{n} c_i P_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \theta(P_i).$$

Επειδή η θ είναι ισομορφισμός συνδέσμων η ρ είναι αλγεβρικός $*$-ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι η ρ είναι norm συνεχής. Έστω $A = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i \in [\mathcal{S}_1]$ και c στοιχείο του φάσματος του τελεστή $\rho(A)$, $\sigma(\rho(A))$.
Έστω $\mathcal{S}_0$ ο μικρότερος σύνδεσμος που περιέχει το σύνολο $\{0, P_1, ...P_n, I\}$. Τότε ο χώρος $[\mathcal{S}_0]$ είναι C^*-άλγεβρα που περιέχεται στην άλγεβρα $[\mathcal{S}_1]$. Αν το c δεν περιέχεται στο φάσμα $\sigma(A)$ του τελεστή A ο τελεστής B ο οποίος είναι ο αντίστροφος του $cI - A$ περιέχεται στην άλγεβρα $[\mathcal{S}_0]$ και επομένως και στην $[\mathcal{S}_1]$. Επειδή $B(cI - A) = (cI - A)B = I$ έχουμε $\rho(B)(cI - \rho(A)) = (cI - \rho(A))\rho(B) = I$. Αυτό είναι αντίφαση.

Αποδείξαμε ότι $\sigma(\rho(A)) \subset \sigma(A)$ και έπομένως $\|\rho(A)\| \leq \|A\|$. Εύκολα τώρα ελέγχεται ότι η απεικόνιση ρ επεκτείνεται σε $*$-ισομορφισμό από την C^* άλγεβρα $[\mathcal{S}_1]^{-\|\cdot\|}$ επί της $[\mathcal{S}_2]^{-\|\cdot\|}$. $\square$

Λήμμα 4.4.8 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL's, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων, P το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_1$ και Q το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_2$. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός*

$$\rho : \mathcal{S}_1''|_P \to \mathcal{S}_2''|_Q$$

που ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(L|_P) = \phi(L)|_Q$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$.

Απόδειξη Έστω $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}_1$ ακολουθία προβολών ώστε η ακολουθία $\{P_n \oplus \phi(P_n) : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι w^* πυκνή στο σύνολο $\{L \oplus \phi(L) : L \in \mathcal{S}_1\}$. Από το Λήμμα 4.4.6 υπάρχει ένα nest $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [\mathcal{N}]$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{S}_1'' = \mathcal{N}''$ και $\mathcal{S}_2'' = \phi(\mathcal{N})''$. Επομένως από το Λήμμα 4.4.4 τα CSL's $\mathcal{S}_1, \mathcal{N}$ και $\mathcal{S}_2, \phi(\mathcal{N})$ έχουν τα ίδια άτομα.

Η απεικόνιση

$$\mathcal{N}|_P \to \phi(\mathcal{N})|_Q : N|_P \to \phi(N)|_Q$$

είναι ισομορφισμός από το Λήμμα 4.4.5. Επομένως επεκτείνεται σε $*$-ισομορφισμό

$$\rho : (\mathcal{N}|_P)'' = \mathcal{S}_1''|_P \to \mathcal{S}_2''|_Q = (\phi(\mathcal{N})|_Q)''$$

από το Λήμμα 4.4.1.

Σταθεροποιούμε μία προβολή P_n. Υπάρχουν προβολές $\{N_1, ...N_m\} \subset \mathcal{N}$ ώστε $P_n = \sum_{i=1}^m c_i N_i$. Από το προηγούμενο λήμμα $\phi(P_n) = \sum_{i=1}^m c_i\phi(N_i)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\rho(P_n|_P) =&\rho((\sum_{i=1}^m c_i N_i)|_P) = \sum_{i=1}^m c_i\rho(N_i|_P) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i\phi(N_i)|_Q = (\sum_{i=1}^m c_i\phi(N_i))|_Q = \phi(P_n)|_Q.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι

$$\rho(P_n|_P) = \phi(P_n)|_Q. \tag{4.4.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $L \in \mathcal{S}_1$ τότε υπάρχει υπακολουθία (P_{n_m}) έτσι ώστε $P_{n_m} \xrightarrow{w^*} L$ και $\phi(P_{n_m}) \xrightarrow{w^*} \phi(L)$. Έχουμε $\phi(P_{n_m})|_Q \xrightarrow{w^*} \phi(L)|_Q$ και επομένως από την εξίσωση (4.4.1) $\rho(P_{n_m}|_P) \xrightarrow{w^*} \phi(L)|_Q$. Η απεικόνιση ρ είναι w^* συνεχής ως $*$-ισομορφισμός μεταξύ αλγεβρών von Neumann. Επομένως $\rho(P_{n_m}|_P) \xrightarrow{w^*} \rho(L|_P)$ και άρα $\rho(L|_P) = \phi(L)|_Q$. $\square$

Παρατήρηση 4.4.9 Αν $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ είναι CSL's, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων P το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_1$ και Q το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_2$ έχουμε αποδείξει ότι ορίζεται ένας ισομορφισμός $\mathcal{S}_1|_P \to \mathcal{S}_2|_Q : L|_P \to \phi(L)|_Q$. Παρατηρούμε απο το Λήμμα 4.4.3 ότι τα CSL's $\mathcal{S}_1|_{P^\perp}, \mathcal{S}_2|_{Q^\perp}$ είναι συνεχή CSL's. Αλλά δεν είναι πάντα αληθές ότι ορίζεται ένας ισομορφισμός από τον $\mathcal{S}_1|_{P^\perp}$ επί του $\mathcal{S}_2|_{Q^\perp}$. Στα παραδείγματα 4.3.5, 4.3.6 έχουμε $P^\perp = 0$ και $Q^\perp \neq 0$. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.4.1 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL's, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων, P το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_1$ και Q το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_2$. Λέμε ότι η ϕ **σέβεται την συνέχεια** αν υπάρχει ισομορφισμός $\mathcal{S}_1|_{P^\perp} \to \mathcal{S}_2|_{Q^\perp}$ τέτοιος ώστε $L|_{P^\perp} \to \phi(L)|_{Q^\perp}$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$.*

Λήμμα 4.4.10 *Έστω $\mathcal{N}_1$ (αντιστ. $\mathcal{N}_2$) συνεχές nest σε χώρο Χίλμπερτ H_1 (αντιστ. H_2) και $\phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\rho : \mathcal{N}_1'' \to \mathcal{N}_2''$ που επεκτείνει την ϕ.*

Απόδειξη Έστω x (αντιστ. y) διαχωρίζον διάνυσμα [30] της άλγεβρας $\mathcal{N}_1''$ (αντιστ. $\mathcal{N}_2''$) και P_1 (αντιστ. P_2) η προβολή επί του χώρου $\mathcal{N}_1''x$ (αντιστ. $\mathcal{N}_2''y$). Τα nests $\mathcal{N}_1|_{P_1}, \mathcal{N}_2|_{P_2}$ είναι ελεύθερα πολλαπλότητας (δηλαδή παράγουν masas) συνεχή nests και η απεικόνιση

$$\mathcal{N}_1|_{P_1} \to \mathcal{N}_2|_{P_2} : N|_{P_1} \to \phi(N)|_{P_2}$$

είναι ισομορφισμός. Συνεπάγεται [15] ότι υπάρχει μοναδιαία ισοδυναμία μεταξύ των αλγεβρών $(\mathcal{N}_1)''|_{P_1}, (\mathcal{N}_2)''|_{P_2}$ που επεκτείνει τον προηγούμενο ισομορφισμό. Επειδή οι απεικονίσεις

$$\mathcal{N}_i'' \to \mathcal{N}_i''|_{P_i} : A \to A|_{P_i} \quad i = 1, 2$$

είναι $*$-ισομορφισμοί προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 4.4.11 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ συνεχή CSL's και $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων. Τότε υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\rho : \mathcal{S}_1'' \to \mathcal{S}_2''$ που επεκτείνει την ϕ.*

Απόδειξη Έστω ότι η ακολουθία $\{P_n \oplus \phi(P_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι w^* πυκνη στο σύνολο $\{L \oplus \phi(L) : L \in \mathcal{S}_1\}$. Από το Λήμμα 4.4.6 υπάρχει nest $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_1$ ώστε $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [\mathcal{N}]$. Αυτό το nest είναι συνεχές από το Λήμμα 4.4.4.

Η απεικόνιση $\phi|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \phi(\mathcal{N})$ είναι ισομορφισμός μεταξύ συνεχών nests. Επομένως από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $*$-ισομορφισμός

$$\rho : (\mathcal{N})'' = (\mathcal{S}_1)'' \to (\mathcal{S}_2)'' = \phi(\mathcal{N})''$$

ώστε $\rho|_{\mathcal{N}} = \phi|_{\mathcal{N}}$.

Αυτή η απεικόνιση επεκτείνει την $\phi|_{\mathcal{S}_1}$:
Σταθεροποιούμε προβολή P_n. Υπάρχει υποσύνολο $\{N_1, ..., N_r\} \subset \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P_n = \sum_{k=1}^r c_k N_k$. Επομένως

$$\begin{aligned} \rho(P_n) &= \sum_{k=1}^{r} c_k \rho(N_k) = \sum_{k=1}^{r} c_k \phi(N_k) \\ &= \phi(P_n) \quad \text{από το Λήμμα 4.4.7.} \end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $\{P_n \oplus \phi(P_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι w^* πυκνό στο $\{L \oplus \phi(L) : L \in \mathcal{S}_1\}$ και η απεικόνιση ρ είναι w^* συνεχής ως $*$ ισομορφισμός μεταξύ αλγεβρών von Neumann έχουμε $\rho(L) = \phi(L)$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. $\square$

Συνδυάζοντας το προηγούμενο λήμμα με το Θεώρημα 4.2.3 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 4.4.12 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ συνεχή CSL's. Οι άλγεβρες $\mathrm{Alg}((\mathcal{S}_1)$, $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)$ είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν τα CSL's είναι ισόμορφα.*

Πιο γενικά ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.13 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL σύνδεσμοι. Οι άλγεβρες $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1), \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)$ είναι TRO ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ που σέβεται την συνέχεια.*

Στην πράξη θα αποδείξουμε την ακόλουθη πιο περιεκτική πρόταση:

Πρόταση 4.4.14 *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ CSL σύνδεσμοι που δρούν στους χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα, P το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_1$, Q το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_2$ και $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)$, $\mathcal{B} = \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)$, $\mathcal{A}_0 = [\mathcal{S}_1]^{-\|\cdot\|}$, $\mathcal{B}_0 = [\mathcal{S}_2]^{-\|\cdot\|}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες.

(ii) Υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ που σέβεται την συνέχεια.

(iii) Υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ του οποίου η επέκταση (Λήμμα 4.4.7) $\overline{\phi} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ είναι w^* αμφισυνεχής στις μοναδιαίες σφαίρες των αλγεβρών $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$.

(iv) Υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ώστε αν $\mathcal{L} = \{L \oplus \phi(L) : L \in \mathcal{S}_1\}$ τότε

$$\mathcal{L}'' \cap (0 \oplus \mathcal{B}_0'') = 0, \ \ \mathcal{L}'' \cap (\mathcal{A}_0'' \oplus 0) = 0.$$

(v) Υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ώστε αν $\mathcal{L}$ είναι όπως στο (iv) τότε

$$\mathcal{L}'' \cap (0 \oplus \mathcal{B}_0'' Q^\perp) = 0, \ \ \mathcal{L}'' \cap (\mathcal{A}_0'' P^\perp \oplus 0) = 0.$$

Επί πλέον αν αυτές οι συνθήκες ισχύουν και

$$\Delta(\phi) = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}$$

τότε $\mathcal{A} \overset{\Delta(\phi)}{\sim} \mathcal{B}$.

Απόδειξη $(i)\Rightarrow(ii)$
Υποθέτουμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες. Από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι υπάρχει $*$ ισομορφισμός $\rho : \mathcal{S}_1'' \to \mathcal{S}_2''$ ώστε $\rho(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.
Η απεικόνιση ρ είναι w^* αμφισυνεχής και προφανώς απεικονίζει τα άτομα του συνδέσμου $\mathcal{S}_1$ επί αυτών του $\mathcal{S}_2$. Συνεπώς $Q = \rho(P)$ και άρα $\rho(LP^\perp) = \rho(L)\rho(P)^\perp = \rho(L)Q^\perp$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. Το συμπέρασμα είναι ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{S}_1|_{P^\perp} \to \mathcal{S}_2|_{Q^\perp} : L|_{P^\perp} \to \rho(L)|_{Q^\perp}$$

είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Επομένως ο ισομορφισμός $\rho|_{\mathcal{S}_1} : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ σέβεται την συνέχεια.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων που σέβεται την συνέχεια. Από το Λήμμα 4.4.8 υπάρχει $*$ ισομορφισμός

$$\rho_1 : \mathcal{S}_1''|_P \to \mathcal{S}_2''|_Q$$

ώστε $\rho_1(L|_P) = \phi(L)|_Q$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. Επειδή η ϕ σέβεται την συνέχεια, από το Λήμμα 4.4.11 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $*$ ισομορφισμός

$$\rho_2 : \mathcal{S}_1''|_{P^\perp} \to \mathcal{S}_2''|_{Q^\perp}$$

ώστε $\rho_2(L|_{P^\perp}) = \phi(L)|_{Q^\perp}$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$.

Ορίζουμε

$$\rho : \mathcal{S}_1'' \to B(H_2) : \rho(A) = \rho_1(A|_P) \oplus \rho_2(A|_{P^\perp}).$$

Η απεικόνιση αυτή επεκτείνει την ϕ :

$$\rho(L) = \phi(L)|_Q \oplus \phi(L)|_{Q^\perp} = \phi(L) \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1.$$

Επίσης είναι w^* αμφισυνεχής ως $*$ ισομορφισμός επί της άλγεβρας $\mathcal{S}_2''$.

$(iii) \Rightarrow (i)$
Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων της οποίας η επέκταση από το Λήμμα 4.4.7, $\overline{\phi} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ είναι w^* αμφισυνεχής στις μοναδιαίες σφαίρες. Από το Λήμμα 10.1.10 στο [30] η απεικόνιση $\overline{\phi}$ (αντίστοιχα $\overline{\phi}^{-1}$) επεκτείνεται σε w^* συνεχή $*$ μορφισμό από την άλγεβρα $(\mathcal{S}_1)''$ στην $(\mathcal{S}_2)''$ (αντίστοιχα από την $(\mathcal{S}_2)''$ στην $(\mathcal{S}_1)''$). Εύκολα ελέγχεται ότι κάθε επέκταση είναι αντίστροφη της άλλης. (Η υπόθεση ότι η απεικόνιση $\overline{\phi}$ ειναι w^* συνεχής δεν εξασφαλίζει ότι η αντίστροφός της είναι επίσης w^* συνεχής. Δες την άσκηση 10.5.30 στο [30]).

Το Θεώρημα 4.2.3 δείχνει τώρα ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες.

$(i) \Rightarrow (iv)$
Αν οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες από το Θεώρημα 4.2.3 υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ που επεκτείνεται σε $*$ ισομορφισμό $\rho : \mathcal{S}_1'' \to \mathcal{S}_2''$. Εύκολα ελέγχεται ότι $\mathcal{L}'' = \{A \oplus \rho(A) : A \in \mathcal{A}_0''\}$ και επομένως

$$\mathcal{L}'' \cap (0 \oplus \mathcal{B}_0'') = 0, \quad \mathcal{L}'' \cap (\mathcal{A}_0'' \oplus 0) = 0.$$

$(iv) \Rightarrow (v)$
Αυτή η συνεπαγωγή είναι προφανής.

$(v) \Rightarrow (i)$
Αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ επεκτείνεται σε $*$ ισομορφισμό από την άλγεβρα $\mathcal{S}_1''$ επί της $\mathcal{S}_2''$. Αν αυτό δεν γίνεται από την συνθήκη (iii) μία από τις απεικονίσεις $\overline{\phi} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$, $\overline{\phi}^{-1} : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{A}_0$ δεν θα είναι w^* συνεχής στην μοναδιαία σφαίρα. Ας υποθέσουμε ότι η $\overline{\phi}$ δεν είναι w^* συνεχής στην μοναδιαία σφαίρα. Τότε υπάρχει δίκτυο $(A_i) \subset Ball(\mathcal{A}_0)$ που συγκλίνει στην w^* τοπολογία στο 0 ενώ το δίκτυο $(\overline{\phi}(A_i))$ συγκλίνει στον μη μηδενικό τελεστή $B \in \mathcal{B}_0''$. Επειδή ο περιορισμός της ϕ στον σύνδεσμο $\mathcal{S}_1|_P$ επεκτείνεται από το Λήμμα 4.4.8 σε $*$ ισομορφισμό από την άλγεβρα $\mathcal{A}_0''|_P$ επί της $\mathcal{B}_0''|_Q$ και το δίκτυο (A_iP) συγκλίνει στο 0 το δίκτυο $(\overline{\phi}(A_i)Q)$ συγκλίνει στο 0 επίσης. Επομένως $BQ = 0$.

Παρατήρησε ότι $(L - L_\flat) \oplus (\phi(L) - \phi(L)_\flat) \in \mathcal{L}''$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. Επομένως $P \oplus Q \in \mathcal{L}''$. Έπεται ότι $A_iP^\perp \oplus \overline{\phi}(A_i)Q^\perp \in \mathcal{L}''$ για κάθε δείκτη i και συνεπώς $0 \oplus BQ^\perp \in \mathcal{L}''$. Αυτό είναι άτοπο επειδή $BQ^\perp \neq 0$. Η απόδειξη της περίπτωσης όπου η $\overline{\phi}^{-1}$ δεν είναι w^* συνεχής στην μοναδιαία σφαίρα είναι παρόμοια.

Τώρα υποθέτουμε ότι οι συνθήκες από (ii) μέχρι (v) ισχύουν και έστω $\rho : \mathcal{S}_1'' \to \mathcal{S}_2''$ η επέκταση της ϕ. Από το Λήμμα 4.2.1 ο χώρος

$$\mathcal{M} = \{T \in B(H_1, H_2) : TA = \rho(A)T \text{ για κάθε } A \in \mathcal{S}_2''\}$$

είναι ουσιώδες TRO. Επειδή ο χώρος $\Delta(\phi)$ περιέχει τον $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδης επίσης. Εύκολα ελέγχεται ότι $\Delta(\phi)^*\mathcal{B}\Delta(\phi) \subset \mathcal{A}$ και $\Delta(\phi)\mathcal{A}\Delta(\phi)^* \subset \mathcal{B}$. Από την Πρόταση 4.1.2 συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} \overset{\Delta(\phi)}{\sim} \mathcal{B}$. $\square$

Παρατήρηση 4.4.15 *Παρατηρούμε από το Θεώρημα 4.2.3 ότι αν δύο άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες και η μία είναι CSL άλγεβρα τότε είναι και η άλλη.*

4.5 Ανακλαστικά masa πρότυπα με ουσιώδη διαγώνιο

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι όλοι οι χώροι Χίλμπερτ είναι διαχωρίσιμοι. Με το παρακάτω θεώρημα συμπληρώνουμε την έρευνά μας στο κεφάλαιο 2, χαρακτηρίζοντας τα ανακλαστικά masa πρότυπα που έχουν ουσιώδη διαγώνιο.

Θεώρημα 4.5.1 *Έστω H_1, H_2 χώροι Χίλμπερτ και $\mathcal{U}$ υπόχωρος του $B(H_1, H_2)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι ανακλαστικό masa πρότυπο με ουσιώδη διαγώνιο.

(ii) Υπάρχουν CSL's $\mathcal{S}_i \subset B(H_i), i = 1, 2$ και ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ που σέβεται την συνέχεια έτσι ώστε $\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P)^\perp TP = 0$ για κάθε $P \in \mathcal{S}_1\}$.

(iii) Υπάρχει ένα ουσιώδες TRO, masa πρότυπο $\mathcal{M}$ και ένα CSL $\mathcal{S}_1$ έτσι ώστε $(\mathcal{S}_1)' = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \mathcal{U} = [\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*}$.

(iv) Υπάρχει ένα ουσιώδες TRO, masa πρότυπο $\mathcal{N}$ και ένα CSL $\mathcal{S}_2$ έτσι ώστε $(\mathcal{S}_2)' = [\mathcal{N}\mathcal{N}^*]^{-w^*}, \mathcal{U} = [\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)\mathcal{N}]^{-w^*}$.

Επί πλέον, αν η συνθήκη (iii) ισχύει τότε $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$. Επίσης αν $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}), \chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$ τότε $\mathcal{S}_{1,\phi} = \mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{2,\phi} = \chi(\mathcal{S}_1)$ και $\phi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}} = \chi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}}$. Συμμετρικά, αν η συνθήκη (iv) ισχύει τότε $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{N}$. Επίσης αν $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$ και $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{N})$ τότε $\mathcal{S}_{2,\phi} = \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_{1,\phi} = \chi^*(\mathcal{S}_2)$ και $\phi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}} = \chi|_{\mathcal{S}_{1,\phi}}$.

Απόδειξη$(i) \Rightarrow (ii)$
Επειδή ο χώρος $\mathcal{U}$ έχει ουσιώδη διαγώνιο, τα σύνολα $\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι CSL's

και επομένως από την Πρόταση 3.3.5 η απεικόνιση $\phi : \mathcal{S}_{1,\phi} \to \mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι ισομορφισμός, όπου $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$. Επίσης αν $\chi = \mathrm{Map}(\Delta(\mathcal{U}))$ τότε η απεικόνιση $\chi : \mathcal{P}(\mathcal{S}''_{1,\phi}) \to \mathcal{P}(\mathcal{S}''_{2,\phi})$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων που επεκτείνει την ϕ (Θεώρημα 3.3.3). Όπως στην Πρόταση 4.4.14 χρησιμοποιώντας την επέκταση χ μπορούμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ σέβεται την συνέχεια.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Έστω $\mathcal{S}_i \subset B(H_i), i = 1, 2$ CSL's, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός που σέβεται την συνέχεια και

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P)^{\perp} TP = 0 \ \text{ για κάθε } \ P \in \mathcal{S}_1\}.$$

Από το Θεώρημα 2.4.4 οι ημισύνδεσμοι του $\mathcal{U}$ είναι οι $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ και $\mathrm{Map}(\mathcal{U})|_{\mathcal{S}_1} = \phi$. Από αυτό προκύπτει ότι η διαγώνιος του $\mathcal{U}$ είναι ο χώρος

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T : TL = \phi(L)T \ \text{ για κάθε } \ L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Όπως στην Πρόταση 4.4.14 επειδή η απεικόνιση ϕ σέβεται την συνέχεια επεκτείνεται ως $*$-ισομορφισμός $\rho : \mathcal{S}''_1 \to \mathcal{S}''_2$. Έπεται από το Λήμμα 4.2.1 ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδες TRO. Είναι επίσης φανερό ότι $(\mathcal{S}_2)'\mathcal{U}(\mathcal{S}_1)' \subset \mathcal{U}$ και άρα ο χώρος $\mathcal{U}$ είναι masa πρότυπο.

$(i) \Rightarrow (iii)$
Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$. Επειδή ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδες TRO τότε $[\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*} = (\mathcal{S}_{1,\phi})'$, (Λήμμα 4.1.3). Επίσης από την Πρόταση 3.3.5 τα σύνολα $\mathcal{S}_{1,\phi}, \mathcal{S}_{2,\phi}$ είναι CSL's. Εύκολα ελέγχεται ότι $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi})$ και άρα

$$\begin{aligned}\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi}) &\Rightarrow [\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*}\mathcal{U} \subset [\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi})]^{-w^*} \\ &\Rightarrow \mathcal{U} \subset [\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi})]^{-w^*}.\end{aligned}$$

Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι $\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi}) \subset \mathcal{U}$ και άρα έχουμε τελικά την ισότητα:

$$\mathcal{U} = [\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi})]^{-w^*}.$$

$(i) \Rightarrow (iv)$
Η απόδειξη είναι όμοια με την προηγούμενη απόδειξη ($(i) \Rightarrow (iii)$).

$(iii) \Rightarrow (i)$
Έστω $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ masas, $\mathcal{M}$ ένα $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1$ πρότυπο που είναι ουσιώδες TRO και $\mathcal{S}_1$ ένα CSL έτσι ώστε $(\mathcal{S}_1)' = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$, $\mathcal{U} = [\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*}$.

Επειδή $\mathcal{D}_2\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ έχουμε $\mathcal{D}_2\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Έστω $\chi = \mathrm{Map}(\mathcal{M})$. Επειδή $\mathcal{M}\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{M}$ έχουμε $\mathcal{S}_{1,\chi} \subset \mathcal{D}_1$ και συνεπώς $\mathcal{D}_1 \subset (\mathcal{S}_{1,\chi})'$. Αλλά από το Θεώρημα 4.1.1 έχουμε $[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} = (\mathcal{S}_{1,\chi})'$, από το οποίο προκύπτει $\mathcal{D}_1 \subset (\mathcal{S}_1)' \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{U}\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{U}$.

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ισχύει $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) = [\mathcal{M}^*\mathcal{U}]^{-w^*}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{M}^*\mathcal{U} \subset [\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*} \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)$$

επειδή $(\mathcal{S}_1)' \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)$. Για την αντίθετη κατεύθυνση έχουμε ότι

$$\mathcal{M}^*\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{M}^*\mathcal{U} \Rightarrow [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) \subset [\mathcal{M}^*\mathcal{U}]^{-w^*}$$

από το οποίο παίρνουμε τελικά $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) \subset [\mathcal{M}^*\mathcal{U}]^{-w^*}$.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι ανακλαστικό. Έστω $T \in \mathrm{Ref}(\mathcal{U})$ και $M \in \mathcal{M}$. Για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$ έχουμε

$$L^\perp M^*\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)L = 0 \Rightarrow L^\perp M^*\mathcal{U}L = 0 \Rightarrow L^\perp M^*TL = 0.$$

Αποδείξαμε ότι $\mathcal{M}^*\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)$ από το οποίο έχουμε

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^*\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{U} \Rightarrow [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$$

και άρα $\mathrm{Ref}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

Απομένει να δείξουμε ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης. Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U}), \zeta = \mathrm{Map}(\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1))$. Επειδή $\mathcal{U} = [\mathcal{M}\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*}$ έχουμε $\phi = \chi \circ \zeta$. Έπεται ότι $\phi(L) = \chi(L)$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. Επίσης $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'') = \mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})')$. Αλλά από το Θεώρημα 4.1.1 έχουμε $\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})')$. Συνεπάγεται ότι η απεικόνιση $\chi|_{\mathcal{S}_1}$ είναι ισομορφισμός συνδέσμων επί του $\mathcal{S}_2 = \chi(\mathcal{S}_1)$. Επομένως η απεικόνιση $\phi|_{\mathcal{S}_1}$ είναι ισομορφισμός επί του $\mathcal{S}_2$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1^\perp)\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}^*$. Συνεπάγεται ότι αν E είναι προβολή τότε

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1^\perp)\phi^*(E)(H_1) \subset \phi^*(E)(H_1) \Rightarrow \phi^*(E) \in \mathcal{S}_1^\perp$$

από την ανακλαστικότητα του συνδέσμου $\mathcal{S}^\perp$. Αποδείξαμε ότι $\mathcal{S}_{2,\phi^*} \subset \mathcal{S}_1^\perp$ και άρα $\mathcal{S}_{1,\phi} \subset \mathcal{S}_1$. Έπεται ότι

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P)^\perp TP = 0 \ \text{ για κάθε } \ P \in \mathcal{S}_1\}.$$

Επειδή η απεικόνιση $\phi|_{\mathcal{S}_1}$ είναι ισομορφισμός επί του $\mathcal{S}_2 = \chi(\mathcal{S}_1)$ από το Θεώρημα 2.4.4 έχουμε ότι $\mathcal{S}_{1\phi} = \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{2,\phi} = \mathcal{S}_2$. Επομένως

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\chi : \mathcal{P}(\mathcal{S}_1'') \to \mathcal{P}(\mathcal{S}_2'')$ είναι ορθοισομορφισμός συνδέσμων και επέκταση της $\phi|_{\mathcal{S}_1}$. Από το Λήμμα 4.2.1 έπεται ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδες TRO, αφού περιέχει το ουσιώδες TRO

$$\{T : TA = \rho(A)T \; \forall \; A \in (\mathcal{S}_1)''\},$$

όπου ρ είναι η επέκταση της χ στην von Neumann άλγεβρα $(\mathcal{S}_1)''$.

$(iv) \Rightarrow (i)$
Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της προηγούμενης κατεύθυνσης.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι η συνθήκη (iii) ισχύει. Θα δείξουμε ότι $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$. Έστω ϕ, (αντιστ. χ), (αντιστ. ζ) το Map του $\mathcal{U}$ (αντιστ. $\mathcal{M}$),(αντιστ. $\Delta(\mathcal{U})$). Έχουμε αποδείξει στην κατεύθυνση $(iii) \Rightarrow (i)$ ότι $\mathcal{S}_{1,\phi} = \mathcal{S}_1$ και $\phi|_{\mathcal{S}_1} = \chi|_{\mathcal{S}_1}$. Επειδή $\mathcal{S}_{1,\zeta} = \mathcal{P}((\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U}))')$ και $[\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*} = (\mathcal{S}_1)'$ συνεπάγεται ότι $\mathcal{S}_{1,\zeta} = \mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')$. Αλλά από την υπόθεση που έχουμε προκύπτει ότι $\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{P}((\mathcal{M}^*\mathcal{M})') = \mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')$. Επομένως έχουμε $\mathcal{S}_{1,\chi} = \mathcal{S}_{1,\zeta} = \mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')$.

Από την άλλη μεριά από το Θεώρημα 3.3.3 έχουμε ότι $\zeta|_{\mathcal{S}_1} = \phi|_{\mathcal{S}_1}$ και άρα $\zeta|_{\mathcal{S}_1} = \chi|_{\mathcal{S}_1}$. Επίσης η οικογένεια $\mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')$ είναι ο μικρότερος ορθοσύνδεσμος που περιέχει το CSL $\mathcal{S}_1$ και οι απεικονίσεις χ, ζ είναι ορθοισομορφισμοί. Το συμπέρασμα είναι ότι $\chi|_{\mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')} = \zeta|_{\mathcal{P}((\mathcal{S}_1)'')}$, από το οποίο προκύπτει $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$.

Παρόμοια αν η συνθήκη (iv) ισχύει μπορούμε να δείξουμε ότι $\Delta(\mathcal{U}) = \mathcal{N}$. $\square$

Στην προηγούμενη απόδειξη αποδείξαμε και την παρακάτω πρόταση την οποία απομονώνουμε ξεχωριστά.

Πρόταση 4.5.2 *Αν $\mathcal{U}$ είναι ανακλαστικό masa πρότυπο με ουσιώδη διαγώνιο και $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$ τότε $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{1,\phi}) = [\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}]^{-w^*}$ και $\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_{2,\phi}) = [\mathcal{U}\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*}$.*

Παρατήρηση 4.5.3 *Έστω $\mathcal{S}_i \subset B(H_i), i = 1, 2$ CSL's, $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ισομορφισμός συνδέσμων που σέβεται την συνέχεια και $\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(P)^\perp TP = 0 \text{ για κάθε } P \in \mathcal{S}_1\}$. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.3.1 ότι* *ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ παράγεται από μία μερική ισομετρία, δηλαδή υπάρχει μερική ισομετρία V έτσι ώστε $\Delta(\mathcal{U}) = [(\mathcal{S}_2)'V(\mathcal{S}_1)']^{-w^*}$. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι ο χώρος $\mathcal{U}$ παράγεται από μία μερική ισομετρία:*

$$\mathcal{U} = [(\mathcal{S}_2)'V\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1)]^{-w^*} = [\mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)V(\mathcal{S}_1)']^{-w^*}.$$

Πρόταση 4.5.4 *Έστω $\mathcal{U}$ ανακλαστικό masa πρότυπο με ουσιώδη διαγώνιο $\Delta(\mathcal{U})$. Τότε ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι μεγιστικό TRO μέσα στο $\mathcal{U}$.*

Απόδειξη Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει CSL $\mathcal{S}$ έτσι ώστε $\mathcal{U} = [\Delta(\mathcal{U})\mathrm{Alg}(\mathcal{S})]^{-w^*}, \mathrm{Alg}(\mathcal{S}) = [\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}]^{-w^*}$ και $(\mathcal{S})' = [\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}$. Έστω $\mathcal{N}$ TRO ώστε $\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{U}$ και $\mathcal{A} = [\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N}]^{-w^*}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N})(\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N})^*(\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N}) &= \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N}\mathcal{N}^*\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N} \\ &\subset \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{N}\mathcal{N}^*\mathcal{N} \subset \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι ο χώρος $\mathcal{A}$ είναι TRO. Επειδή το TRO $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδες $I \in \mathcal{A}$ και άρα ο χώρος $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα. Παρατηρούμε τώρα ότι $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N} \subset \Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U} \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{S})$. Επομένως $\mathcal{A} \subset (\mathcal{S})'$.

Έχουμε αποδείξει ότι $\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N} \subset (\mathcal{S})' = [\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}$, συνεπώς

$$\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{N} \subset \Delta(\mathcal{U}) \Rightarrow [\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*}\mathcal{N} \subset \Delta(\mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{N} \subset \Delta(\mathcal{U}).$$

$\square$

Στην παρατήρηση 3.5.7 δώσαμε παράδειγμα ανακλαστικού masa προτύπου που η διαγώνιος του μηδενίζεται. Στο παρακάτω Θεώρημα δείχνουμε ότι άν οι ημισύνδεσμοι του προτύπου είναι CSL's, η διαγώνιός του ποτέ δεν μηδενίζεται.

Θεώρημα 4.5.5 *Έστω $\mathcal{U}$ ανακλαστικό masa πρότυπο του οποίου οι ημισύνδεσμοι $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ είναι CSL's. Τότε η διαγώνιος του $\mathcal{U}$, $\Delta(\mathcal{U})$ είναι μη μηδενικό TRO.*

Απόδειξη Έστω $\phi = \mathrm{Map}(\mathcal{U})$. Αν τα CSL's $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, είναι συνεχή, από το Λήμμα 4.4.11 υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\rho : \mathcal{S}_1'' \to \mathcal{S}_2''$ ώστε $\rho|_{\mathcal{S}_1} = \phi$. Από το Λήμμα 4.2.1 έπεται ότι ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης.

Τώρα υποθέτουμε ότι τα CSL's έχουν άτομα. Συμβολίζουμε με P το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_1$ και με Q το sup των ατόμων του $\mathcal{S}_2$. Από το Λήμμα 4.4.8

υπάρχει $*$-ισομορφισμός $\theta : \mathcal{S}_1''|_P \to \mathcal{S}_2''|_Q$ ώστε $\theta(L|_P) = \phi(L)|_Q$ για κάθε $L \in \mathcal{S}_1$. Έπεται πάλι από το Λήμμα 4.2.1 ότι ο χώρος

$$\Delta(\theta) = \{T \in B(P(H_1), Q(H_2)) : TL|_P = \phi(L)|_Q T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}$$

είναι ουσιώδες TRO.
Μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο χώρος

$$\begin{bmatrix} \Delta(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset B(H_1, H_2)$$

είναι υπόχωρος του $\Delta(\mathcal{U})$. Επομένως $\Delta(\mathcal{U}) \neq 0$. □

4.6 Συνέπειες της TRO ισοδυναμίας CSL αλγεβρών

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι όλοι οι χώροι Χίλμπερτ είναι διαχωρίσιμοι. Στην παράγραφο 4.4 δείξαμε ότι αν δύο CSL's είναι ισόμορφα μέσω ενός ισομορφισμού που σέβεται την συνέχεια τότε οι αντίστοιχες άλγεβρες είναι TRO ισοδύναμες. Η TRO ισοδυναμία είναι μία στενή σχέση μεταξύ αλγεβρών. Περιγράψαμε μερικές συνέπειες αυτής της σχέσης στην παράγραφο 4.1. Εδώ περιγράφουμε μερικές συνέπειες στην ειδική περίπτωση των CSL αλγεβρών που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ.

Στην συνέχεια αυτής της παραγράφου σταθεροποιούμε χώρους Χίλμπερτ $H_i, i = 1, 2$ και CSL's $\mathcal{S}_i \subset B(H_i), i = 1, 2$. Έστω $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_1), \mathcal{B} = \mathrm{Alg}(\mathcal{S}_2)$. Υποθέτουμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες. Από το Θεώρημα 4.4.13 υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ που σέβεται την συνέχεια ώστε $\mathcal{A} \overset{\Delta(\mathcal{U})}{\sim} \mathcal{B}$ όπου

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \phi(L)^{\perp} TL = 0 \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}$$

και

$$\Delta(\mathcal{U}) = \{T : TL = \phi(L)T \text{ για κάθε } L \in \mathcal{S}_1\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος καλείται ισχυρά ανακλαστικός αν ισούται με την ανακλαστική θήκη των τελεστών τάξης 1 που περιέχει. Γνωρίζουμε ότι μία CSL άλγεβρα είναι ισχυρά ανακλαστική αν και μόνο άν ισούται με την w^* κλειστή γραμμική θήκη των τελεστών τάξης 1 που περιέχει.

Πρόταση 4.6.1 *Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά ανακλαστική αν και μόνο αν το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό αν και μόνο αν η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ισχυρά ανακλαστική.*

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε από τα 4.5.1, 4.5.2 ότι $\mathcal{U} = [\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}]^{-w^*}, (\mathcal{S}_1)' = [\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}$ και $\mathcal{A} = [\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}]^{-w^*}$.
Έστω $\mathcal{A} = [R_1(\mathcal{A})]^{-w^*}$. Παρατηρούμε ότι $\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A} \subset [\Delta(\mathcal{U})R_1(\mathcal{A})]^{-w^*} \subset [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$. Επομένως $\mathcal{U} \subset [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$ και άρα τελικά έχουμε την ισότητα $\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$.

Έστω $\mathcal{U}$ ισχυρά ανακλαστικό. Θα δείξουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά ανακλαστική. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A} = \mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U}))$.
Φανερά $\mathcal{A} \supset \mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U}))$. Έστω E, F προβολές έτσι ώστε

$$E\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U})F = 0 \Rightarrow E\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{U}F = 0 \Rightarrow E\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}F = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A} \subset \mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U}))$ και άρα

$$[\Delta(\mathcal{U})^*\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}\mathcal{A} \subset \mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U})).$$

Επειδή ο χώρος $\Delta(\mathcal{U})$ είναι ουσιώδης έχουμε ότι $\mathcal{A} \subset \mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})^*R_1(\mathcal{U}))$.

Η απόδειξη του ισχυρισμού $\mathcal{U}$ ισχυρά ανακλαστικό πρότυπο αν και μόνο αν η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ισχυρά ανακλαστική είναι ανάλογη. □

Πόρισμα 4.6.2 *Αν το πρότυπο $\mathcal{U}$ είναι ισχυρά ανακλαστικό τότε $\mathcal{U} = [R_1(\mathcal{U})]^{-w^*}$.*

Υπενθυμίζουμε, παράγραφος 2.4, ότι η προηγούμενη ισότητα δεν είναι αληθής για όλα τα ισχυρά ανακλαστικά masa πρότυπα.

Στη συνέχεια αν $\mathcal{C}$ είναι CSL άλγεβρα, συμβολίζουμε με $\mathrm{Rad}(\mathcal{C})$ το «ριζικό» της.

Πρόταση 4.6.3 *Έστω $\mathcal{J}_1 = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})^{-w^*}$ και $\mathcal{J}_2 = \mathrm{Rad}(\mathcal{B})^{-w^*}$. Τότε*

$$\mathcal{J}_1 \overset{\Delta(\mathcal{U})}{\sim} \mathcal{J}_2.$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε, Πόρισμα 3.4.3, ότι

$$\mathcal{J}_1 = [LTL^\perp : T \in \mathcal{A}, L \in \mathcal{S}_1]^{-w^*} \text{ και } \mathcal{J}_2 = [PSP^\perp : S \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{S}_2]^{-w^*}.$$

Έστω $M, N \in \Delta(\mathcal{U})$ και $T \in \mathcal{A}$ τότε $MLTL^{\perp}N^* = \phi(L)MTN^*\phi(L)^{\perp} \in \mathcal{J}_2$ επειδή $\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{B}$. Παίρνοντας γραμμική θήκη και w^* κλειστότητα έχουμε $MAN^* \in \mathcal{J}_2$ για κάθε $M, N \in \Delta(\mathcal{U})$ και $A \in \mathcal{J}_1$.
Αποδείξαμε ότι $\Delta(\mathcal{U})\mathcal{J}_1\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{J}_2$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι
$\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{J}_2\Delta(\mathcal{U}) \subset \mathcal{J}_1$. $\square$

Μία άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι ένα αποτέλεσμα στο [31].

Πόρισμα 4.6.4 *Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ημιαπλή αν και μόνο αν η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι ημιαπλή.*

Πόρισμα 4.6.5 *Έστω $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ όπως στην προηγούμενη πρόταση τότε $\mathcal{J}_1 = \mathcal{A}$ αν και μόνο αν $\mathcal{J}_2 = \mathcal{B}$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{J}_1 = \mathcal{A}$ τότε $(\mathcal{S}_1)' \subset \mathcal{J}_1$ και άρα $\Delta(\mathcal{U})(\mathcal{S}_1)'\Delta(\mathcal{U})^* \subset \Delta(\mathcal{U})\mathcal{J}_1\Delta(\mathcal{U})^* \subset \mathcal{J}_2$. Επειδή από την Πρόταση 4.1.6 $(\mathcal{S}_1)' \overset{\Delta(\mathcal{U})}{\sim} (\mathcal{S}_2)'$ έπεται ότι $(\mathcal{S}_2)' \subset \mathcal{J}_2$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι $\mathcal{J}_2 = \mathcal{B}$. $\square$

Πρόταση 4.6.6 *Έστω $\mathcal{A}_{min}(\mathcal{B}_{min})$ η μικρότερη w^* κλειστή άλγεβρα της οποίας η ανακλαστική θήκη ισούται με την άλγεβρα $\mathcal{A}, (\mathcal{B})$. Τότε*

$$\mathcal{A}_{min} \overset{\Delta(\mathcal{U})}{\sim} \mathcal{B}_{min}.$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι οι τελεστές E, F είναι προβολές ώστε

$$E\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^*F = 0.$$

Συνεπάγεται ότι

$$E\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}\Delta(\mathcal{U})^*F = 0.$$

Επειδή $\mathcal{A} \overset{\Delta(\mathcal{U})}{\sim} \mathcal{B}$ έχουμε ότι $E\mathcal{B}F = 0$. Αποδείξαμε ότι

$$\mathrm{Ref}(\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^*) = \mathcal{B}.$$

Επειδή ο χώρος $[\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*}$ είναι masa πρότυπο συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{B}_{min} \subset [\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*}.$$

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathcal{A}_{min} \subset [\Delta(\mathcal{U})^* \mathcal{B}_{min} \Delta(\mathcal{U})]^{-w^*}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^* \subset & [\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{B}_{min}\Delta(\mathcal{U})\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*} \\ \subset & [\Delta(\mathcal{B})\mathcal{B}_{min}\Delta(\mathcal{B})]^{-w^*} \subset \mathcal{B}_{min},\end{aligned}$$

και άρα έχουμε την ισότητα

$$[\Delta(\mathcal{U})\mathcal{A}_{min}\Delta(\mathcal{U})^*]^{-w^*} = \mathcal{B}_{min}.$$

Ανάλογα μπορεί να δειχθεί η ισότητα

$$[\Delta(\mathcal{U})^*\mathcal{B}_{min}\Delta(\mathcal{U})]^{-w^*} = \mathcal{A}_{min}. \qquad \square$$

Κεφάλαιο 5

Ισοδυναμία τύπου Morita για αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών

Στις αρχές της δεκαετίας του 70, ο M. Rieffel εισήγαγε [45] (βλέπε και το [46]) την έννοια της Morita ισοδυναμίας στην θεωρία τελεστών. Στο [45] εξετάζεται η ισοδυναμία των αναπαραστάσεων C^* και W^* αλγεβρών σε χώρους Χίλμπερτ. Με την ανάπτυξη της θεωρίας των αφηρημένων χώρων τελεστών γίνεται προσπάθεια να θεμελιωθεί η έννοια της Morita ισοδυναμίας στην κλάση των αφηρημένων αλγεβρών τελεστών. Στα [11] και [8] εξετάζεται η Morita ισοδυναμία μη αυτοσυζυγών αφηρημένων αλγεβρών τελεστών. Μέχρι σήμερα όμως, από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχει ολοκληρωμένη θεωρία περί Morita ισοδυναμίας αφηρημένων δυικών αλγεβρών τελεστών. Ένα βήμα προς αυτή την κατεύθυνση γίνεται στο [9] όπου γενικεύεται η έννοια των dual Hilbert modules από την αυτοσυζυγή στην μη αυτοσυζυγή περίπτωση. Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε μία διαφορετική προσέγγιση μελετώντας μία μορφή ισοδυναμίας των κατηγοριών των αναπαραστάσεων των αφηρημένων δυικών αλγεβρών τελεστών σε χώρους Χίλμπερτ. Η ισοδυναμία αυτή είναι ίδια με την ισοδυναμία που μελέτησε ο M. Rieffel στο [45] όταν οι άλγεβρες είναι αυτοσυζυγείς.

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών. Αυτές λέγονται Δ-ισοδύναμες αν υπάρχει συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που επεκτείνεται σε $*$-συναρτητή ισοδυναμίας μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$

και ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$. Με ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ εννοούμε την κατηγορία των normal αναπαραστάσεων της άλγεβρας $\mathcal{A}$ και με ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$ την κατηγορία που έχει ίδια αντικείμενα με την ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ αλλά ως μορφισμούς τις απεικονίσεις $\Delta(\mathcal{A})-$ προτύπων, όπου $\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ η διαγώνιος της άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Το βασικό αποτέλεσμα μας, που όπως δείχνουμε είναι γενίκευση του βασικού αποτελέσματος του [45], είναι ότι δύο μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν πλήρως ισομετρικές normal αναπαραστάσεις α, β ώστε οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες. Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρησιμοποιούμε στην μία κατεύθυνση (παράγραφος 5.1) την έννοια των καθολικών αντικειμένων και κάποιες ιδιότητες τους που μελετήθηκαν στο [13]. Για την αντίστροφη κατεύθυνση (παράγραφοι 5.2 ως 5.5) υποθέτοντας ότι οι άλγεβρες έχουν πλήρως ισομετρικές normal αναπαραστάσεις με εικόνες TRO ισοδύναμες άλγεβρες κατασκευάζουμε ένα συναρτητή που απεικονίζει τον εκάστοτε χώρο Χίλμπερτ H σε ένα χώρο που παράγεται παίρνοντας τανυστικό γινόμενο του H με ένα πρότυπο $\mathcal{U}$ πάνω στις άλγεβρες. Το πρότυπο $\mathcal{U}$ «παράγεται» από το TRO που υλοποιεί την TRO ισοδυναμία. Εισάγουμε στον χώρο $\mathcal{U} \otimes H$ νόρμα που σέβεται την δομή χώρου τελεστών των αλγεβρών και καθιστά δυνατή την αναπαράσταση της δεύτερης άλγεβρας σε αυτόν.

Στην παράγραφο 5.6 μελετάμε ιδιότητες που έχουν οι συναρτητές ισοδυναμίας. Δείχνουμε ότι κάθε συναρτητής ισοδυναμίας είναι ισοδύναμος με ένα συναρτητή που «παράγεται» από ένα πρότυπο πάνω στις άλγεβρες, είναι normal, πλήρως ισομετρικός και απεικονίζει πλήρως ισομετρικές αναπαραστάσεις σε πλήρως ισομετρικές. Είναι ενδιαφέρον ακόμα ότι κάθε συναρτητής ισοδυναμίας απεικονίζει τους συνδέσμους των αναλλοίωτων υπόχωρων των αναπαραστάσεων της μίας άλγεβρας επί αυτών της άλλης, ενώ απεικονίζει ανακλαστικές άλγεβρες σε ανακλαστικές άλγεβρες.

Στην παράγραφο 5.7 δίνουμε παραδείγματα Δ-ισοδύναμων αλγεβρών και αλγεβρών που δεν είναι Δ- ισοδύναμες. Δείχνουμε ότι δύο CSL άλγεβρες είναι Δ- ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι TRO ισοδύναμες. Δύο CSL άλγεβρες με συνεχείς η ολικά ατομικά συνδέσμους που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ισόμορφους συνδέσμους. Δείχνουμε ότι ένας ισομορφισμός μεταξύ nests δεν επάγει κατ΄ ανάγκη Δ-ισοδυναμία των αντίστοιχων αλγεβρών ακόμα και στην περίπτωση που οι nest άλγεβρες είναι όμοιες και έχουν ισόμορφες διαγωνίους. Παρόλα αυτά, αν δύο nest άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι όμοιες, υπάρχει συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F} :\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \rightarrow$

${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που είναι normal και πλήρως ισομετρικός.

Παρουσιάζουμε ορισμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται σε αυτή την παράγραφο. Αν $\mathcal{U}$ είναι γραμμικός χώρος και $n, m \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $M_{n,m}(\mathcal{U})$ τον χώρο των $n \times m$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathcal{U}$ και με $M_n(\mathcal{U})$ τον χώρο $M_{n,n}(\mathcal{U})$. Αν $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ είναι γραμμικοί χώροι, α γραμμική απεικόνιση απο τον $\mathcal{U}$ στον $\mathcal{V}$ και $n, m \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε την γραμμική απεικόνιση

$$M_{n,m}(\mathcal{U}) \to M_{n,m}(\mathcal{V}) : (A_{ij})_{i,j} \to (\alpha(A_{ij}))_{i,j}$$

επίσης με α. Αν $\mathcal{U}$ είναι υπόχωρος του $B(H, K)$ όπου H, K χώροι Χίλμπερτ, εφοδιάζουμε τον χώρο $M_{n,m}(\mathcal{U})$, $n, m \in \mathbb{N}$ με την νόρμα που κληρονομείται από την εμφύτευση $M_{n,m}(\mathcal{U}) \subset B(H^n, K^m)$. Αν $x_1, ..., x_n$ είναι διανύσματα γραμμικού χώρου $\mathcal{V}$, συμβολίζουμε με $(x_1, ..., x_n)^t$ το αντίστοιχο διάνυσμα στήλη στον χώρο $M_{n,1}(\mathcal{V})$.

5.1 Το βασικό θεώρημα

Ορίζουμε την κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ για την αφηρημένη δυική άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ [10]: Ένας χώρος Χίλμπερτ H είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ αν υπάρχει μία απεικόνιση $\alpha : \mathcal{A} \to B(H)$ που είναι μοναδιαίος αλγεβρικός μορφισμός πλήρης συστολή και w^*-συνεχής. Θα καλούμε αυτή την απεικόνιση **normal αναπαράσταση** της $\mathcal{A}$. Συχνά θα συμβολίζουμε αυτό το αντικείμενο με (H, α). Αν $(H_i, \alpha_i), i = 1, 2$ είναι αντικείμενα της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ ο χώρος των μορφισμών $Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$ είναι ο ακόλουθος:

$$Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2) = \{T \in B(H_1, H_2) : T\alpha_1(A) = \alpha_2(A)T \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}\}.$$

Παρατήρησε ότι η απεικόνιση $\alpha_i|_{\Delta(\mathcal{A})}$ είναι $*$-μορφισμός αφού η απεικόνιση $\alpha_i, i = 1, 2$ είναι συστολή.

Επίσης ορίζουμε την κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$ που έχει τα ίδια αντικείμενα με την κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ αλλά για κάθε ζεύγος αντικειμένων $(H_i, \alpha_i), i = 1, 2$ ο χώρος των μορφισμών $Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ είναι ο ακόλουθος:

$$Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2) = \{T \in B(H_1, H_2) : T\alpha_1(A) = \alpha_2(A)T \text{ για κάθε } A \in \Delta(\mathcal{A})\}.$$

Αν η $\mathcal{A}$ είναι W^*-άλγεβρα οι κατηγορίες ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$ είναι ίδιες. Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος αντικειμένων H_1, H_2 ισχύει:

$$Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2) \subset Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2).$$

Ορισμός 5.1.1 *Έστω $\mathcal{A},\mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών και $\mathcal{F}:\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\to\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ συναρτητής. Λέμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}$ έχει Δ-επέκταση αν υπάρχει ένας συναρτητής*

$$\mathcal{G}:\ {}_{A}\mathfrak{DM}\longrightarrow\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$$

ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} & \hookrightarrow & {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \\ \mathcal{F}\downarrow & & \mathcal{G}\downarrow \\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M} & \hookrightarrow & {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM} \end{array}$$

Ορισμός 5.1.2 *Έστω $\mathcal{A},\mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών και*
$\mathcal{F}:\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}\to\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ ένας συναρτητής. Λέμε ότι ο $\mathcal{F}$ είναι $*$-συναρτητής αν για κάθε H_1,H_2 αντικείμενα της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$ και για κάθε $F\in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1,H_2)$ ισχύει

$$\mathcal{F}(F^*)=\mathcal{F}(F)^*\in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H_2),\mathcal{F}(H_1)).$$

Ορισμός 5.1.3 *Έστω $\mathcal{A},\mathcal{B}$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών. Αν υπάρχει συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}:\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\to\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που έχει Δ-επέκταση $*$-συναρτητή που επάγει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$, τις καλούμε **$\Delta$-ισοδύναμες** άλγεβρες.*

Στην θεωρία του Rieffel [45] δύο W^*-άλγεβρες $\mathcal{A},\mathcal{B}$ καλούνται Morita ισοδύναμες αν υπάρχει $*$-συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}:\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\to\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$. Επομένως είναι Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι Δ-ισοδύναμες σύμφωνα με τον δικό μας ορισμό. Διατυπώνουμε το θεώρημα του Connes [10], που είναι ισοδύναμο με το βασικό θεώρημα του Rieffel για την Morita ισοδυναμία των W^*-αλγεβρών:

Θεώρημα 5.1.1 *(**Connes**:) Δύο W^*-άλγεβρες $\mathcal{A},\mathcal{B}$ είναι Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν πιστές normal αναπαραστάσεις α,β σε χώρους Χίλμπερτ ώστε οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}),\beta(\mathcal{B})$ να έχουν ισόμορφους μεταθέτες.*

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.3 το θεώρημα του Connes έχει την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση:

Θεώρημα 5.1.2 *Οι W^*-άλγεβρες $\mathcal{A},\mathcal{B}$ είναι Morita ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν πιστές normal αναπαραστάσεις α,β σε χώρους Χίλμπερτ ώστε οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}),\beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες.*

Το δικό μας βασικό θεώρημα που κατά προφανή τρόπο είναι γενίκευση του βασικού θεωρήματος του Rieffel είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.1.3 *Οι μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν normal και πλήρως ισομετρικές αναπαραστάσεις α, β ώστε οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες.*

Θα δώσουμε την απόδειξη της μίας κατεύθυνσης του Θεωρήματος 5.1.3 σε αυτή την παράγραφο. Χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και μερικά αποτελέσματα απο το [13]. Έστω $\mathcal{A}$ μοναδιαία αφηρημένη δυική άλγεβρα τελεστών dual operator άλγεβρα. Καλούμε ένα αντικείμενο K που περιέχεται σε ένα αντικείμενο H της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ $\mathcal{A}$-συμπληρωματικό στο H αν η προβολή του H επί του K ανήκει στον χώρο $Hom_{\mathcal{A}}(H, H)$. Καλούμε το αντικείμενο H $\mathcal{A}$-**καθολικό** αν κάθε αντικείμενο K της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ είναι ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$-ισομορφικό με ένα $\mathcal{A}$-συμπληρωματικό αντικείμενο μέσα σε ένα ευθύ άθροισμα αντιγράφων του H.

Στο [13] αποδεικνύεται ότι υπάρχουν $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενα και ότι αν (H, α) είναι $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενο, τότε η απεικόνιση α είναι πλήρης ισομετρία και ισχύει $\alpha(\mathcal{A}) = \alpha(\mathcal{A})''$. Επίσης αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία W^*-άλγεβρα $W^*(\mathcal{A})$ και ένας w^*-συνεχής πλήρως ισομετρικός μορφισμός $j : \mathcal{A} \to W^*(\mathcal{A})$ του οποίου η εικόνα παράγει την $W^*(\mathcal{A})$ ως W^*-άλγεβρα με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: δοθείσης μίας normal αναπαράστασης $\alpha : \mathcal{A} \to B(H)$, υπάρχει μία μοναδική normal $*$-αναπαράσταση $\widetilde{\alpha} : W^*(\mathcal{A}) \to B(H)$ που επεκτείνει την α. Ένα αντικείμενο H είναι $\mathcal{A}$-καθολικό αν και μόνο αν είναι $W^*(\mathcal{A})$-καθολικό.

Σταθεροποιούμε μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ που είναι Δ- ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχει ένας συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}$: ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που έχει Δ-επέκταση $*$-συναρτητή που επάγει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$ και ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$. Συμβολίζουμε την Δ-επέκταση ξανά με $\mathcal{F}$. Θα δείξουμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ έχουν normal και πλήρως ισομετρικές αναπαραστάσεις με εικόνες TRO ισοδύναμες. Χρειαζόμαστε το Λήμμα 5.1.5 και την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.1.4 *Ο περιορισμός του συναρτητή $\mathcal{F}$ στην κατηγορία ${}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M}$ είναι $*$-συναρτητής και ορίζει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M}$ και ${}_{W^*(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$.*

Απόδειξη Έστω $T \in Hom_{W^*(\mathcal{A})}(H_1, H_2)$, θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{F}(T)$ ανήκει στον χώρο $Hom_{W^*(\mathcal{B})}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$. Υποθέτουμε ότι $\alpha_i : \mathcal{A} \to B(H_i), \beta_i : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}(H_i))$, $i = 1, 2$ είναι οι αντίστοιχες normal αναπαραστάσεις. Επίσης, έστω $\widetilde{\alpha_i} : W^*(\mathcal{A}) \to B(H_i), \widetilde{\beta_i} : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}(H_i)), i = 1, 2$ οι οριζόμενες επεκτάσεις.

Έχουμε

$$T\widetilde{\alpha_1}(A) = \widetilde{\alpha_2}(A)T \Rightarrow T^*\widetilde{\alpha_2}(A) = \widetilde{\alpha_1}(A)T^* \ \forall \ A \in W^*(\mathcal{A})$$

και άρα $T^*\alpha_2(A) = \alpha_1(A)T^*$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{F}(T^*)\beta_2(B) = \beta_1(B)\mathcal{F}(T^*)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι $*$-συναρτητής έχουμε

$$\mathcal{F}(T)^*\beta_2(B) = \beta_1(B)\mathcal{F}(T)^* \Rightarrow \widetilde{\beta_2}(B^*)\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T)\widetilde{\beta_1}(B^*) \ \forall \ B \in \mathcal{B}.$$

Επειδή $\mathcal{F}(T) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$ έχουμε $\beta_2(B)\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T)\beta_1(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Συνεπάγεται ότι $\mathcal{F}(T) \in Hom_{W^*(\mathcal{B})}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$.

Αν K είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M}$ τότε είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και άρα το $\mathcal{F}(K)$ είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ από το οποίο έπεται ότι είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{W^*(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ένα συναρτητή $\mathcal{G} : {}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M} \to {}_{W^*(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$ ο οποίος στέλνει κάθε αντικείμενο K στο $\mathcal{F}(K)$ και κάθε μορφισμό T στον μορφισμό $\mathcal{F}(T)$. Ο $\mathcal{G}$ είναι φανερά $*$-συναρτητής. Θα δείξουμε ότι είναι συναρτητής ισοδυναμίας. Έστω $H_i, \alpha_i, \widetilde{\alpha_i}, \beta_i, \widetilde{\beta_i}, i = 1, 2$ όπως προηγούμενα. Η απεικόνιση

$$\mathcal{G} : Hom_{W^*(\mathcal{A})}(H_1, H_2) \to Hom_{W^*(\mathcal{B})}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$$

είναι 1-1 ως περιορισμός της $\mathcal{F}$. Θα δείξουμε ότι είναι επί.

Έστω $S \in Hom_{W^*(\mathcal{B})}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))$ αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{F}^{-1}(S) \in Hom_{W^*(\mathcal{A})}(H_1, H_2)$. Έχουμε

$$S\widetilde{\beta_1}(B^*) = \widetilde{\beta_2}(B^*)S \ \forall \ B \in W^*(\mathcal{B}) \Rightarrow \beta_1(B)S^* = S^*\beta_2(B) \ \forall \ B \in \mathcal{B}.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $\alpha_1(A)\mathcal{F}^{-1}(S^*) = \mathcal{F}^{-1}(S^*)\alpha_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι $*$-συναρτητής έχουμε

$$\alpha_1(A)\mathcal{F}^{-1}(S)^* = \mathcal{F}^{-1}(S)^*\alpha_2(A) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(S)\widetilde{\alpha_1}(A^*) = \widetilde{\alpha_2}(A^*)\mathcal{F}^{-1}(S) \ \forall \ A \in \mathcal{A}.$$

Επειδή $\mathcal{F}^{-1}(S) \in Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$, έπεται ότι $\mathcal{F}^{-1}(S) \in Hom_{W^*(\mathcal{A})}(H_1, H_2)$.

Υποθέτουμε ότι K είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{W^*(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$. Μπορούμε να βλέπουμε το K σαν αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$. Επειδή ο $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ είναι συναρτητής ισοδυναμίας υπάρχει αντικείμενο H της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και μοναδιαίος τελεστής $U \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H), K)$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο τελεστής U ανήκει στον χώρο $Hom_{W^*(\mathcal{B})}(\mathcal{F}(H), K)$. Έπεται από το Θεώρημα 2.10.1 ότι ο $\mathcal{G}$ είναι $*$-συναρτητής ισοδυναμίας. $\Box$

Λήμμα 5.1.5 *Αν H είναι ένα $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενο τότε το $\mathcal{F}(H)$ είναι $\mathcal{B}$-καθολικό.*

Απόδειξη Αν H είναι $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενο είναι $W^*(\mathcal{A})$-καθολικό αντικείμενο επίσης. Από την προηγούμενη πρόταση λόγω του συναρτητή ισοδυναμίας

$$\mathcal{G} : {}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M} \to {}_{W^*(\mathcal{B})}\mathfrak{M},$$

το $\mathcal{F}(H)$ είναι $W^*(\mathcal{B})$-καθολικό αντικείμενο [45] και συνεπώς είναι $\mathcal{B}$-καθολικό. $\Box$

Τώρα επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3. Επιλέγουμε ένα $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενο (H, α) και υποθέτουμε ότι $(\mathcal{F}(H), \beta)$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο. Από το προηγούμενο λήμμα αυτό είναι $\mathcal{B}$-καθολικό. Όπως σημειώσαμε στην συζήτηση πριν από την Πρόταση 5.1.4 οι normal αναπαραστάσεις α, β είναι πλήρεις ισομετρίες και οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ έχουν την ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη: $\alpha(\mathcal{A}) = \alpha(\mathcal{A})'', \beta(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{B})''$. Συμβολίζουμε με σ την απεικόνιση

$$\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H) = \alpha(\Delta(\mathcal{A}))' \to \beta(\Delta(\mathcal{B}))' = Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(H)).$$

Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ είναι $*$-συναρτητής ισοδυναμίας αυτή η απεικόνιση είναι $*$-ισομορφισμός. Από την ιδιότητα της Δ-επέκτασης η σ απεικονίζει τον χώρο $Hom_{\mathcal{A}}(H, H) = \alpha(\mathcal{A})'$ εντός του $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(H)) = \beta(\mathcal{B})'$. Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ είναι συναρτητής ισοδυναμίας έχουμε $\sigma(\alpha(\mathcal{A})') = \beta(\mathcal{B})'$.

Ορίζουμε τον χώρο

$$\mathcal{M} = \{M : MA = \sigma(A)M \text{ για κάθε } A \in \alpha(\Delta(\mathcal{A}))'\}.$$

Από το Λήμμα 4.2.1 αυτός ο χώρος είναι ένα ουσιώδες TRO. Επιλέγουμε $M, N \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{B}$. Για κάθε $A \in \alpha(\mathcal{A})'$ έχουμε $M^*\beta(B)NA = M^*\beta(B)\sigma(A)N$.

Επειδή $\sigma(A) \in \beta(\mathcal{B})'$ ο τελευταίος τελεστής ισούται με τον $M^*\sigma(A)\beta(B)N = AM^*\beta(B)N$. Αποδείξαμε ότι $\mathcal{M}^*\beta(\mathcal{B})\mathcal{M} \subset \alpha(\mathcal{A})$. Ανάλογα μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathcal{M}\alpha(\mathcal{A})\mathcal{M}^* \subset \beta(\mathcal{B})$. Από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε ότι $\alpha(\mathcal{A}) \overset{\mathcal{M}}{\sim} \beta(\mathcal{B})$. Η απόδειξη της μίας κατεύθυνσης του Θεωρήματος 5.1.3 έχει ολοκληρωθεί.

Συμβολισμοί 5.1.6 Στις παραγράφους από 5.2 μέχρι 5.5 θα συμπληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3. Σταθεροποιούμε για τις παραγράφους αυτές τις μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι είναι υπόχωροι των χώρων $B(H_0), B(K_0)$ αντίστοιχα, όπου οι H_0, K_0 είναι χώροι Χίλμπερτ. Επίσης υποθέτουμε ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι TRO ισοδύναμες. Δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα TRO $\mathcal{M} \subset B(H_0, K_0)$ ώστε
$$[\mathcal{M}^*\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*} = \mathcal{A}, \ \ [\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}^*]^{-w^*} = \mathcal{B}.$$
Από την Πρόταση 4.1.9 το $\mathcal{M}$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι w^* κλειστό και να ικανοποιεί τις σχέσεις
$$[\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*} = \Delta(\mathcal{A}), \ \ [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*} = \Delta(\mathcal{B}).$$
Επίσης ορίζουμε τους ακόλουθους χώρους
$$\mathcal{U} = [\mathcal{B}\mathcal{M}]^{-w^*}, \quad \mathcal{V} = [\mathcal{M}^*\mathcal{B}]^{-w^*}.$$
Εύκολα ελέγχεται ότι
$$\mathcal{U} = [\mathcal{M}\mathcal{A}]^{-w^*}, \quad \mathcal{V} = [\mathcal{A}\mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$
Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.4 προκύπτουν οι σχέσεις:
$$\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{U}, \ \ \mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{B} \subset \mathcal{V} \ \text{ και } \ [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} = \mathcal{A}, \ \ [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*} = \mathcal{B}.$$

5.2 Χώροι και νόρμες

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ όπως στους συμβολισμούς 5.1.6. Υποθέτουμε ότι (H, α) είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$. Επιλέγουμε $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ορίζεται τότε η διγραμμική απεικόνιση:
$$\mathcal{U} \times H \to H^n : (T, x) \to \alpha(ST)x.$$

Ως συνέπεια ορίζεται γραμμική απεικόνιση από το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{U} \otimes H$ στον χώρο Χίλμπερτ H^n, που δίδεται από τον τύπο:

$$\mathcal{U} \otimes H \to H^n : T \otimes x \to \alpha(ST)x.$$

Στον χώρο $\mathcal{U} \otimes H$ ορίζεται μία sesqulinear μορφή, που δίδεται από τον τύπο:

$$\langle T_1 \otimes x_1, T_2 \otimes x_2 \rangle_S = \langle \alpha(ST_1)x_1, \alpha(ST_2)x_2 \rangle_{H^n}.$$

Αν $\mathcal{L}_S = \{z \in \mathcal{U} \otimes H : \langle z, z \rangle_S = 0\}$ ο χώρος $\mathcal{U} \otimes H/\mathcal{L}_S$ γίνεται ένας προ-Χίλμπερτ χώρος. Συμβολίζουμε την πλήρωσή του με H_S και την επαγόμενη νόρμα με $\| \cdot \|_S$. Επίσης συμβολίζουμε την απεικόνιση πηλίκο $\mathcal{U} \otimes H \to H_S$ με π_S. Ξανά στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{U} \otimes H$ ορίζουμε την ακόλουθη ημινόρμα:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_S$$

Αυτή η ημινόρμα είναι καλά ορισμένη επειδή

$$\|\alpha(ST_j)\| \leq \|T_j\|, j = 1, ..., m \Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_S \leq \sum_{j=1}^{m} \|T_j\| \|x_j\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$.

Επειδή η νόρμα $\| \cdot \|_S$ ικανοποιεί την ταυτότητα του παραλληλογράμμου για κάθε S, η προηγούμενη ημινόρμα ικανοποιεί την ταυτότητα του παραλληλογράμμου επίσης. Αν $\mathcal{L} = \{z \in \mathcal{U} \otimes H : \|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = 0\}$ ο χώρος $\mathcal{U} \otimes H/\mathcal{L}$ γίνεται ένας προ-Χίλμπερτ χώρος. Συμβολίζουμε την πλήρωσή του με $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ και χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\| \cdot \|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$ για την νόρμα του. Συμβολίζουμε την απεικόνιση πηλίκο $\mathcal{U} \otimes H \to \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ με π.

Λήμμα 5.2.1 *Υπάρχουν μερικές ισομετρίες* $\{W_k, k \in J\} \subset \mathcal{M}$ $(\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M})$ *ώστε* $W_k^* W_k \perp W_m^* W_m (V_k V_k^* \perp V_m V_m^*)$ *για* $k \neq m$ *και* $I = \sum_k \oplus W_k^* W_k (I = \sum_k \oplus V_k V_k^*)$.

Απόδειξη Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστική οικογένεια από μερικές ισομετρίες (W_k) του χώρου $\mathcal{M}$ ώστε $W_k^* W_k \perp W_m^* W_m$ για $k \neq m$. Υποθέτουμε ότι $\sum_k \oplus W_k^* W_k < I$. Συμβολίζουμε με P τον τελεστή $I - \sum_k \oplus W_k^* W_k$. Επειδή το $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες TRO ο χώρος $\mathcal{M}P$ είναι ένα μη μηδενικό TRO. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.6.3 μπορούμε να επιλέξουμε μία μη μηδενική μερική ισομετρία $W \in \mathcal{M}P$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την μεγιστικότητα της οικογένειας (W_k) επειδή $W^*W \leq P$. Επομένως $I = \sum_k \oplus W_k^* W_k$. Ανάλογα εργαζόμαστε με την οικογένεια (V_k). $\square$

Το προηγούμενο λήμμα ήταν γνωστό στο [50] στην περίπτωση των διαχωρίσιμων χώρων Χίλμπερτ. Αργότερα διαπιστώσαμε ότι στην γενική περίπτωση, όπως το διατυπώνουμε εμείς, είχε αποδειχθεί από τον Paschke. Δες για παράδειγμα το 8.5.23 στο [10].

Με την επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$ χρησιμοποιώντας τους τελεστές

$$\{S : S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*)), n \in \mathbb{N}\}$$

.

Πρόταση 5.2.2 *Για κάθε επιλογή* $T_1, ..., T_m \in \mathcal{U}, x_1, ..., x_m \in H, m \in \mathbb{N}$ *έχουμε*

$$\left\| \sum_{j=1}^m T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*)), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^m T_j \otimes x_j \right\|_S$$

Απόδειξη Αν $\epsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$ ώστε

$$\left\| \sum_{j=1}^m T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} - \epsilon < \left\| \sum_{j=1}^m \alpha(ST_j)(x_j) \right\|_{H^n} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Έστω $y \in H^n, \|y\| = 1$ ώστε

$$\left\| \sum_{j=1}^m \alpha(ST_j) x_j \right\|_{H^n} = \left| \left\langle \sum_{j=1}^m \alpha(ST_j)(x_j), y \right\rangle \right|.$$

Θεωρούμε τις μερικές ισομετρίες $\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M}$ από το Λήμμα 5.2.1. Επειδή η απεικόνιση α είναι w^*-συνεχής έχουμε ότι

$$\lim_{E \subset I, \text{ finite}} \left\langle \sum_{j=1}^m \alpha \left(S \sum_{k \in E} V_k V_k^* T_j \right) (x_j), y \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \alpha \left(ST_j \right) (x_j), y \right\rangle.$$

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μερικές ισομετρίες $\{V_1, ..., V_N\} \subset \mathcal{M}$ ώστε ο τελεστής $\sum_{i=1}^{N} V_i V_i^*$ να είναι προβολή και

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha(ST_j)(x_j) \right\|_{H^n} - \frac{\epsilon}{2} \leq \left| \left\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha \left(S \sum_{k=1}^{N} V_k V_k^* T_j \right)(x_j), y \right\rangle \right|$$
$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha \left(S \sum_{k=1}^{N} V_k V_k^* T_j \right)(x_j) \right\|_{H^n} = \left\| \alpha(S(V_1, ..., V_N)) \sum_{j=1}^{m} \alpha((V_1^*, ..., V_N^*)^t T_j)(x_j) \right\|_{H^n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|(V_1, ..., V_N)\|^2 = \|(V_1^*, ..., V_N^*)^t\|^2$$
$$= \|(V_1, ..., V_N)(V_1^*, ..., V_N^*)^t\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^* \right\| = 1$$

Επομένως αφού η α είναι πλήρης συστολή έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} - \epsilon < \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha((V_1^*, ..., V_N^*)^t T_j)(x_j) \right\|_{H^n}$$
$$\leq \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*)), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_S$$

Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$ έχουμε

$$\|\pi_S(\xi)\|_S \leq \|\pi(\xi)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}, \xi \in \mathcal{U} \otimes H.$$

Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση $\pi(\xi) \to \pi_S(\xi)$ είναι καλά ορισμένη και επεκτείνεται στις αντίστοιχες πληρώσεις. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.1 Αν $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$ η απεικόνιση

$$\theta_S : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H) \to H_S$$

είναι η μοναδική συστολή που ικανοποιεί την σχέση $\theta_S(\pi(\xi)) = \pi_S(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathcal{U} \otimes H$.

Λήμμα 5.2.3

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H) = [\theta_S^*(\pi_S(T \otimes x)) : S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), m \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{U}, x \in H]^-$$

Απόδειξη Έστω $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι

$$\|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \|\theta_S(z)\|_S. \tag{5.2.1}$$

Είναι προφανές ότι

$$\|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \geq \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \|\theta_S(z)\|_S.$$

Για $\epsilon > 0$ υπάρχει $\xi \in \mathcal{U} \otimes H$ ώστε

$$\|z - \pi(\xi)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.2.2}$$

Συνεπάγεται ότι $\|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} - \frac{\epsilon}{2} < \|\pi(\xi)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$.

Από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V}))$ ώστε

$$\|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} - \frac{\epsilon}{2} < \|\pi_S(\xi)\|_S = \|\theta_S(\pi(\xi))\|_S.$$

Από την ανισότητα (5.2.2) παίρνουμε ότι

$$\|\theta_S(z) - \theta_S(\pi(\xi))\|_S < \frac{\epsilon}{2}$$

και άρα

$$\|\theta_S(\pi(\xi))\|_S < \|\theta_S(z)\|_S + \frac{\epsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ανισότητες, έχουμε τελικά

$$\|z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} < \|\theta_S(z)\|_S + \epsilon.$$

Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο η ισότητα (5.2.1) ισχύει.

Έστω τώρα $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ τέτοιο ώστε $\langle \theta_S^*(\pi_S(T \otimes x)), z \rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}, S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), T \in \mathcal{U}, x \in H$. Έπεται ότι $\langle \pi_S(T \otimes x), \theta_S(z) \rangle_{H_S} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}, S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), T \in \mathcal{U}, x \in H$. Επομένως $\theta_S(z) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}, S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V}))$ και άρα από την εξίσωση (5.2.1) $z = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θα δείξουμε παρακάτω ότι ο χώρος $\pi(\mathcal{M} \otimes H)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$. Στην πράξη χρειαζόμαστε το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Λήμμα 5.2.4 *Έστω $L \in \mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))$. Αν $T \in \mathcal{U}$ και $x \in H$ τότε*

$$\pi(T \otimes L(x)) \in [\pi(N \otimes L(y)) : N \in \mathcal{M}, y \in H]^{-\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Απόδειξη Στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{U} \otimes L(H)$ ορίζουμε την ακόλουθη sesquilinear μορφή:

$$\langle M_1^* \otimes T_1 \otimes L(x_1), M_2^* \otimes T_2 \otimes L(x_2)\rangle = \langle \alpha(M_1^* T_1)L(x_1), \alpha(M_2^* T_2)L(x_2)\rangle_H .$$

Αν $\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{M}^* \otimes \mathcal{U} \otimes L(H) : \langle z, z\rangle = 0\}$, ο χώρος $(\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{U} \otimes L(H))/\mathcal{K}$ γίνεται ένας προ-Χίλμπερτ χώρος. Συμβολίζουμε την πλήρωσή του με K και την απεικόνιση πηλίκο $\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{U} \otimes L(H) \to K$ με π_K.

Ισχυρισμός 1: Ο χώρος K_1 που παράγεται από τα διανύσματα της μορφής $\pi_K(M^* \otimes N \otimes L(y)) : M, N \in \mathcal{M}, y \in H$ είναι πυκνός στον K.

Απόδειξη: Παρατήρησε ότι για κάθε $M_1, ..., M_n \in \mathcal{M}, T_1, ..., T_n \in \mathcal{U}$ και $x_1, ..., x_n \in H$ ισχύει,

$$\left\|\pi_K\left(\sum_{i=1}^n M_i^* \otimes T_i \otimes L(x_i)\right)\right\|_K = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha(M_i^* T_i)L(x_i)\right\|_H$$

και

$$\sum_{i=1}^n \alpha(M_i^* T_i)L(x_i) = \sum_{i=1}^n L\alpha(M_i^* T_i)L(x_i) \in L(H).$$

Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$\pi_K\left(\sum_{i=1}^n M_i^* \otimes T_i \otimes L(x_i)\right) \to \sum_{i=1}^n \alpha(M_i^* T_i)L(x_i)$$

επεκτείνεται σε ισομετρία $\sigma : K \to L(H)$.

Έστω $\xi \in K$ τέτοιο ώστε $\langle \xi, \pi_K(M^* \otimes N \otimes L(y))\rangle = 0$ για κάθε $M, N \in \mathcal{M}, y \in H$. Τότε $\langle \sigma(\xi), \alpha(M^* N)L(y)\rangle = 0$ για κάθε $M, N \in \mathcal{M}, y \in H$. Επειδή $I \in [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}$ και η απεικόνιση α είναι w^*-συνεχής έπεται ότι $\langle \sigma(\xi), L(y)\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$ και άρα $\xi = 0$.

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό 1.

Ισχυρισμός 2: Για κάθε $N, M_0 \in \mathcal{M}, T \in \mathcal{U}$ και $x \in H$ ισχύει

$$\pi(NM_0^* T \otimes L(x)) \in [\pi(M \otimes L(y)) : M \in \mathcal{M}, y \in H]^{-\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}, S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), M_i \in \mathcal{M}, T_i \in \mathcal{U}, x_i \in H, i = 1,...,m$ και $N \in Ball(\mathcal{M})$ έχουμε

$$\left\| \alpha \left(SN \sum_{i=1}^{m} M_i^* T_i \right) L(x_i) \right\|_{H^n} = \left\| \alpha(SN) \sum_{i=1}^{m} \alpha(M_i^* T_i) L(x_i) \right\|_{H^n}$$
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha(M_i^* T_i) L(x_i) \right\|_{H} = \left\| \pi_K \left(\sum_{i=1}^{m} M_i^* \otimes T_i \otimes L(x_i) \right) \right\|_{K}.$$

Από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)}$ έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} N M_i^* T_i \otimes L(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} \leq \left\| \pi_K \left(\sum_{i=1}^{m} M_i^* \otimes T_i \otimes L(x_i) \right) \right\|_{K}. \quad (5.2.3)$$

Σταθεροποιούμε $N \in Ball(\mathcal{M}), M_0 \in \mathcal{M}, T \in \mathcal{U}, x \in H$ και $\epsilon > 0$. Από την πυκνότητα του χώρου K_1 στον K υπάρχουν $N_i, M_i \in \mathcal{M}, x_i \in H, i = 1,...m$ ώστε

$$\left\| \pi_K(M_0^* \otimes T \otimes L(x)) - \pi_K \left(\sum_{i=1}^{m} M_i^* \otimes N_i \otimes L(x_i) \right) \right\|_{K} < \epsilon.$$

Έπεται από την ανισότητα (5.2.3) ότι

$$\left\| N M_0^* T \otimes L(x) - \sum_{i=1}^{m} N M_i^* N_i \otimes L(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} < \epsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό 2.

Έστω $T \in \mathcal{U}$ και $x \in H$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\pi(T \otimes L(x)) \in [\pi(N M^* U \otimes L(y)) : N, M \in \mathcal{M}, U \in \mathcal{U}, y \in H]^{-\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)}. \quad (5.2.4)$$

Θεωρούμε τις μερικές ισομετρίες $\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M}$ από το Λήμμα 5.2.1. Θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum_k \pi(V_k V_k^* T \otimes L(x))$ συγκλίνει ασθενώς στο διάνυσμα $\pi(T \otimes L(x))$ μέσα στο χώρο $\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\lim_E \left\langle \pi(T \otimes L(x)) - \sum_{k \in E} \pi(V_k V_k^* T \otimes L(x)), z \right\rangle_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} = 0 \quad (5.2.5)$$

για κάθε $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$.

Παρατηρούμε ότι τα μερικά αθροίσματα της προηγούμενης σειράς σχηματίζουν ένα φραγμένο δίκτυο. Πράγματι, αν $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $E \subset I$ έχουμε

$$\left\| \sum_{k \in E} \alpha(SV_kV_k^*T)L(x) \right\|_{H^n} = \left\| \alpha\left(S \sum_{k \in E} V_kV_k^*T \right) L(x) \right\|_{H^n} \leq \|T\| \|L(x)\|$$

επειδή ο τελεστής $\sum_{k \in E} V_kV_k^*$ είναι προβολή και η απεικόνιση α είναι πλήρης συστολή. Έπεται ότι

$$\left\| \sum_{k \in E} V_kV_k^*T \otimes L(x) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \leq \|T\| \|L(x)\|.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε την (5.2.5) για ένα σύνολο διανυσμάτων z που παράγουν τον χώρο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$. Από το Λήμμα 5.2.3, μπορούμε να πάρουμε σαν z τα διάνυσματα της μορφής $\theta_S^*(\pi_S(U \otimes y))$ για αυθαίρετα $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}$ και $y \in H$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{E \subset I, \text{finite}} \left\langle \pi(T \otimes L(x)) - \sum_{k \in E} \pi(V_kV_k^*T \otimes L(x)), \theta_S^*(\pi_S(U \otimes y)) \right\rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \\
&= \lim_E \left\langle \theta_S\left(\pi\left(T \otimes L(x) - \sum_{k \in E} V_kV_k^*T \otimes L(x) \right) \right), \pi_S(U \otimes y) \right\rangle_S \\
&= \lim_E \left\langle \pi_S\left(T \otimes L(x) - \sum_{k \in E} V_kV_k^*T \otimes L(x) \right), \pi_S(U \otimes y) \right\rangle_S \\
&= \lim_E \left\langle \alpha(ST)L(x) - \sum_{k \in E} \alpha(SV_kV_k^*T)L(x), \alpha(SU)(y) \right\rangle_{H^n} \\
&= \lim_E \left\langle \alpha(S(I - \sum_{k \in E} V_kV_k^*)T)L(x), \alpha(SU)(y) \right\rangle_{H^n} = 0
\end{aligned}$$

επειδή $I = \sum_{k \in I} \oplus V_kV_k^*$ και η απεικόνιση α είναι w^*-συνεχής. Δείξαμε ότι ισχύει η (5.2.4) και άρα ολοκληρώθηκε η απόδειξη. $\square$

Πόρισμα 5.2.5 *Ο υπόχωρος $\pi(\mathcal{M} \otimes H)$ του $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ είναι πυκνός.*

5.3 Οι αναπαραστάσεις

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ όπως στους συμβολισμούς 5.1.6. Έστω ακόμα $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ ο χώρος Χίλμπερτ που κατασκευάσθηκε στην παράγραφο 4.2. Σε αυτή την παράγραφο θα συμπληρώσουμε την κατασκευή του αντικειμένου $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha))$ ορίζοντας αναπαράσταση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha) = \beta$ της άλγεβρας $\mathcal{B}$ στον χώρο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$. Αν $T_1, ..., T_m \in \mathcal{U}, x_1, ..., x_m \in H$ και $B \in \mathcal{B}$ το διάνυσμα $\sum_{j=1}^m BT_j \otimes x_j$ ανήκει στον χώρο $\mathcal{U} \otimes H$ επειδή $\mathcal{BU} \subset \mathcal{U}$. Από την άλλη μεριά, αν $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$ ο τελεστής SB ανήκει στον χώρο $M_{n,1}(\mathcal{V})$ αφού $\mathcal{VB} \subset \mathcal{V}$. Επίσης επειδή $\|SB\| \leq \|B\|$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^m BT_j \otimes x_j\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} &= \sup_{S\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{j=1}^m \alpha(SBT_j)(x_j)\right\|_{H^n} \\ \leq &\|B\| \sup_{S\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{j=1}^m \alpha(ST_j)(x_j)\right\| = \|B\| \left\|\sum_{j=1}^m T_j \otimes x_j\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι ορίζεται μοναδιαίος αλγεβρικός μορφισμός

$$\beta : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) : \beta(B)(\pi(T \otimes x)) = \pi(BT \otimes x), B \in \mathcal{B}, T \in \mathcal{U}, x \in H$$

που είναι συστολή. Θα αποδείξουμε το παρακάτω ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5.3.1 *Η απεικόνιση β είναι πλήρης συστολή.*

Απόδειξη Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $(B_{ij}) \in M_n(\mathcal{B})$. Σταθεροποιούμε διανύσματα $z_j = \sum_{i=1}^{k_j} \pi(T_i^j \otimes x_i^j)$, $j = 1, ..., n$ του χώρου $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ και συμβολίζουμε με z το διάνυσμα $(z_1, ..., z_n)^t$.
Θεωρούμε το διάνυσμα

$$y = \beta((B_{ij}))(z) = \left(\sum_{j=1}^n \beta(B_{1j})z_j, \sum_{j=1}^n \beta(B_{2j})z_j, ..., \sum_{j=1}^n \beta(B_{nj})z_j\right)^t,$$

για το οποίο ισχύει

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^n \left\|\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} B_{kj}T_i^j \otimes x_i^j\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Από τον ορισμό της νόρμας του χώρου $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ για δεδομένο $\epsilon > 0$ υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$, $S_k \in Ball(M_{r,1}(\mathcal{V}))$, $k = 1, ..., n$ ώστε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(S_k B_{kj} T_i^j)(x_i^j) \right\|_{H^r}^2 - \frac{\epsilon}{2} \tag{5.3.1}$$

Έστω

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(S_k B_{kj} T_i^j)(x_i^j), \ k = 1, ..., n.$$

Θεωρούμε από το Λήμμα 5.2.1 τις μερικές ισομετρίες $\{V_l, l \in I\} \subset \mathcal{M}$. Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $E \subset I$ θεωρούμε το διάνυσμα

$$y_k^E = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha \left(S_k B_{kj} \sum_{l \in E} V_l V_l^* T_i^j \right) (x_i^j).$$

Επειδή η α είναι w^*-συνεχής έπεται ότι

$$\text{weak-lim}_E \, y_k^E = y_k, k = 1, ..., n.$$

Επομένως,

$$\lim_E \sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle y_k^E, \frac{y_k}{\|y_k\|} \right\rangle \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^2.$$

Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποσύνολο $E \subset I$, ώστε

$$\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle y_k^E, \frac{y_k}{\|y_k\|} \right\rangle \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|y_k^E\|^2.$$

Υποθέτουμε ότι $E = \{1, ..., N\}$ και $V = (V_1, ..., V_N)$. Από την ανισότητα (5.3.1) παίρνουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 - \epsilon &\leq \sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha \left(S_k B_{kj} \sum_{l=1}^{N} V_l V_l^* T_i^j \right) (x_i^j) \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(S_1 B_{1j} V V^* T_i^j)(x_i^j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(S_n B_{nj} V V^* T_i^j)(x_i^j) \end{bmatrix} \right\|^2
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η α είναι αλγεβρικός μορφισμός έχουμε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha(S_1 B_{1j} V) \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(V^* T_i^j)(x_i^j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha(S_n B_{nj} V) \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(V^* T_i^j)(x_i^j) \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \alpha((S_i B_{ij} V)_{1\leq i,j\leq n}) \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} \alpha(V^* T_i^1)(x_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(V^* T_i^n)(x_i^n) \end{bmatrix} \right\|^2$$

Επειδή

$$(S_i B_{ij} V)_{1\leq i,j\leq n} = (S_1 \oplus ... \oplus S_n)(B_{ij})(V \oplus ... \oplus V)$$

και

$$\|(S_1 \oplus ... \oplus S_n)\|, \|(V \oplus ... \oplus V)\| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\|\alpha((S_i B_{ij} V))\| \leq \|(B_{i,j})\|$$

και άρα

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \|(B_{ij})\|^2 \left\| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} \alpha(V^* T_i^1)(x_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(V^* T_i^n)(x_i^n) \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \|(B_{ij})\|^2 \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(V^* T_i^j)(x_i^j) \right\|^2 .$$

Επειδή $\|V^*\| \leq 1$ έχουμε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{k_j} T_i^j \otimes x_i^j \right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \|(B_{ij})\|^2 = \|z\|^2 \|(B_{ij})\|^2$$

και αφου το ϵ είναι αυθαίρετο παίρνουμε

$$\|\beta((B_{ij}))(z)\| = \|y\| \leq \|(B_{ij})\| \, \|z\| ,$$

από όπου τελικά προκύπτει η ανισότητα $\|\beta((B_{ij}))\| \leq \|(B_{ij})\|$. Επειδή το n ήταν αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι η β είναι πλήρης συστολή. $\square$

Πρόταση 5.3.2 *Η απεικόνιση β είναι w^*-συνεχής.*

Απόδειξη Επειδή η β είναι φραγμένη από το Θεώρημα 2.8.1 αρκεί να δείξουμε ότι δοθέντος ενός δικτύου $(B_i) \subset Ball(\mathcal{B})$ που συγκλίνει στην wot τοπολογία στο 0 το δίκτυο $(\beta(B_i))$ συγκλίνει στην wot τοπολογία επίσης στο 0.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

$$\pi, \pi_S, \theta_S, S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}$$

που ορίσαμε στην παράγραφο 5.2 Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{U}, x_1, x_2 \in H, n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V}))$. Δεδομένου ότι η απεικόνιση α είναι w^*-συνεχής έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\langle \beta(B_i)(\pi(T_1 \otimes x_1)), \theta_S^*(\pi_S(T_2 \otimes x_2)) \rangle_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} \\
=& \langle \pi(B_iT_1 \otimes x_1), \theta_S^*(\pi_S(T_2 \otimes x_2)) \rangle_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} \\
=& \langle \theta_S(\pi(B_iT_1 \otimes x_1)), \pi_S(T_2 \otimes x_2) \rangle_{H_S} = \langle \alpha(SB_iT_1)(x_1), \alpha(ST_2)(x_2) \rangle \to 0.
\end{aligned}$$

Επειδή το δίκτυο (B_i) είναι φραγμένο, η απεικόνιση β είναι φραγμένη και από το Λήμμα 5.2.3 τα διανύσματα $\theta_S^*(\pi_S(T \otimes x)), S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{U}, x \in H$ παράγουν τον χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)$, έπεται ότι

$$\langle \beta(B_i)z_1, z_2 \rangle \to 0 \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{U}(H). \qquad \square$$

5.4 Οι μορφισμοί

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ όπως στους συμβολισμούς 5.1.6. Σε αυτή την παράγραφο αν $H \in {}_\mathcal{A}\mathfrak{M}$ ταυτίζουμε τον χώρο $\mathcal{U} \otimes H$ με την εικόνα του $\pi(\mathcal{U} \otimes H)$ στον $\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)$ (βλέπε παράγραφο 5.2). Στις παραγράφους 5.2, 5.3 δείξαμε ότι σε κάθε αντικείμενο (H, α) της κατηγορίας ${}_\mathcal{A}\mathfrak{M}$ αντιστοιχεί ένα αντικείμενο $(\mathcal{F}_\mathcal{U}(H), \beta)$ της κατηγορίας ${}_\mathcal{B}\mathfrak{M}$. Σε αυτή την παράγραφο θα ολοκληρώσουμε τον ορισμό του συναρτητή $\mathcal{F}_\mathcal{U} : {}_\mathcal{A}\mathfrak{M} \to {}_\mathcal{B}\mathfrak{M}$.

Σταθεροποιούμε αντικείμενα $(H_i, \alpha_i), i = 1, 2$ της κατηγορίας ${}_\mathcal{A}\mathfrak{M}$ και τα αντίστοιχα αντικείμενα $(\mathcal{F}_\mathcal{U}(H_i), \beta_i), i = 1, 2$ της κατηγορίας ${}_\mathcal{B}\mathfrak{M}$.

Έστω $F \in Hom_\mathcal{A}(H_1, H_2)$. Υπενθυμίζουμε ότι ο F είναι ένας φραγμένος τελεστής που ικανοποιεί την ιδιότητα

$$F\alpha_1(A) = \alpha_2(A)F \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Υποθέτουμε ότι $T_1, ..., T_m \in \mathcal{U}$ και $x_1, ..., x_m \in H$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{m} T_i \otimes F(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} &= \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_2(ST_i)F(x_i) \right\| \\ &= \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| F^{(n)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(ST_i)(x_i) \right\|\end{aligned}$$

όπου $F^{(n)} = (F \oplus ... \oplus F)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{m} T_i \otimes F(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} &\leq \|F\| \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(ST_i)(x_i) \right\| \\ &= \|F\| \left\| \sum_{i=1}^{m} T_i \otimes x_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)}.\end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.4.1 *Ορίζουμε απεικόνιση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)$ από τον χώρο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$ στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)$ με βάση τον τύπο*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(T \otimes x) = T \otimes F(x) \text{ για κάθε } T \in \mathcal{U}, x \in H_1.$$

Αυτή η απεικόνιση είναι φραγμένη με νόρμα το πολύ $\|F\|$. Για κάθε $B \in \mathcal{B}, T \in \mathcal{U}, x \in H_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)\beta_1(B)(T \otimes x) &= \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(BT \otimes x) = BT \otimes F(x) \\ &= \beta_2(B)(T \otimes F(x)) = \beta_2(B)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(T \otimes x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)\beta_1(B) = \beta_2(B)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και άρα

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ έχει τις ιδιότητες $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(FG) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(G)$ και $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(I_H) = I_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$. Συνεπώς έχοντας ορίσει την αντιστοιχία μεταξύ των χώρων των μορφισμών έχουμε ολοκληρώσει τον ορισμό του συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \rightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$.

Θεώρημα 5.4.1 *Ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ έχει Δ-επέκταση.*

Απόδειξη Έστω $F \in Hom^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$. Υπενθυμίζουμε ότι ο F είναι φραγμένος τελεστής που έχει την ιδιότητα

$$F\alpha_1(A) = \alpha_2(A)F \ \text{ για κάθε } \ A \in \Delta(\mathcal{A}).$$

Υποθέτουμε ότι $M_1, ..., M_m \in \mathcal{M}$ και $x_1, ..., x_m \in H$. Από την πρόταση 5.2.2 έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} M_i \otimes F(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*)), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_2(SM_i)F(x_i) \right\|.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*))$. Επειδή $SM_i \in M_{n,1}(\Delta(\mathcal{A}))$ και $F \in Hom^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$ ισχύει ότι

$$\alpha_2(SM_i)F = F^{(n)}\alpha_1(SM_i).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_2(SM_i)F(x_i) \right\| &= \left\| F^{(n)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(SM_i)(x_i) \right\| \\ \leq &\|F\| \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(SM_i)(x_i) \right\| \leq \|F\| \left\| \sum_{i=1}^{m} M_i \otimes x_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)}. \end{aligned}$$

Από αυτό προκύπτει ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} M_i \otimes F(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} \leq \|F\| \left\| \sum_{i=1}^{m} M_i \otimes x_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)}.$$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $\delta(F)$ από τον υπόχωρο $\mathcal{M} \otimes H_1$ του χώρου $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$ στον χώρο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$\delta(F)(M \otimes x) = M \otimes F(x) \text{ για κάθε } M \in \mathcal{M}, x \in H_1. \tag{5.4.1}$$

Αυτή η απεικόνιση είναι φραγμένη με νόρμα το πολύ $\|F\|$ και επειδή από το Πόρισμα 5.2.5 ο χώρος $\mathcal{M} \otimes H_1$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$, επεκτείνεται από τον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$ στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)$.

Τώρα ελέγχουμε ότι $\delta(F) \in Hom^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2))$. Για κάθε $B \in \Delta(\mathcal{B}), M \in \mathcal{M}, x \in H_1$ έχουμε

$$\delta(F)\beta_1(B)(M \otimes x) = \delta(F)(BM \otimes x).$$

Επειδή $BM \in \Delta(B)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ από την εξίσωση (5.4.1) παίρνουμε

$$\delta(F)(BM \otimes x) = BM \otimes F(x) = \beta_2(B)(M \otimes F(x)) = \beta_2(B)\delta(F)(M \otimes x).$$

Από το Πόρισμα 5.2.5 συμπεραίνουμε ότι

$$\delta(F)\beta_1(B) = \beta_2(B)\delta(F)$$

για κάθε $B \in \Delta(\mathcal{B})$ και άρα $\delta(F) \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2))$.

Παρατήρησε ότι αν $F \in Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$ τότε $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = \delta(F)$ (επειδή και οι δύο τελεστές συμπίπτουν στον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{M} \otimes H_1$ του $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$). Επομένως ορίζεται συναρτητής ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ που στέλνει κάθε αντικείμενο H στο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ και κάθε μορφισμό F στον $\delta(F)$. Είναι φανερό ότι αυτός ο συναρτητής είναι Δ-επέκταση του συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. $\square$

Ορισμός 5.4.2 *Στην συνέχεια αυτής της εργασίας θα συμβολίζουμε την Δ-επέκταση του συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ πάλι με $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ και κάθε μορφισμό $\delta(F)$ που ορίζεται από την εξίσωση (5.4.1) με $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)$.*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η Δ-επέκταση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ είναι $*$-συναρτητής.

Λήμμα 5.4.2 *Αν $U \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ είναι μερική ισομετρία τότε*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)^* \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1).$$

Απόδειξη
Ισχυρισμός: $\|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)(z)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)(z)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}$ για κάθε $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$.
Απόδειξη: Έστω $M_j \in \mathcal{M}, x_j \in H_1, 1 \leq j \leq m,\ S = (N_1^*, ..., N_n^*)^t \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{M}^*))$. Έχουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_1(SM_j)U^*U(x_j) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_1(N_i^*M_j)U^*U(x_j) \right\|^2.$$

Επειδή $U^*U \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_1) = \alpha_1(\Delta(\mathcal{A}))'$ και $N_i^*M_j \in \Delta(\mathcal{A})$ παίρνουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_1(SM_j)U^*U(x_j) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| U^* \left(U \sum_{j=1}^{m} \alpha_1(N_i^*M_j)(x_j) \right) \right\|^2$$

άρα

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_1(SM_j)U^*U(x_j)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{m}U\alpha_1(N_i^*M_j)(x_j)\right\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_2(N_i^*M_j)U(x_j)\right\|^2.$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι $U \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ και $N_i^*M_j \in \Delta(\mathcal{A})$ για κάθε i, j. Έπεται ότι

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_1(SM_j)U^*U(x_j)\right\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_2(SM_j)U(x_j)\right\|^2.$$

Επειδή το S ήταν αυθαίρετο έχουμε

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}M_j\otimes U^*U(x_j)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \left\|\sum_{j=1}^{m}M_j\otimes U(x_j)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}$$

η ισοδύναμα

$$\left\|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)\left(\sum_{j=1}^{m}M_j\otimes x_j\right)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \left\|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)\left(\sum_{j=1}^{m}M_j\otimes x_j\right)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}.$$

Από το Πόρισμα 5.2.5 έπεται η αλήθεια του ισχυρισμού.

Αποδείξαμε στο Θεώρημα 5.4.1 ότι η απεικόνιση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ μεταξύ των χώρων των μορφισμών είναι συστολή, επομένως $\|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)\| \leq 1$. Επειδή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)^2 = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)$ συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)$ είναι ορθογώνια προβολή. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό προκύπτει η ακόλουθη ισότητα:

$$\langle\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)(z), z\rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \langle\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)(z), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)(z)\rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}$$
$$\Leftrightarrow \langle\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)(z), z\rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \langle\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)^*\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)(z), z\rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)}$$

για κάθε $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$ και άρα

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)^*\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U).$$

Επειδή ο τελεστής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*U)$ είναι ορθογώνια προβολή ο τελεστής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)$ είναι μερική ισομετρία. Έστω $W = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U), V = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)$. Έχουμε αποδείξει ότι

$$VW = W^*W. \tag{5.4.2}$$

Παρόμοια εργαζόμενοι με την μερική ισομετρία U^* παίρνουμε την ισότητα $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(UU^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)^*\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)$ και συνεπώς

$$WV = V^*V. \tag{5.4.3}$$

Τώρα έχουμε $V = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*UU^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*) = VWV$. Από την εξίσωση (5.4.2) έπεται ότι $V = W^*WV$. Χρησιμοποιώντας ξανά την ισότητα (5.4.2) έχουμε $V^* = V^*W^*W = V^*VW$. Τέλος χρησιμοποιώντας την (5.4.3) παίρνουμε τις ισότητες:

$$V^* = WVW = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(UU^*U) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U) = W$$

η ισοδύναμα $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)^*$. $\square$

Θεώρημα 5.4.3 *Ο συναρτητής* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ *είναι* $*$*-συναρτητής.*

Απόδειξη Έστω $T \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ με πολική αναπαράσταση $T = U|T|$. Παρατήρησε ότι $T^*T \in \alpha_1(\Delta(\mathcal{A}))'$, επομένως $|T| \in \alpha_1(\Delta(\mathcal{A}))'$ και άρα $(|T| + \epsilon I)^{-1} \in \alpha_1(\Delta(\mathcal{A}))'$ για κάθε $\epsilon > 0$. Επειδή $U = w^* - \lim\limits_{\epsilon\to 0} T(|T| + \epsilon I)^{-1}$ έπεται ότι $U \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$.

Η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_1) = \alpha_1(\Delta(\mathcal{A}))' \to \beta_1(\Delta(\mathcal{B}))' = Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1))$$

είναι αλγεβρικός μορφισμός μεταξύ αλγεβρών von Neumann. Επίσης έχουμε αποδείξει στο Θεώρημα 5.4.1 ότι είναι συστολή. Συνεπάγεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι $*$-μορφισμός και άρα $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(|T|) \geq 0$. Με βάση το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(T^*) =& \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(|T|U^*) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(|T|)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U^*)\\ =& \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(|T|)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)^* = (\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(U)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(|T|))^* = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(T)^*\end{aligned}$$

$\square$

5.5 Η Ισοδυναμία

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ όπως στους συμβολισμούς 5.1.6. Σε αυτή την παράγραφο αν $H \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ ταυτίζουμε τον χώρο $\mathcal{U} \otimes H$ με την εικόνα του $\pi(\mathcal{U} \otimes H)$ στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ (βλέπε παράγραφο 5.2). Στις παραγράφους 5.2, 5.3, 5.4 ορίσαμε τον συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ και αποδείξαμε ότι έχει Δ-επέκταση ένα $*$-συναρτητή. Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι αυτός ο συναρτητής επάγει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ και η Δ-επέκτασή του ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$. Αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη του βασικού Θεωρήματος 5.1.3. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ τον συναρτητή από την κατηγορία ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ στην κατηγορία ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και με το ίδιο σύμβολο την Δ-επέκτασή του από την ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ στην ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$. Ο ορισμός αυτού του συναρτητή είναι παρόμοιος με του $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

Σταθεροποιούμε αντικείμενο (H, α) της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και το αντίστοιχο αντικείμενο $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), \beta)$ της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$. Αν $S \in \mathcal{V}, z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ η νόρμα του διανύσματος $S \otimes z$ δίδεται (παράγραφος 5.2) από τον τύπο:

$$\|S \otimes z\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} = \sup_{T \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})), n \in \mathbb{N}} \|\beta(TS)(z)\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Λήμμα 5.5.1 *Ο χώρος $\mathcal{M}^* \otimes (\mathcal{M} \otimes H)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$.*

Απόδειξη Έστω $S \in \mathcal{V}, z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ και $\epsilon > 0$. Ο χώρος $\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$ από το Πόρισμα 5.2.5. Επομένως υπάρχουν $M_1, ..., M_n \in \mathcal{M}, z_1, ..., z_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ ώστε

$$\left\| S \otimes z - \sum_{i=1}^{n} M_i^* \otimes z_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ο χώρος $\mathcal{M} \otimes H$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$. Επομένως για κάθε $i = 1, ..., n$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο G_i, τελεστές $\{N_j : j \in G_i\} \subset \mathcal{M}$ και διανύσματα $\{x_j : j \in G_i\} \subset H$ ώστε

$$\left\| z_i - \sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} < \frac{\epsilon}{2n\|M_i\|}, \ \ i = 1, ..., n.$$

Για κάθε $i = 1, ..., n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left\| M_i^* \otimes z_i - M_i^* \otimes (\sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} \\
=& \sup_{T \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})), n \in \mathbb{N}} \left\| \beta(TM_i^*)(z_i) - \beta(TM_i^*)(\sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)^n} \\
\leq& \|M_i\| \left\| z_i - \sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} \leq \|M_i\| \frac{\epsilon}{2n\|M_i\|} = \frac{\epsilon}{2n}.
\end{aligned}$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left\| S \otimes z - \sum_{i=1}^{n} M_i^* \otimes (\sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} \\
\leq& \left\| S \otimes z - \sum_{i=1}^{n} M_i^* \otimes z_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} \\
+& \sum_{i=1}^{n} \left\| M_i^* \otimes z_i - M_i^* \otimes (\sum_{j \in G_i} N_j \otimes x_j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} \\
<& \frac{\epsilon}{2} + n\frac{\epsilon}{2n} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι το διάνυσμα $S \otimes z$ ανήκει στην κλειστότητα του χώρου $\mathcal{M}^* \otimes (\mathcal{M} \otimes H)$ γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Λήμμα 5.5.2 *Έστω $S_i \in \mathcal{V}, T_i \in \mathcal{U}, x_i \in H, i = 1, ..., r$. Τότε*

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} = \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha(S_i T_i)(x_i) \right\|.$$

Απόδειξη Συμβολίζουμε με y το διάνυσμα $\sum_{i=1}^{r} \alpha(S_i T_i)(x_i)$. Κάνουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} S_i\otimes(T_i\otimes x_i)\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))} = \sup_{U\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})),n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{r}\beta(US_i)(T_i\otimes x_i)\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)^n}$$

$$= \sup_{U\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})),n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{r}U_kS_iT_i\otimes x_i\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \qquad (\text{όπου } (U=(U_1,...,U_n)^t))$$

$$= \sup_{U\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})),n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}\sup_{V\in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})),m\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha(VU_kS_iT_i)(x_i)\right\|^2_{H^m}.$$

Έπεται ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} S_i\otimes(T_i\otimes x_i)\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))}$$

$$= \sup_{U\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U})),n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}\sup_{V\in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})),m\in\mathbb{N}}\|\alpha(VU_k)(y)\|^2_{H^m}. \qquad (5.5.1)$$

Σταθεροποιούμε $n\in\mathbb{N}$ και $U=(U_1,...,U_n)^t\in Ball(M_{n,1}(\mathcal{U}))$. Για αυθαίρετα $m\in\mathbb{N}$ και $V_i=(V_{i1},...,V_{im})^t\in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), i=1,...,n$ συμβολίζουμε με A τον ακόλουθο τελεστή

$$A=(V_1\oplus...\oplus V_n)\in M_{nm,n}(\mathcal{V}).$$

Παρατήρησε ότι $\|\alpha(AU)(y)\|\le\|y\|$. Επομένως

$$\|y\|^2\ge\|(\alpha(V_{11}U_1)y,..,\alpha(V_{1m}U_1)y,\alpha(V_{21}U_2)y,..,\alpha(V_{2m}U_2)y,..,\alpha(V_{nm}U_n)y)^t\|^2_{H^{nm}}$$

η ισοδύναμα

$$\|y\|^2\ge\|\alpha(V_1U_1)y\|^2_{H^m}+\|\alpha(V_2U_2)y\|^2_{H^m}+...+\|\alpha(V_nU_n)y\|^2_{H^m}.$$

Έπεται ότι

$$\|y\|^2\ge\sup_{V\in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})),m\in\mathbb{N}}\|\alpha(VU_1)y\|^2_{H^m}+...+\sup_{V\in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})),m\in\mathbb{N}}\|\alpha(VU_n)y\|^2_{H^m}.$$

Επειδή τα n και U ήταν αυθαίρετα από την εξίσωση (5.5.1) παίρνουμε την ανισότητα

$$\|y\|\ge\left\|\sum_{i=1}^{r} S_i\otimes(T_i\otimes x_i)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))}. \qquad (5.5.2)$$

Θεωρούμε από το Λήμμα 5.2.1 τις μερικές ισομετρίες $\{W_k, k \in J\} \subset \mathcal{M}$. Έχουμε ότι $\alpha(W_k^* W_k) \perp \alpha(W_l^* W_l)$ για $k \neq l$ και $I = \sum_{k \in J} \alpha(W_k^* W_k)$.
Αν $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $\{j_1, ... j_n\} \subset J$ ώστε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(W_{j_k}^* W_{j_k}) y\|_H^2 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Επίσης θεωρούμε από το Λήμμα 5.2.1 τις μερικές ισομετρίες $\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M}$. Θέτουμε $z_k = \alpha(W_{j_k}^* W_{j_k})(y), k = 1, ..., n$. Επειδή η απεικόνιση α είναι w^*-συνεχής έχουμε ότι

$$\lim_{E \subset I, \text{ finite}} \sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle \alpha \left(W_{j_k}^* \sum_{l \in E} V_l V_l^* W_{j_k} \right) (y), \frac{z_k}{\|z_k\|} \right\rangle \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2.$$

Επομένως υπάρχει σύνολο $\{i_1, ..., i_N\} \subset I$ ώστε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \leq & \sum_{k=1}^{n} \left| \left\langle \alpha \left(W_{j_k}^* \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^* W_{j_k} \right) (y), \frac{z_k}{\|z_k\|} \right\rangle \right|^2 \\ \leq & \sum_{k=1}^{n} \left\| \alpha \left(W_{j_k}^* \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^* W_{j_k} \right) (y) \right\|^2. \end{aligned}$$

Θέτουμε $R = (V_{i_1}^*, ..., V_{i_N}^*)^t$. Παρατήρησε ότι $R \in Ball(M_{N,1}(\mathcal{V}))$. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} \|y\|^2 - \epsilon \leq & \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(W_{j_k}^* R^*) \alpha(R W_{j_k})(y)\|^2 \\ \leq & \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(R W_{j_k})(y)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{V \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), m \in \mathbb{N}} \|\alpha(V W_{j_k}) y\|_{H^n}. \end{aligned}$$

Επειδή $\|(W_{j_1}, ..., W_{j_n})^t\| = 1$ από την εξίσωση (5.5.1) προκύπτει ότι

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \left\| \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))}^2 .$$

Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο από την ανισότητα (5.5.2) έχουμε

$$\|y\| = \left\| \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))}. \qquad \square$$

Το επόμενο λήμμα συμπληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3.

Λήμμα 5.5.3 *Οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Δ-ισοδύναμες.*

Απόδειξη Από το Λήμμα 5.5.2 συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$U_H : \mathcal{V} \otimes (\mathcal{U} \otimes H) \to H : \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \to \sum_{i=1}^{r} \alpha(S_i T_i)(x_i)$$

είναι ισομετρία. Από το Λήμμα 5.5.1 προκύπτει ότι ο χώρος $\mathcal{V} \otimes (\mathcal{U} \otimes H)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$. Επίσης αφού $I \in \mathcal{A} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}$ ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $\alpha(ST)(x) : S \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{U}, x \in H$ είναι πυκνός στον H. Το συμπέρασμά μας είναι ότι η ισομετρία U_H επεκτείνεται ως μοναδιαίος τελεστής από τον $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$ επί του H.

Η αναπαράσταση $\beta : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$ απεικονίζεται μέσω του συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ στην αναπαράσταση $\widetilde{\alpha} = \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\beta) : \mathcal{A} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$ που δίδεται από τον τύπο:

$$\widetilde{\alpha}(A)(S \otimes z) = AS \otimes z, A \in \mathcal{A}, S \in \mathcal{V}, z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H).$$

Για κάθε $A \in \mathcal{A}, S \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{U}, x \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned} U_H \circ \widetilde{\alpha}(A)(S \otimes (T \otimes x)) =& U_H(AS \otimes (T \otimes x)) = \alpha(AST)(x) \\ =& \alpha(A)\alpha(ST)(x) = \alpha(A) \circ U_H(S \otimes (T \otimes x)) \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.5.1 έπεται ότι

$$U_H \circ \widetilde{\alpha}(A) = \alpha(A) \circ U_H \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

και άρα $U_H \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), H) \subset Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), H)$.

Υποθέτουμε ότι τα $(H_i, \alpha_i), i = 1, 2$ είναι αντικείμενα της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$. Για κάθε $N, M \in \mathcal{M}, x \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned} & F \circ U_{H_1}(N^* \otimes (M \otimes x)) = F(\alpha_1(N^*M)(x)) = \alpha_2(N^*M)F(x) \\ =& U_{H_2}(N^* \otimes (M \otimes F(x))) = U_{H_2}(N^* \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(M \otimes x)) \\ =& U_{H_2} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F))(N^* \otimes (M \otimes x)). \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.5.1 συμπεραίνουμε ότι

$$F \circ U_{H_1} = U_{H_2} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)).$$

Με τους προηγούμενους συλλογισμούς συμπληρώνεται η απόδειξη του ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και ο συναρτητής που παράγεται από τις Δ-επεκτάσεις είναι ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$. Ανάλογα μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ είναι ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ και ο συναρτητής που παράγεται από τις Δ-επεκτάσεις είναι ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$. $\square$

5.6 Ιδιότητες των συναρτητών ισοδυναμίας

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε ότι κάθε συναρτητής $\mathcal{F}$ που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.1.3 είναι ισοδύναμος με ένα συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ για κάποιο πρότυπο $\mathcal{U}$. Επίσης διερευνούμε κάποιες άλλες ιδιότητες αυτών των συναρτητών, βλέπε ορισμό 5.6.1, που σε αντίθεση με την αυτοσυζυγή περίπτωση δεν είναι προφανείς.

Σταθεροποιούμε για τις ανάγκες αυτής της παραγράφου τις μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ και ένα συναρτητή $\mathcal{F}$ που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.1.3. Επιλέγουμε ένα $\mathcal{A}$-καθολικό αντικείμενο (H_0, α_0). Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{F}(H_0), \beta_0)$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο το οποίο είναι $\mathcal{B}$-καθολικό (Λήμμα 5.1.5.) Από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3, βλέπε παράγραφο 5.1, προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_0, H_0) = \alpha_0(\Delta(\mathcal{A}))' \rightarrow \beta_0(\Delta(\mathcal{B}))' = Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H_0), \mathcal{F}(H_0))$$

είναι $*$-ισομορφισμός που έχει την ιδιότητα $\mathcal{F}(\alpha_0(\mathcal{A})') = \beta_0(\mathcal{B})'$, ο χώρος

$$\mathcal{M} = \{M \in B(H_0, \mathcal{F}(H_0)) : MF = \mathcal{F}(F)M \text{ για κάθε } F \in \alpha_0(\Delta(\mathcal{A}))'\}$$

είναι ουσιώδες TRO και οι άλγεβρες $\alpha_0(\mathcal{A}), \beta_0(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες μέσω του χώρου $\mathcal{M}$. Θεωρούμε τους χώρους

$$\mathcal{U} = [\mathcal{M}\alpha_0(\mathcal{A})]^{-w^*}, \mathcal{V} = [\alpha_0(\mathcal{A})\mathcal{M}^*]^{-w^*}$$

που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\beta_0(\mathcal{B})\mathcal{U}\alpha_0(\mathcal{A}) \subset \mathcal{U}, \ \ \alpha_0(\mathcal{A})\mathcal{V}\beta_0(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}, \ \ [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*} = \alpha_0(\mathcal{A}), \ \ [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*} = \beta_0(\mathcal{B}).$$

Όπως στις παραγράφους 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 ορίζεται ο συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ που έχει Δ-επέκταση $*$-συναρτητή που επάγει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$. Υπενθυμίζουμε (παράγραφος 5.2) ότι αν $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ ορίζεται ο χώρος Χίλμπερτ $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ ως η πλήρωση ενός πηλίκου $\mathcal{U} \otimes H/\mathcal{L}$ του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου $\mathcal{U} \otimes H$. Σε αυτή την παράγραφο για κάθε $T \in \mathcal{U}, x \in H$ ταυτίζουμε το στοιχείο $(T \otimes x) + \mathcal{L}$ του $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ με το $T \otimes x$. Η νόρμα στον χώρο $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha(\alpha_0^{-1}(ST_j))(x_j) \right\|.$$

Ο χώρος $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$, λόγω της normal αναπαράστασης (παράγραφος 5.3)

$$\beta : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) : \beta(B)(T \otimes x) = \beta_0(B)T \otimes x$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}, T \in \mathcal{U}, x \in H$.

Επίσης (παράγραφος 4.4) για κάθε $H_1, H_2 \in_{\mathcal{A}} \mathfrak{M}$ ορίζεται η απεικόνιση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2) \to Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2))$ που ικανοποιεί την σχέση

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(M \otimes x) = M \otimes F(x) \text{ για κάθε } F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2), M \in \mathcal{M}, x \in H_1.$$

Λήμμα 5.6.1 *(i) Η απεικόνιση*

$$T \otimes x \to T(x), T \in \mathcal{U}, x \in H_0$$

επεκτείνεται σε μοναδιαίο τελεστή $U : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0) \to \mathcal{F}(H_0)$ ο οποίος ανήκει στον χώρο $Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0), \mathcal{F}(H_0))$.

(ii) Για κάθε $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_0, H_0)$ ισχύει $U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = \mathcal{F}(F)U$.

(iii) Για κάθε ζεύγος προβολών $P, Q \in Hom_{\mathcal{A}}(H_0, H_0)$ και κάθε τελεστή $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(P(H_0), Q(H_0))$ ισχύει $U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q)}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = \mathcal{F}(F)U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(P)}$.

Απόδειξη (i) Για κάθε $T_1, ..., T_m \in \mathcal{U}, x_1, ..., x_m \in H_0$ έχουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0)} = \sup_{S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{m} ST_j(x_j) \right\|_{H_0^{(n)}} \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{\mathcal{F}(H_0)}.$$

Αν $\epsilon > 0$ από το Λήμμα 5.2.1 έπεται ότι υπάρχουν μερικές ισομετρίες $V_1, ..., V_n \in \mathcal{M}$ ώστε ο τελεστής $\sum_{i=1}^{n} V_i V_i^*$ να είναι ορθογώνια προβολή και να ισχύει

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{\mathcal{F}(H_0)} - \epsilon \leq \left\| \sum_{l=1}^{n} V_l V_l^* \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{\mathcal{F}(H_0)}$$
$$= \left\| (V_1, ..., V_n)(V_1^*, ..., V_n^*)^t \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{\mathcal{F}(H_0)}$$
$$\leq \left\| (V_1^*, ..., V_n^*)^t \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{H_0^{(n)}} \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0)} = \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \right\|_{\mathcal{F}(H_0)}$. Επομένως ορίζεται ισομετρία $U : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0) \to \mathcal{F}(H_0)$ ώστε

$$U(T \otimes x) = T(x), \text{ για κάθε } T \in \mathcal{U}, x \in H_0.$$

Επειδή το TRO $\mathcal{M}$ είναι ουσιώδες έχουμε ότι,

$$[\mathcal{U}(H_0)]^- \geq [\mathcal{M}(H_0)]^- = \mathcal{F}(H_0),$$

συνεπώς η εικόνα του τελεστού U είναι πυκνή στον $\mathcal{F}(H_0)$ και άρα ο U είναι μοναδιαίος τελεστής. Επί πλέον για κάθε $B \in \mathcal{B}, T \in \mathcal{U}, x \in H_0$ έχουμε:

$$U\beta(B)(T \otimes x) = U(\beta_0(B)T \otimes x) = \beta_0(B)T(x) = \beta_0(B)U(T \otimes x).$$

Έπεται ότι $U \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_0), \mathcal{F}(H_0))$.

(ii) Έστω $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_0, H_0)$. Για κάθε $M \in \mathcal{M}, x \in H_0$ έχουμε

$$U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(M \otimes x) = U(M \otimes F(x)) = M(F(x)) = \mathcal{F}(F)M(x) = \mathcal{F}(F)U(M \otimes x).$$

Από το Πόρισμα 5.2.5 προκύπτει ότι $U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = \mathcal{F}(F)U$.

(iii) Έστω $P, Q \in Hom_{\mathcal{A}}(H_0, H_0)$ προβολές και $G \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_0, H_0)$. Από το (ii) έχουμε ότι $U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(QGP) = \mathcal{F}(QGP)U$ και άρα

$$U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(QGP) = \mathcal{F}(QGP)\mathcal{F}(P)U = \mathcal{F}(QGP)U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(P).$$

Επομένως αν $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(P(H_0), Q(H_0))$ ισχύει

$$U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q)}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = \mathcal{F}(F)U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(P)}. \qquad \square$$

Το παρακάτω λήμμα είναι ανάλογο με την Πρόταση 4.9 στο [45].

Λήμμα 5.6.2 *Αν $\{H_j : j \in I\}$ είναι αντικείμενα της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, τότε υπάρχουν μοναδιαίοι τελεστές*

$$W \in Hom_{\mathcal{B}}(\oplus_j \mathcal{F}(H_j), \mathcal{F}(\oplus_j H_j)), \;\; V \in Hom_{\mathcal{B}}(\oplus_j \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_j), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\oplus_j H_j)).$$

Απόδειξη Έστω U_i η απεικόνιση εμφύτευσης του χώρου H_i μέσα στον $\oplus_j H_j$. Εύκολα ελέγχεται ότι $U_i \in Hom_{\mathcal{A}}(H_i, \oplus_j H_j)$ και άρα

$$\mathcal{F}(U_i) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H_i), \mathcal{F}(\oplus_j H_j)).$$

Επειδή $U_i U_i^* \perp U_j U_j^*, i \neq j$ και ο συναρτητής $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ είναι $*$-συναρτητής έχουμε

$$\mathcal{F}(U_i)\mathcal{F}(U_i)^* \perp \mathcal{F}(U_j)\mathcal{F}(U_j)^*, i \neq j.$$

Έστω $W_i : \oplus_j \mathcal{F}(H_j) \to \mathcal{F}(\oplus_j H_j)$ η κανονική επέκταση της απεικόνισης $\mathcal{F}(U_i), i \in I$. Εύκολα ελέγχεται ότι $W_i \in Hom_{\mathcal{B}}(\oplus_j \mathcal{F}(H_j), \mathcal{F}(\oplus_j H_j))$ για κάθε $i \in I$. Επειδή οι απεικονίσεις $\{W_i : i \in I\}$ είναι μερικές ισομετρίες με κάθετους αρχικούς και τελικούς χώρους, ορίζεται ο τελεστής

$$W = \oplus_j W_j \in Hom_{\mathcal{B}}(\oplus_j \mathcal{F}(H_j), \mathcal{F}(\oplus_j H_j)).$$

Θα αποδείξουμε ότι ο W είναι μοναδιαίος τελεστής. Επειδή είναι ισομετρία, αρκεί για αυτό να δείξουμε ότι είναι επί. Ισοδύναμα πρέπει να δείξουμε ότι $WW^* = I_{\mathcal{F}(\oplus_j H_j)}$. Παρατήρησε ότι

$$WW^* = \oplus_j W_j W_j^* = \oplus_j \mathcal{F}(U_j)\mathcal{F}(U_j)^* = \oplus_j \mathcal{F}(U_j U_j^*)$$

και
$$\mathcal{F}(U_jU_j^*) \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\oplus_j H_j)\mathcal{F}(\oplus_j H_j)).$$

Η απεικόνιση
$$\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\oplus_j H_j, \oplus_j H_j) \to Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(\oplus_j H_j)\mathcal{F}(\oplus_j H_j))$$
είναι $*$-ισομορφισμός μεταξύ αλγεβρών von Neumann και άρα w^*-συνεχής. Επειδή $I_{\oplus_j H_j} = \oplus_j U_j U_j^*$ έπεται ότι $I_{\mathcal{F}(\oplus_j H_j)} = \oplus_j \mathcal{F}(U_jU_j^*) = WW^*$ και συνεπώς ο W είναι μοναδιαίος τελεστής. Η ύπαρξη του μοναδιαίου τελεστή $V \in Hom_{\mathcal{B}}(\oplus_j \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_j), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\oplus_j H_j))$ αποδεικνύεται ανάλογα. $\square$

Παρατήρηση 5.6.3 Για κάθε $K \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ υπάρχουν προβολές $Q_i, i \in I$ του χώρου $Hom_{\mathcal{A}}(H_0, H_0)$ και μοναδιαίος τελεστής $U \in Hom_{\mathcal{A}}(K, \oplus_{i\in I} Q_i(H_0))$.

Απόδειξη Θεωρούμε (παράγραφος 5.1) την άλγεβρα $W^*(\mathcal{A})$. Επειδή το αντικείμενο H_0 είναι $\mathcal{A}$-καθολικό έπεται ότι είναι $W^*(\mathcal{A})$-καθολικό [13]. Επίσης επειδή $K \in {}_{W^*(\mathcal{A})}\mathfrak{M}$ από το [45] έπεται ότι υπάρχουν προβολές $Q_i \in Hom_{W^*(\mathcal{A})}(H_0, H_0)$ και μοναδιαίος τελεστής $U \in Hom_{W^*(\mathcal{A})}(K, \oplus_i Q_i(H_0))$.$\square$

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αντιστοιχεί στην απόδειξη της Πρότασης 5.4 στο [45].

Θεώρημα 5.6.4 *Οι συναρτητές $\mathcal{F}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι ισοδύναμοι ως συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ και οι Δ-επεκτάσεις τους είναι ισοδύναμοι ως $*$-συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{D}\mathfrak{M}$.*

Απόδειξη Από την προηγούμενη παρατήρηση, για κάθε $K \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ υπάρχει ένα σύνολο δεικτών I_K, προβολές $\{Q_i^K : i \in I_K\} \subset Hom_{\mathcal{A}}(H_0, H_0)$ και μοναδιαίος τελεστής $W_K \in Hom_{\mathcal{A}}(K, \oplus_i Q_i^K(H_0))$. Επειδή οι Δ-επεκτάσεις των $\mathcal{F}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι $*$-συναρτητές οι τελεστές $\mathcal{F}(W_K), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_K)$ είναι μοναδιαίοι. Από το Λήμμα 5.6.2 μπορούμε να θεωρούμε ότι
$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_K) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(K), \oplus_i \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^K(H_0)))$$
και
$$\mathcal{F}(W_K) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(K), \oplus_i \mathcal{F}(Q_i^K(H_0))).$$
Από το Λήμμα 5.6.1,*ii* έχουμε ότι $U\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^K) = \mathcal{F}(Q_i^K)U$ και επομένως ο τελεστής
$$U_i^K = U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^K(H_0))} : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^K(H_0)) \to \mathcal{F}(Q_i^K(H_0))$$

είναι μοναδιαίος για κάθε $i \in I_K$.

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $K \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ μοναδιαίο τελεστή

$$V_K = \mathcal{F}(W_K^*)(\oplus_i U_i^K)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_K) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(K), \mathcal{F}(K)) \Rightarrow$$

$$V_K \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(K), \mathcal{F}(K)).$$

Θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές $\{V_K : K \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\}$ επάγουν τις ισοδυναμίες και των δύο ζευγών κατηγοριών.

Υποθέτουμε ότι $K_t \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ με αντίστοιχες προβολές $\{Q_i^t = Q_i^{K_t}, i \in I_t\}$ και μοναδιαίους τελεστές $U_i^t = U_i^{K_t}, W_t = W_{K_t}, V_t = V_{K_t}, t = 1, 2$ όπως προηγούμενα.

Έστω $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\oplus_i Q_i^1(H_0), \oplus_j Q_j^2(H_0))$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$F = (F_{j,i})_{j \in I_2, i \in I_1}, F_{j,i} \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(Q_i^1(H_0), Q_j^2(H_0)).$$

Έπεται ότι

$$\mathcal{F}(F) = (\mathcal{F}(F_{j,i}))_{j,i} \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\oplus_i \mathcal{F}(Q_i^1(H_0)), \oplus_j \mathcal{F}(Q_j^2(H_0)))$$

και

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = (\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{j,i}))_{j,i} \in Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\oplus_i \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^1(H_0)), \oplus_j \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_j^2(H_0))).$$

Από το Λήμμα 5.6.1,iii έχουμε ότι

$$U_j^2 \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ji}) = U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_j^2(H_0))} \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ji}) = \mathcal{F}(F_{ji}) U|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(Q_i^1(H_0))} = \mathcal{F}(F_{ji}) U_i^1$$

για κάθε i, j.

Σαν συνέπεια προκύπτει η ισότητα:

$$(\oplus_j U_j^2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = (\oplus_j U_j^2)(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ji}))_{j,i} = (U_j^2 \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ji}))_{j,i}$$

$$= (\mathcal{F}(F_{ji}) U_i^1)_{j,i} = (\mathcal{F}(F_{ji}))_{j,i}(\oplus_i U_i^1) = \mathcal{F}(F)(\oplus_i U_i^1) \tag{5.6.1}$$

Για κάθε $G \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(K_1, K_2)$ έχουμε

$$W_2 G W_1^* \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\oplus_i Q_i^1(H_0), \oplus_j Q_j^2(H_0))$$

και επομένως από την εξίσωση (5.6.1)

$$(\oplus_j U_j^2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_2 G W_1^*) = \mathcal{F}(W_2 G W_1^*)(\oplus_i U_i^1)$$

από το οποίο έπεται ότι

$$(\oplus_j U_j^2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(G)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_1^*) = \mathcal{F}(W_2)\mathcal{F}(G)\mathcal{F}(W_1^*)(\oplus_i U_i^1)$$

και άρα

$$\mathcal{F}(W_2^*)(\oplus_j U_j^2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_2)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(G) = \mathcal{F}(G)\mathcal{F}(W_1^*)(\oplus_i U_i^1)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W_1).$$

Δείξαμε ότι $V_2\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(G) = \mathcal{F}(G)V_1$. Επειδή τα αντικείμενα $K_1, K_2 \in_{\mathcal{A}} \mathfrak{M}$ ήταν αυθαίρετα, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Ορισμός 5.6.1 *Έστω $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$ μοναδιαίες αφηρημένες δυικές άλγεβρες τελεστών.*

(i) Ένας συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{M}$ καλείται ***πλήρως ισομετρικός (normal)*** *αν για κάθε ζεύγος αντικειμένων H_1, H_2 η απεικόνιση*

$$\mathcal{G} : Hom_{\mathcal{A}_1}(H_1, H_2) \to Hom_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{G}(H_1), \mathcal{G}(H_2))$$

είναι πλήρης ισομετρία (w^*-συνεχής). Παρόμοια για ένα συναρτητή $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{DM}$.

(ii) Ο συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{M}$ λέμε ότι ***σέβεται τις αναπαραστάσεις*** *αν έχει την ιδιότητα όταν (H, α) είναι αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M}$ ώστε η απεικόνιση $\alpha : \mathcal{A}_1 \to B(H)$ να είναι πλήρης ισομετρία η αντίστοιχη απεικόνιση $\mathcal{G}(\alpha) : \mathcal{B}_1 \to B(\mathcal{G}(H))$ να είναι πλήρης ισομετρία επίσης.*

(iii) Λέμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{M}$ ***σέβεται την ανακλαστικότητα*** *αν για κάθε (H, α) αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M}$ για την οποία η απεικόνιση $\alpha : \mathcal{A}_1 \to B(H)$ είναι πλήρης ισομετρία και η άλγεβρα $\alpha(\mathcal{A}_1)$ είναι ανακλαστική, τότε η απεικόνιση $\beta : \mathcal{B}_1 \to B(\mathcal{G}(H))$ είναι πλήρης ισομετρία και η άλγεβρα $\beta(\mathcal{B}_1)$ είναι ανακλαστική. Όπου $(\mathcal{G}(H), \beta)$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{M}$.*

(v) Ο συναρτητής $\mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{DM}$ λέμε ότι ***σέβεται τους συνδέσμους*** *αν για κάθε αντικείμενο (H, α) της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}_1}\mathfrak{M}$ ισχύει*

$$\mathcal{G}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}_1))) = \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}_1)),$$

όπου $(\mathcal{G}(H), \beta)$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{B}_1}\mathfrak{M}$. Παρατήρησε ότι

$$\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}_1)) \subset Hom_{\mathcal{A}_1}^{\mathfrak{D}}(H, H) \text{ και } \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}_1)) \subset Hom_{\mathcal{B}_1}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{G}(H), \mathcal{G}(H)).$$

Λήμμα 5.6.5 *Ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ σέβεται τις αναπαραστάσεις.*

Απόδειξη Σε αυτή την απόδειξη ταυτίζουμε την άλγεβρα $\mathcal{A}$ με την $\alpha_0(\mathcal{A})$ και την άλγεβρα $\mathcal{B}$ με την $\beta_0(\mathcal{B})$. Έστω (H, α) αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ με την αναπαράσταση α να είναι πλήρης ισομετρία. Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), \beta)$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο. Θα αποδείξουμε ότι η αναπαράσταση β είναι επίσης πλήρης ισομετρία.

Σταθεροποιούμε διάνυσμα $y = (y_1, ..., y_n)^t \in Ball(\mathcal{F}(H_0)^n)$ και πίνακα $(B_{ij}) \in M_n(\mathcal{B})$ για αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε από το Λήμμα 5.2.1 τις μερικές ισομετρίες $\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M}$.

Για $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $\{i_1, ..., i_N\} \subset I$ ώστε

$$\begin{aligned}\|(B_{ij})(y)\|^2 - \epsilon =& \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} B_{ik}(y_k) \right\|^2 - \epsilon \\ \leq& \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^*(y_k) \right\|^2 - \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 5.2.1 βρίσκουμε σύνολο $\{j_1, ..., j_m\} \subset I$ ώστε

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^*(y_k) \right\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \\ \leq& \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{t=1}^{m} V_{j_t} V_{j_t}^* \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^*(y_k) \right) \right\|^2 - \frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

Επειδή οι προβολές $(V_{j_t} V_{j_t}^*)$ είναι ανά δύο κάθετες έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|(B_{ij})(y)\|^2 - \epsilon \leq& \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \left\| V_{j_t}^* \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{l=1}^{N} V_{i_l} V_{i_l}^*(y_k) \right) \right\|^2 - \frac{\epsilon}{4} \\ =& \|(V^* \oplus ... \oplus V^*)(B_{ij})(U \oplus ... \oplus U)(z)\|^2 - \frac{\epsilon}{4},\end{aligned}$$

όπου

$$z = (V_{i_1}^*(y_1), ..., V_{i_N}^*(y_1), V_{i_1}^*(y_2), ..., V_{i_N}^*(y_2), ..., V_{i_N}^*(y_n))^t,$$
$$V = (V_{j_1}, ..., V_{j_m}), U = (V_{i_1}, ..., V_{i_N}).$$

Παρατήρησε ότι

$$\|z\|^2=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\|V_{i_k}^*(y_l)\|^2=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\|V_{i_k}V_{i_k}^*(y_l)\|^2$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\left\|\left(\sum_{k=1}^{N}V_{i_k}V_{i_k}^*\right)(y_l)\right\|^2\leq\sum_{l=1}^{n}\|y_l\|^2=\|y\|^2\leq 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\|(B_{ij})(y)\|^2-\epsilon\leq\|(V^*\oplus...\oplus V^*)(B_{ij})(U\oplus...\oplus U)\|^2-\frac{\epsilon}{4}$$
$$=\|\alpha\left((V^*\oplus...\oplus V^*)(B_{ij})(U\oplus...\oplus U)\right)\|^2-\frac{\epsilon}{4}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του ότι η απεικόνιση α είναι πλήρης ισομετρία. Προχωρώντας την προηγούμενη ανισότητα βρίσκουμε διανύσματα x_{lk} του χώρου H ώστε το διάνυσμα $x=(x_{11},...,x_{N1},x_{12},...,x_{N2},...,x_{Nn})^t\in H^{Nn}$ να έχει νόρμα 1 και να ισχύει

$$\|(B_{ij})(y)\|^2-\epsilon\leq\|\alpha\left((V^*\oplus...\oplus V^*)(B_{ij})(U\oplus...\oplus U)\right)(x)\|^2$$

Έπεται ότι

$$\|(B_{ij})(y)\|^2-\epsilon\leq\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\alpha(V_{j_r}^*B_{sk}V_{i_l})(x_{lk})\right\|^2 \tag{5.6.2}$$

Έστω

$$\omega_k=\sum_{l=1}^{N}V_{i_l}\otimes x_{lk}\in\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H),\ k=1,...,n,$$

τότε

$$\sum_{k=1}^{n}\|\omega_k\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}=\sum_{k=1}^{n}\sup_{S\in Ball(M_{p,1}(\mathcal{V})),p\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{l=1}^{N}\alpha(SV_{i_l})(x_{lk})\right\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sup_{S\in Ball(M_{p,1}(\mathcal{V})),p\in\mathbb{N}}\left\|\alpha(S(V_{i_1}...V_{i_N}))\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \vdots\\ x_{Nk}\end{pmatrix}\right\|^2\leq\sum_{k=1}^{n}\left\|\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \vdots\\ x_{Nk}\end{pmatrix}\right\|^2\leq 1.$$

Η ανισότητα είναι συνέπεια του ότι $\|(V_{i_1}...V_{i_N})\| = 1$ και η απεικόνιση α είναι πλήρης ισομετρία. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\|\beta((B_{ij}))\|^2 \geq \|\beta((B_{ij}))(\omega_1...\omega_n)^t\|^2 \\
=&\sum_{s=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\beta(B_{sk})(\omega_k)\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sum_{s=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}B_{sk}V_{i_l}\otimes x_{lk}\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \\
=&\sum_{s=1}^{n}\sup_{S\in Ball(M_{t,1}(\mathcal{V})),t\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\alpha(SB_{sk}V_{i_l})(x_{lk})\right\|^2
\end{aligned}$$

Παρατήρησε ότι

$$S = (V^*_{j_1}...V^*_{j_m})^t \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V}))$$

και επομένως από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|\beta((B_{ij}))\|^2 \geq &\sum_{s=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\alpha((V^*_{j_1}...V^*_{j_m})^t B_{sk}V_{i_l})(x_{lk})\right\|^2 \\
=&\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}\alpha(V^*_{j_r}B_{sk}V_{i_l})(x_{lk})\right\|^2.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα (5.6.2) προκύπτει ότι $\|(B_{ij})(y)\|^2 - \epsilon \leq \|\beta((B_{ij}))\|^2$. Επειδή τα y και ϵ ήταν αυθαίρετα έχουμε $\|(B_{ij})\| \leq \|\beta((B_{ij}))\|$. Από την Πρόταση 5.3.1 λαμβάνουμε τελικά την ισότητα $\|(B_{ij})\| = \|\beta((B_{ij}))\|$. $\square$

Από το προηγούμενο λήμμα και το Θεώρημα 5.6.4 έπεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.6.6 *Κάθε συναρτητής που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.1.3 σέβεται τις αναπαραστάσεις.*

Λήμμα 5.6.7 *Ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} :\ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to\ {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ σέβεται τούς συνδέσμους.*

Απόδειξη Σε αυτή την απόδειξη ταυτίζουμε την άλγεβρα $\mathcal{A}$ με την $\alpha_0(\mathcal{A})$ και την άλγεβρα $\mathcal{B}$ με την $\beta_0(\mathcal{B})$. Έστω (H, α) αντικείμενο της κατηγορίας ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), \beta)$ το αντίστοιχο αντικείμενο. Υποθέτουμε ότι L είναι προβολή του συνδέσμου της άλγεβρας $\alpha(\mathcal{A})$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L) \in \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}))$. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο τελεστής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)$ είναι προβολή επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι $*$-συναρτητής (Θεώρημα 5.4.3).

Αν $B \in \mathcal{B}, M \in \mathcal{M}$ και $x \in H$ τότε

$$\beta(B)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(M \otimes x) = \beta(B)(M \otimes L(x)) = BM \otimes L(x).$$

Από το Λήμμα 5.2.4 έχουμε ότι

$$BM \otimes L(x) \in [N \otimes L(y) : N \in \mathcal{M}, y \in H]^{-} = [\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(N \otimes y) : N \in \mathcal{M}, y \in H]^{-}.$$

Έπεται ότι

$$\beta(B)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(M \otimes x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)).$$

Επειδή ο χώρος $\mathcal{M} \otimes H$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ από το Πόρισμα 5.2.5, έχουμε

$$\beta(B)\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(z) \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) \text{ για κάθε } z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), B \in \mathcal{B}$$

και άρα $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L) \in \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}))$. Αποδείξαμε ότι

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) \subset \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B})).$$

Θεωρούμε από το Λήμμα 5.5.3 την αναπαράσταση

$$\widetilde{\alpha} : \mathcal{A} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) : \widetilde{\alpha}(A)(S \otimes z) = AS \otimes z, A \in \mathcal{A}, S \in \mathcal{V}, z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$$

και τον μοναδιαίο τελεστή $U_H : \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) \to H$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$U_H \widetilde{\alpha}(A) U_H^* = \alpha(A) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Έπεται ότι

$$U_H \mathrm{Lat}(\widetilde{\alpha}(\mathcal{A})) U_H^* = \mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A})). \tag{5.6.3}$$

Επειδή ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ είναι συναρτητής ισοδυναμίας η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{U}} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H) \to Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)), \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)))$$

όπου

$$Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H) = \alpha(\Delta(\mathcal{A}))' \text{ και } Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)), \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))) = \widetilde{\alpha}(\Delta(\mathcal{A}))'$$

είναι $*$-ισομορφισμός που από το Λήμμα 5.5.3 ικανοποιεί την εξίσωση

$$U_H \circ \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)) = F \circ U_H \text{ για κάθε } F \in \alpha(\Delta(\mathcal{A}))'.$$

Επομένως από την εξίσωση (5.6.3) έχουμε

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) = U_H^* \mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))U_H = \mathrm{Lat}(\widetilde{\alpha}(\mathcal{A})) \tag{5.6.4}$$

Αν ο σύνδεσμος $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A})))$ περιέχεται γνήσια στον $\mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}))$ ο σύνδεσμος $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))))$ περιέχεται γνήσια στον $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B})))$. Αλλά όπως στο πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}))) \subset \mathrm{Lat}(\widetilde{\alpha}(\mathcal{A}))$$

που έρχεται σε αντίθεση με την εξίσωση (5.6.4). Συνεπώς

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) = \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B})). \qquad \square$$

Θεώρημα 5.6.8 *Κάθε συναρτητής που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.1.3 σέβεται τους συνδέσμους.*

Απόδειξη Έστω $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha)), (\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(\alpha)) \in {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ τα αντίστοιχα αντικείμενα. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) = \mathrm{Lat}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha)(\mathcal{B})).$$

Από το Θεώρημα 5.6.4 υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $V \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H))$ που ικανοποιεί την ισότητα $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)V = V\mathcal{F}(F)$ για κάθε $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H)$. Επομένως ισχύει $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(L)V = V\mathcal{F}(L)$ για κάθε $L \in \mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))$ και άρα έχουμε

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) = V\mathcal{F}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A})))V^*.$$

Επίσης ο V ικανοποιεί την ισότητα $V\mathcal{F}(\alpha)(B) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha)(B)V$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$, επομένως $V\mathcal{F}(\alpha)(\mathcal{B})V^* = \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha)(\mathcal{B})$ και συνεπώς

$$V\mathrm{Lat}(\mathcal{F}(\alpha)(\mathcal{B}))V^* = \mathrm{Lat}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\alpha)(\mathcal{B})).$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ισότητες έχουμε τελικά

$$\mathcal{F}(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A}))) = \mathrm{Lat}(\mathcal{F}(\alpha)(\mathcal{B})). \qquad \square$$

Λήμμα 5.6.9 *Ο συναρτητής* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ *είναι normal.*

Απόδειξη Έστω $H_1, H_2 \in_{\mathcal{A}} \mathfrak{M}$. Έχουμε αποδείξει στο Θεώρημα 5.4.1 ότι $\|\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)\| \leq \|F\|$ για κάθε $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$. Επομένως από το Θεώρημα 2.8.1 αρκεί να δείξουμε ότι αν

$$(F_i) \subset Ball(Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2))$$

είναι ένα δίκτυο που συγκλίνει στην wot τοπολογία στο 0 τότε το δίκτυο $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_i))$ συγκλίνει επίσης στην wot τοπολογία στο 0.

Θεωρούμε από την παράγραφο 5.2 τις απεικονίσεις πηλίκου π, π_S και τις συστολές

$$\theta_S : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2) \to H_{2,S} : \theta_S(\pi(T \otimes y)) = \pi_S(T \otimes y)$$

για κάθε $S \in Ball(M_{n,1}(\mathcal{V})), n \in \mathbb{N}$.

Έστω $M \in \mathcal{M}, x \in H_1, T \in \mathcal{U}, y \in H_1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_i)(\pi(M \otimes x)), \theta_S^*(\pi_S(T \otimes y)) \rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} \\
&= \langle \pi(M \otimes F_i(x)), \theta_S^*(\pi_S(T \otimes y)) \rangle_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} \\
&= \langle \theta_S(\pi(M \otimes F_i(x))), \pi_S(T \otimes y) \rangle_{H_{2,S}} = \langle \pi_S(M \otimes F_i(x)), \pi_S(T \otimes y) \rangle_{H_{2,S}} \\
&= \langle \alpha_2(SM)F_i(x), \alpha_2(ST)(y) \rangle \to 0
\end{aligned}$$

Το Λήμμα 5.2.3 μας λέει ότι

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2) = [\theta_S^*(\pi_S(T \otimes y)) : S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{V})), m \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{U}, y \in H_2]^-$$

και το Πόρισμα 5.2.5 ότι ο χώρος $\pi(\mathcal{M} \otimes H_1)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)$. Επειδή το δίκτυο $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_i))$ είναι φραγμένο έπεται ότι

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_i)(z), \omega \rangle \to 0 \text{ για κάθε } z \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \omega \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2). \qquad \square$$

Λήμμα 5.6.10 *Ο συναρτητής* $\mathcal{F}_{\mathcal{U}} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$ *είναι πλήρως ισομετρικός.*

Απόδειξη Ταυτίζουμε την άλγεβρα $\alpha_0(\mathcal{A})$ με την $\mathcal{A}$ και την άλγεβρα $\beta_0(\mathcal{B})$ με την $\mathcal{B}$. Έστω $(H_1, \alpha_1), (H_2, \alpha_2) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $(F_{ij}) \in M_n(Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2))$ για $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))\| = \|(F_{ij})\|$. Σταθεροποιούμε διανύσματα

$$z_j = \sum_{k=1}^{m_j} M_k^j \otimes x_k^j \in \mathcal{M} \otimes H_1, \quad j = 1, ..., n$$

και συμβολίζουμε με z το διάνυσμα $(z_1, ..., z_n)^t$. Τότε

$$\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))(z)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij})(z_j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} M_k^j \otimes F_{ij}(x_k^j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)}^2 .$$

Από την Πρόταση 5.2.2 για κάθε $i = 1, ..., n$ έχουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} M_k^j \otimes F_{ij}(x_k^j) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} = \sup_{S \in Ball(M_{r,1}(\mathcal{M}^*)), r \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_2(SM_k^j) F_{ij}(x_k^j) \right\|_{H_2^r}$$

Επομένως για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$ και

$$S_i = (S_1^i, ..., S_r^i)^t \in Ball(M_{r,1}(\mathcal{M}^*)), i = 1, ..., n$$

ώστε

$$\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))(z)\|^2 - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_2(S_i M_k^j) F_{ij}(x_k^j) \right\|_{H_2^r}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_2(S_l^i M_k^j) F_{ij}(x_k^j) \right\|_{H_2}^2 .$$

Επειδή $S_l^i M_k^j \in \Delta(\mathcal{A})$ και $F_{ij} \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$ έχουμε ότι $\alpha_2(S_l^i M_k^j) F_{ij} = F_{ij} \alpha_1(S_l^i M_k^j)$ για όλα τα i, j, l, k και άρα η προηγούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))(z)\|^2 - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} F_{ij} \alpha_1(S_l^i M_k^j)(x_k^j) \right\|_{H_2}^2$$

$$= \sum_{l=1}^{r} \left\| (F_{ij}) \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_1(S_l^1 M_k^1)(x_k^1) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_1(S_l^n M_k^n)(x_k^n) \end{bmatrix} \right\|_{H_2^n}^2$$

$$
\leq \|(F_{ij})\|^2 \sum_{l=1}^{r} \left\| \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_1(S_l^1 M_k^1)(x_k^1) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_1(S_l^n M_k^n)(x_k^n) \end{bmatrix} \right\|_{H_1^n}^2
$$

$$
= \|(F_{ij})\|^2 \sum_{l=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_1(S_l^i M_k^i)(x_k^i) \right\|_{H_1}^2 = \|(F_{ij})\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_1(S_i M_k^i)(x_k^i) \right\|_{H_1^r}^2
$$

$$
\leq \|(F_{ij})\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|z_i\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)} = \|(F_{ij})\|^2 \, \|z\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)^n}.
$$

Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο έχουμε $\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))(z)\| \leq \|(F_{ij})\|\|z\|$ για κάθε $z \in M_{n,1}(\mathcal{M} \otimes H_1)$. Από το Πόρισμα 5.2.5 έπεται ότι

$$
\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))\| \leq \|(F_{ij})\|. \tag{5.6.5}
$$

Παρόμοια έχουμε την ανισότητα

$$
\|(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij})))\| \leq \|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))\|. \tag{5.6.6}
$$

Θεωρούμε από το Λήμμα 5.5.3 τους μοναδιαίους τελεστές

$$
U_{H_i} \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_i), H_i), i = 1, 2
$$

οι οποίοι ικανοποιούν την ισότητα

$$
\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) = U_{H_2}^* F U_{H_1} \text{ για κάθε } F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)).
$$

Επειδή

$$
\|(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij})))\| = \left\|(U_{H_2}^* F_{ij} U_{H_1})\right\| = \|(F_{ij})\|
$$

από τις ισότητες (5.6.5) και (5.6.6) παίρνουμε $\|(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F_{ij}))\| = \|(F_{ij})\|$. $\square$

Θεώρημα 5.6.11 *Κάθε συναρτητής που επάγει την ισοδυναμία του Θεωρήματος 5.1.3 είναι normal και πλήρως ισομετρικός.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 5.6.4 για αντικείμενα $H_i \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, $i = 1, 2$ υπάρχουν μοναδιαίοι τελεστές $V_i \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_i), \mathcal{F}(H_i))$, $i = 1, 2$ ώστε $\mathcal{F}(F) = V_2 \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) V_1^*$ για κάθε $F \in Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2)$. Έπεται από τα Λήμματα 5.6.9, 5.6.10 ότι η απεικόνιση

$$
\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H_1, H_2) \to Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H_1), \mathcal{F}(H_2))
$$

είναι w^*-συνεχής και πλήρης ισομετρία. $\square$

Παρατήρηση 5.6.12 *Στο Παράδειγμα 4.10 στο [45] υπάρχει παράδειγμα $*$-συναρτητή μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$, W^*-αλγεβρών $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ που δεν είναι normal.*

Θεώρημα 5.6.13 *Έστω $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ ώστε η απεικόνιση α να είναι πλήρης ισομετρία. Αν $(\mathcal{F}(H), \beta) \in {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ είναι το αντίστοιχο αντικείμενο τότε η απεικόνιση β είναι πλήρης ισομετρία και οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 5.6.6, η απεικόνιση β είναι πλήρης ισομετρία. Συμβολίζουμε με σ την απεικόνιση

$$\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H, H) = \alpha(\Delta(\mathcal{A}))' \to \beta(\Delta(\mathcal{B}))' = Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(H))$$

που είναι $*$-ισομορφισμός. Από το Λήμμα 4.2.1 ο χώρος

$$\mathcal{Y} = \{N \in B(H, \mathcal{F}(H)) : NA = \sigma(A)N \text{ για κάθε } A \in \alpha(\Delta(\mathcal{A}))'\}$$

είναι ουσιώδες TRO. Στην συνέχεια της απόδειξης αν K είναι χώρος Χίλμπερτ, T ένας τελεστής στον K και $\mathcal{C} \subset B(K)$ συμβολίζουμε με K^∞ το αριθμήσιμο άπειρο ευθύ άθροισμα $K \oplus K \oplus \ldots$, με $T^\infty \in B(K^\infty)$ τον τελεστή $T \oplus T \oplus ...$, και με $\mathcal{C}^\infty$ το σύνολο $\{C^\infty : C \in \mathcal{C}\}$.

Η απεικόνιση $\alpha^\infty : \mathcal{A} \to B(H^\infty)$ που δίδεται από την σχέση $\alpha^\infty(A) = \alpha(A)^\infty$ είναι normal αναπαράσταση. Συνεπώς $(H^\infty, \alpha^\infty) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και άρα $(\mathcal{F}(H^\infty), \mathcal{F}(\alpha^\infty)) \in {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$. Έστω $U \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(H^\infty), \mathcal{F}(H)^\infty)$ ο μοναδιαίος τελεστής που κατασκευάσθηκε στο Λήμμα 5.6.2. Αυτός ορίζει μία μοναδιαία ισοδυναμία μεταξύ των αλγεβρών

$$Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H^\infty), \mathcal{F}(H^\infty)) = (\mathcal{F}(\alpha^\infty)(\Delta(\mathcal{B})))'$$

και

$$Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H)^\infty, \mathcal{F}(H)^\infty) = (\beta(\Delta(\mathcal{B}))^\infty)'$$

που απεικονίζει τον σύνδεσμο της άλγεβρας $\mathcal{F}(\alpha^\infty)(\mathcal{B})$ επί του συνδέσμου της άλγεβρας $\beta(\mathcal{B})^\infty$. Από την άλλη μεριά ο συναρτητής $\mathcal{F}$ ορίζει ένα $*$-ισομορφισμό μεταξύ των αλγεβρών

$$Hom_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{D}}(H^\infty, H^\infty) = (\alpha(\Delta(\mathcal{A}))^\infty)' \text{ και } Hom_{\mathcal{B}}^{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(H^\infty), \mathcal{F}(H^\infty))$$

και ο οποίος από το Θεώρημα 5.6.8 απεικονίζει τον σύνδεσμο της άλγεβρας $\alpha(\mathcal{A})^\infty$ επί του συνδέσμου της άλγεβρας $\mathcal{F}(\alpha^\infty)(\mathcal{B})$. Παίρνοντας σύνθεση με την παραπάνω μοναδιαία ισοδυναμία παίρνουμε $*$-ισομορφισμό

$$\theta : (\alpha(\Delta(\mathcal{A}))^\infty)' \to (\beta(\Delta(\mathcal{B}))^\infty)'$$

που έχει την ιδιότητα $\theta(\mathrm{Lat}(\alpha(\mathcal{A})^\infty)) = \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B})^\infty)$ και ο οποίος ικανοποιεί την σχέση

$$\theta((F_{ij})_{i,j}) = (\sigma(F_{ij}))_{i,j} \text{ για } \text{ κάθε } (F_{ij})_{i,j} \in (\alpha(\Delta(\mathcal{A}))^\infty)'.$$

Από αυτό προκύπτει ότι αν $\mathcal{X}$ είναι ο χώρος

$$\{(T_{ij}) \in B(H^\infty, \mathcal{F}(H)^\infty) : (T_{ij})(F_{ij}) = \theta((F_{ij}))(T_{ij}) \ \forall\ (F_{ij}) \in (\alpha(\Delta(\mathcal{A}))^\infty)'\},$$

τότε $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^\infty$. Επειδή οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A})^\infty, \beta(\mathcal{B})^\infty$ είναι ανακλαστικές (βλέπε για παράδειγμα το A.1.5 στο [10]) από το Θεώρημα 4.2.3 έχουμε

$$\mathcal{X}\alpha(\mathcal{A})^\infty\mathcal{X}^* \subset \beta(\mathcal{B})^\infty, \ \mathcal{X}^*\beta(\mathcal{B})^\infty\mathcal{X} \subset \alpha(\mathcal{A})^\infty.$$

Επομένως

$$\mathcal{Y}\alpha(\mathcal{A})\mathcal{Y}^* \subset \beta(\mathcal{B}), \ \mathcal{Y}^*\beta(\mathcal{B})\mathcal{Y} \subset \alpha(\mathcal{A}).$$

Από την Πρόταση 4.1.2 συμπεραίνουμε ότι οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες. $\square$

Θεώρημα 5.6.14 *Κάθε συναρτητής που επάγει την ισοδυναμία του Θεωρήματος 5.1.3 σέβεται την ανακλαστικότητα.*

Απόδειξη Έστω $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ ώστε η απεικόνιση α να είναι πλήρης ισομετρία και η άλγεβρα $\alpha(\mathcal{A})$ να είναι ανακλαστική. Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο που αντιστοιχεί είναι το $(\mathcal{F}(H), \beta) \in {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$. Από το Θεώρημα 5.6.6 η β είναι πλήρης ισομετρία. Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι οι άλγεβρες $\alpha(\mathcal{A}), \beta(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες και άρα από την παρατήρηση 4.1.8 αφού η άλγεβρα $\alpha(\mathcal{A})$ είναι ανακλαστική είναι και η $\beta(\mathcal{B})$. $\square$

Θεώρημα 5.6.15 *Έστω $\mathcal{F}$ συναρτητής που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.1.3 με Δ-επέκταση $\mathcal{F}^\delta$. Τότε υπάρχει $*$-συναρτητής ισοδυναμίας $\mathcal{G} : {}_{\Delta(\mathcal{A})}\mathfrak{M} \to {}_{\Delta(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$ ώστε οι συναρτητές*

$$\mathcal{F}^\delta, \mathcal{G} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{D}\mathfrak{M} \to {}_{\Delta(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$$

να είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι τα $\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}, \mathcal{F}$ είναι όπως στην αρχή αυτής της παραγράφου. Ταυτίζουμε τις άλγεβρες $\mathcal{A}$ με την $\alpha_0(\mathcal{A})$ και την $\mathcal{B}$ με την $\beta_0(\mathcal{B})$. Παρατήρησε ότι

$$\Delta(\mathcal{A}) = [\mathcal{M}^*\mathcal{M}]^{-w^*}, \Delta(\mathcal{B}) = [\mathcal{M}\mathcal{M}^*]^{-w^*}.$$

Σύμφωνα με την θεωρία του Rieffel [45] ορίζεται ο συναρτητής

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}: \ {}_{\Delta(\mathcal{A})}\mathfrak{M} \to \ {}_{\Delta(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$$

όπως παρακάτω:

Για κάθε $(H, \alpha) \in \ {}_{\Delta(\mathcal{A})}\mathfrak{M}$ στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{M} \otimes H$ ορίζεται μία sesqulinear μορφή από τον τύπο:

$$\langle M \otimes x, N \otimes y \rangle = \langle \alpha(N^* M)(x), y \rangle, N, M \in \mathcal{M}, x, y \in H.$$

Αν $\mathcal{L} = \{z \in \mathcal{M} \otimes H : \langle z, z \rangle = 0\}$ ο χώρος $\mathcal{M} \otimes H/\mathcal{L}$ γίνεται ένας προ-Χίλμπερτ χώρος. Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)$ την πλήρωσή του. Επίσης συμβολίζουμε κάθε στοιχείο $(M \otimes x) + \mathcal{L}$ του $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)$ με $M \otimes_{\mathcal{M}} x$. O Rieffel ορίζει normal αναπαράσταση της άλγεβρας $\Delta(\mathcal{B})$ στον χώρο $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)$ ως εξής:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(\alpha)(B)(M \otimes_{\mathcal{M}} x) = BM \otimes_{\mathcal{M}} x, B \in \Delta(\mathcal{B}), M \in \mathcal{M}, x \in H.$$

Επίσης για κάθε $(H_i, \alpha_i) \in \ {}_{\Delta(\mathcal{A})}\mathfrak{M}, i = 1, 2, \ F \in Hom_{\Delta(\mathcal{A})}(H_1, H_2)$ ορίζει $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(F) \in Hom_{\Delta(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H_1), \mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H_2))$ από τον τύπο:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(F)(M \otimes_{\mathcal{M}} x) = M \otimes_{\mathcal{M}} F(x), M \in \mathcal{M}, x \in H_1.$$

O Rieffel αποδεικνύει ότι ο συναρτητής $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ είναι $*$-συναρτητής ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}^{\delta}$ την Δ-επέκταση του $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. Από το Θεώρημα 5.6.4 αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}^{\delta}: \ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to \ {}_{\Delta(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$ είναι ισοδύναμος με τον συναρτητή $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}: \ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM} \to \ {}_{\Delta(\mathcal{B})}\mathfrak{M}$.

Σταθεροποιούμε $(H, \alpha) \in \ {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ και $M_i \in \mathcal{M}, x_i \in H, i = 1, ..., n$. Για κάθε $S \in Ball(M_{m,1}(\mathcal{M}^*)), m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(SM_i)(x_i) \right\|^2 = \sum_{i,j} \left\langle \alpha(M_j^* S^* S M_i)(x_i), x_j \right\rangle_H$$
$$= \left\langle \alpha((M_1^* ... M_n^*)^t S^* S (M_1 ... M_n)(x_1 ... x_n)^t, (x_1 ... x_n)^t \right\rangle_{H^n}.$$

Επειδή

$$(M_1^* ... M_n^*)^t S^* S (M_1 ... M_n) \leq (M_1^* ... M_n^*)^t (M_1 ... M_n)$$

παίρνουμε την ανισότητα

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(SM_i)(x_i) \right\|^2 \leq \sum_{i,j} \left\langle \alpha(M_j^* M_i)(x_i), x_j \right\rangle_H = \left\| \sum_{i=1}^{n} M_i \otimes_{\mathcal{M}} x_i \right\|^2_{\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)}.$$

Από την Πρόταση 5.2.2 έπεται ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} M_i \otimes x_i\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} M_i \otimes_{\mathcal{M}} x_i\right\|_{\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)}. \tag{5.6.7}$$

Θεωρούμε από το Λήμμα 5.2.1 τις μερικές ισομετρίες $\{V_k, k \in I\} \subset \mathcal{M}$. Επειδή

$$\lim_{E \subset I, \text{ finite}} \sum_{i,j} \left\langle \alpha\left(M_j^* \sum_{k \in E} V_k V_k^* M_i\right)(x_i), x_j \right\rangle_H = \left\|\sum_i M_i \otimes_{\mathcal{M}} x_i\right\|^2_{\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)}$$

για $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $\{i_1, ..., i_N\} \subset I$ ώστε

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{n} M_i \otimes_{\mathcal{M}} x_i\right\|^2_{\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)} - \epsilon < \sum_{i,j} \left\langle \alpha\left(M_j^* \sum_{k=1}^{N} V_{i_k} V_{i_k}^* M_i\right)(x_i), x_j \right\rangle_H \\
=&\|\alpha((V_{i_1}^* ... V_{i_N}^*)^t (M_1 ... M_n))(x_1 ... x_n)^t\|^2_{H^N} \\
=&\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha((V_{i_1}^* ... V_{i_N}^*)^t M_i)(x_i)\right\|^2_{H^N} \leq \left\|\sum_{i=1}^{N} M_i \otimes x_i\right\|^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}
\end{aligned}$$

Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} M_i \otimes_{\mathcal{M}} x_i\right\|_{\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} M_i \otimes x_i\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Συνδυάζοντας την ανισότητα αυτή με την ανισότητα (5.6.7) παίρνουμε τελικά ισότητα. Από το Πόρισμα 5.2.5 έπεται ότι η απεικόνιση

$$M \otimes x \to M \otimes_{\mathcal{M}} x, M \in \mathcal{M}, x \in H$$

επεκτείνεται σε μοναδιαίο τελεστή $W_H : \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H) \to \mathcal{G}_{\mathcal{M}}(H)$. Εύκολα ελέγχεται ότι η οικογένεια $\{W_H : H \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\}$ επάγει την ζητούμενη ισοδυναμία. $\square$

5.7 Εφαρμογές και παραδείγματα

Πρόταση 5.7.1 *Αν η $\mathcal{A}$ είναι CSL άλγεβρα που είναι Δ-ισοδύναμη με μία μοναδιαία αφηρημένη δυική άλγεβρα τελεστών $\mathcal{B}$ τότε υπάρχει normal, πλήρως ισομετρική αναπαράσταση β της άλγεβρας $\mathcal{B}$ ώστε οι $\mathcal{A}, \beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες. Από την παρατήρηση 4.4.15 έπεται ότι η άλγεβρα $\beta(\mathcal{B})$ είναι επίσης CSL άλγεβρα.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{F} : {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M} \to_{\mathcal{B}} \mathfrak{M}$ είναι συναρτητής ισοδυναμίας που έχει Δ-επέκταση $*$-συναρτητή που επάγει ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{DM}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{DM}$. Επίσης υποθέτουμε ότι $\mathcal{A} \subset B(H)$ και $(\mathcal{F}(H), \beta)$ είναι το αντικείμενο που αντιστοιχεί στην ταυτοτική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Από το Θεώρημα 5.6.13 έπεται ότι η απεικόνιση β είναι πλήρης ισομετρία και οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \beta(\mathcal{B})$ είναι TRO είναι ισοδύναμες. $\square$.

Πρόταση 5.7.2 *Δύο CSL άλγεβρες είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν TRO ισοδύναμες.*

Απόδειξη Οι TRO ισοδύναμες άλγεβρες είναι Δ-ισοδύναμες. Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι οι CSL άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Δ-ισοδύναμες. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι υπάρχει πλήρως ισομετρική και normal αναπαράσταση β της $\mathcal{B}$ ώστε οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \beta(\mathcal{B})$ να είναι TRO ισοδύναμες. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\beta(\mathrm{Lat}(\mathcal{B})) = \mathrm{Lat}(\beta(\mathcal{B}))$ και $\beta(\Delta(\mathcal{B})') = \Delta(\beta(\mathcal{B}))'$. Από το Θεώρημα 4.2.3 προκύπτει ότι οι άλγεβρες $\mathcal{B}, \beta(\mathcal{B})$ είναι TRO ισοδύναμες. Το συμπέρασμα εξάγεται τώρα από το γεγονός ότι η TRO ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας (Θεώρημα 4.1.4). $\square$

Παρατήρηση 5.7.3 (i) Υποθέτουμε ότι οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι CSL άλγεβρες που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ και έχουν συνεχείς η ολικά ατομικούς συνδέσμους. Από την προηγούμενη πρόταση και το Θεώρημα 4.4.13 προκύπτει ότι οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ισόμορφους συνδέσμους.

(ii) Γενικότερα από το Θεώρημα 4.4.13 δύο CSL άλγεβρες που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ είναι Δ-ισοδύναμες αν και μόνο αν οι σύνδεσμοι τους είναι ισόμορφοι μέσω ισομορφισμού συνδέσμων που «σέβεται την συνέχεια».

(iii) Αν δύο nests είναι ισόμορφα, οι αντίστοιχες nest άλγεβρες δεν είναι πάντα Δ-ισοδύναμες, ακόμα και αν έχουν ισόμορφες διαγωνίους. (Βλέπε παράδειγμα 5.7.7).

Πρόταση 5.7.4 *Αν η $\mathcal{A}$ είναι μη συνθετική CSL άλγεβρα δεν υπάρχει ισομετρικός και w^*-συνεχής μορφισμός $\alpha : \mathcal{A}_{min} \to B(H)$, όπου H είναι χώρος Χίλμπερτ, ώστε η άλγεβρα $\alpha(\mathcal{A}_{min})$ να είναι CSL άλγεβρα. Έπεται από την Πρόταση 5.7.1 ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}$ δεν μπορεί να είναι Δ-ισοδύναμη με οποιαδήποτε CSL άλγεβρα.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι H είναι χώρος Χίλμπερτ και $\alpha : \mathcal{A}_{min} \to B(H)$

ισομετρικός και w^*-συνεχής μορφισμός ώστε η άλγεβρα $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{min}$ να είναι CSL άλγεβρα. Επειδή $\mathrm{Ref}(\mathcal{A}_{min}) = \mathcal{A}$ και $\mathrm{Lat}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_{min}$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\alpha(\mathrm{Lat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Lat}(\mathcal{B})$. Από το Θεώρημα 4.3.7 έπεται ότι η άλγεβρα $\mathcal{B}$ δεν είναι συνθετική και επομένως η άλγεβρα $\mathcal{B}_{min}$ περιέχεται γνήσια στην $\mathcal{B}$. Συμπεραίνουμε ότι η άλγεβρα $\alpha^{-1}(\mathcal{B}_{min})$ περιέχεται γνήσια στην $\mathcal{A}_{min}$. Αυτό είναι άτοπο επειδή $\Delta(\mathcal{A}) \subset \alpha^{-1}(\mathcal{B}_{min}), \mathrm{Lat}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lat}(\alpha^{-1}(\mathcal{B}_{min}))$ και η $\mathcal{A}_{min}$ είναι η μικρότερη w^*-κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ με αυτές ιδιότητες. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι όμοιες nest άλγεβρες έχουν ισοδύναμες κατηγορίες. Σταθεροποιούμε nests $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ που δρουν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα και τις άλγεβρες $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{N}_1), \mathcal{B} = \mathrm{Alg}(\mathcal{N}_2)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός συνδέσμων $\theta : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ που διατηρεί την διάσταση των διαστημάτων. Το γεγονός αυτό είναι ισοδύναμο [15] με το ότι οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι όμοιες. Λέμε ότι ένας αντιστρέψιμος φραγμένος τελεστής $T \in B(H_1, H_2)$ επάγει την απεικόνιση θ αν $\theta(N)$ είναι η προβολή στον χώρο $TN(H_1)$ για κάθε $N \in \mathcal{N}_1$. Ορίζουμε τους χώρους

$$\mathcal{U} = \{T \in B(H_1, H_2) : \theta(N)^{\perp} TN = 0 \text{ για κάθε } N \in \mathcal{N}_1\},$$

$$\mathcal{V} = \{S \in B(H_2, H_1) : N^{\perp} S\theta(N) = 0 \text{ για κάθε } N \in \mathcal{N}_1\}.$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε ότι

$$\mathcal{A} = [\mathcal{V}\mathcal{U}]^{-w^*}, \mathcal{B} = [\mathcal{U}\mathcal{V}]^{-w^*}.$$

Επίσης παρατήρησε ότι $\mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ και $\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$.

Λήμμα 5.7.5 *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντιστρέψιμος φραγμένος τελεστής T που επάγει την απεικόνιση θ ώστε $\|T\| < 1 + \epsilon$ και $\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 13.20 στο [15] (similarity Theorem) υπάρχει ακολουθία (T_n) τελεστών που επάγουν την απεικόνιση θ και ακολουθία από μοναδιαίους τελεστές (U_n) ώστε $U_n - T_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$. Έπεται ότι

$$I - U_n^* T_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0 \Leftrightarrow U_n^* T_n \overset{\|\cdot\|}{\to} I \Leftrightarrow T_n^{-1} U_n \overset{\|\cdot\|}{\to} I$$
$$\Leftrightarrow T_n^{-1} U_n - I \overset{\|\cdot\|}{\to} 0 \Leftrightarrow T_n^{-1} - U_n^* \overset{\|\cdot\|}{\to} 0.$$

Αν $\epsilon > 0$ επιλέγουμε n_0 ώστε $\|U_{n_0} - T_{n_0}\| < \epsilon$ και $\|U_{n_0}^* - T_{n_0}^{-1}\| < \epsilon$ και θέτουμε $T = T_{n_0}$. □

Πρόταση 5.7.6 *Οι κατηγορίες ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη Έστω $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$. Ορίζουμε την ακόλουθη ημινόρμα στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{U} \otimes H$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes x_i \right\| = \sup_{S \in Ball(\mathcal{V})} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(ST_i)(x_i) \right\|.$$

Αυτή η ημινόρμα ικανοποιεί την ταυτότητα του παραλληλογράμμου. Επομένως αν $\mathcal{L} = \{z \in \mathcal{U} \otimes H : \|z\| = 0\}$ ο χώρος $\mathcal{U} \otimes H/\mathcal{L}$ γίνεται ένας προ-Χίλμπερτ χώρος. Συμβολίζουμε την πλήρωσή του με $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)$ και κάθε στοιχείο της μορφής $T \otimes x + \mathcal{L}$ με $T \otimes x$. Αν $B \in \mathcal{B}, T_1, ..., T_m \in \mathcal{U}, x_1, ..., x_m \in H$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} BT_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \leq \|B\| \left\| \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes x_j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}.$$

Επομένως ορίζεται μοναδιαίος αλγεβρικός μορφισμός

$$\beta : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)) : \beta(B)(T \otimes x) = BT \otimes x, B \in \mathcal{B}, T \in \mathcal{U}, x \in H.$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση β είναι πλήρης συστολή. Έστω

$$n \in \mathbb{N}, (B_{ij}) \in M_n(\mathcal{B}), z_j = \sum_{i=1}^{k_j} T_i^j \otimes x_i^j, j = 1, ..., n,$$
$$y = (\beta(B_{ij}))(z), z = (z_1, ..., z_n)^t.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} B_{kj} T_i^j \otimes x_i^j \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}^2.$$

Για $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $S_k \in Ball(\mathcal{V}), k = 1, ..., n$ ώστε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(S_k B_{kj} T_i^j)(x_i^j) \right\|^2.$$

Για $\delta > 0$ από το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να βρούμε $T \in \mathcal{U}, T^{-1} \in \mathcal{V}$ ώστε $\|T\| < 1 + \delta, \|T^{-1}\| < 1 + \delta$. Τώρα έχουμε

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha(S_k B_{kj} T) \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(T^{-1} T_i^j)(x_i^j) \right\|^2$$

$$= \left\| \alpha((S_i B_{ij} T)_{1 \leq i,j \leq n}) \left(\sum_{i=1}^{k_1} \alpha(T^{-1} T_i^1)(x_i^1), ..., \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(T^{-1} T_i^n)(x_i^n) \right)^t \right\|^2.$$

Παρατήρησε ότι

$$(S_i B_{ij} T)_{i,j} = (S_1 \oplus ... \oplus S_n)(B_{ij})_{i,j}(T \oplus ... \oplus T)$$

και άρα

$$\|\alpha((S_i B_{ij} T)_{i,j})\| \leq \|(B_{ij})_{i,j}\|(1 + \delta).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \|(B_{ij})\|^2 (1 + \delta)^2 \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{k_j} \alpha(T^{-1} T_i^j)(x_i^j) \right\|^2$$

$$\leq \|(B_{ij})\|^2 (1 + \delta)^4 \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{k_j} T_i^j \otimes x_i^j \right\|^2_{\mathcal{F}_\mathcal{U}(H)} = \|(B_{ij})\|^2 (1 + \delta)^4 \|z\|^4.$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\|y\|^2 - \epsilon \leq \|(B_{ij})\|^2 \|z\|^2,$$

και επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο έχουμε τελικά

$$\|(\beta(B_{ij}))\| \leq \|(B_{ij})\|.$$

Όπως στην Πρόταση 5.3.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\beta : \mathcal{B} \to B(\mathcal{F}_\mathcal{U}(H))$ είναι w^*-συνεχής και άρα $(\mathcal{F}_\mathcal{U}(H), \beta) \in {}_\mathcal{B}\mathfrak{M}$. Έχοντας ως σκοπό να ορίσουμε συναρτητή $\mathcal{F}_\mathcal{U} : {}_\mathcal{A}\mathfrak{M} \to {}_\mathcal{B}\mathfrak{M}$ πρέπει να ορίσουμε απεικόνιση

$$\mathcal{F}_\mathcal{U} : Hom_\mathcal{A}(H_1, H_2) \to Hom_\mathcal{B}(\mathcal{F}_\mathcal{U}(H_1), \mathcal{F}_\mathcal{U}(H_2))$$

για κάθε ζεύγος αντικειμένων $(H_i, \alpha_i), i = 1, 2$. Αν $F \in Hom_{\mathcal{A}}(H_1, H_2)$ έχουμε

$$\left\| \sum_i T_i \otimes F(x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2)} = \sup_{S \in Ball(\mathcal{V})} \left\| \sum_i \alpha_2(ST_i) F(x_i) \right\|$$
$$= \sup_{S \in Ball(\mathcal{V})} \left\| F \sum_i \alpha_1(ST_i)(x_i) \right\| \leq \|F\| \left\| \sum_i T_i \otimes x_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1)}.$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) \in B(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2))$ από την σχέση

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F)(T \otimes x) = T \otimes F(x), T \in \mathcal{U}, x \in H_1.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(F) \in Hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_1), \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H_2))$. Ο ορισμός του συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ έχει πια ολοκληρωθεί. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε συναρτητή $\mathcal{F}_{\mathcal{V}} : {}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M} \rightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$.

Τώρα σταθεροποιούμε $(H, \alpha) \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$ με αντίστοιχο αντικείμενο $(\mathcal{F}_{\mathcal{U}}, \beta)$. Αν $S_i \in \mathcal{V}, T_i \in \mathcal{U}, x_i \in H, i = 1, ..., r$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{U \in Ball(\mathcal{U})} \left\| \sum_{i=1}^{r} \beta(US_i)(T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$$
$$= \sup_{U \in Ball(\mathcal{U})} \left\| \sum_{i=1}^{r} US_iT_i \otimes x_i \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} = \sup_{U \in Ball(\mathcal{U})} \sup_{V \in Ball(\mathcal{V})} \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha(VU)\alpha(S_iT_i)(x_i) \right\|$$
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha(S_iT_i)(x_i) \right\|$$

Για αυθαίρετο $\epsilon > 0$ από το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να επιλέξουμε $T \in \mathcal{U}, T^{-1} \in \mathcal{V}$ ώστε $\|T\| < 1 + \epsilon, \|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$. Από τον ορισμό τής νόρμας $\| \cdot \|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)}$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i) \right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \geq \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha(\frac{T^{-1}}{\|T^{-1}\|} \frac{T}{\|T\|} S_iT_i)(x_i) \right\|$$

$$\geq \frac{1}{(1+\epsilon)^2}\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha(S_iT_i)(x_i)\right\|$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} S_i \otimes (T_i \otimes x_i)\right\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H)} \geq \left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha(S_iT_i)(x_i)\right\|.$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την αντίστροφή της που δείξαμε προηγούμενα παίρνουμε τελικά ισότητα. Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε μοναδιαίο τελεστή

$$U_H : \mathcal{F}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(H) \to H : U_H(S \otimes (T \otimes x)) = \alpha(ST)(x), S \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{U}, x \in H.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η οικογένεια των μοναδιαίων τελεστών $\{U_H : H \in {}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}\}$ επάγει την απαιτούμενη ισοδυναμία. $\square$

Παρά την προηγούμενη πρόταση, στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε ότι η ομοιότητα των nest αλγεβρών δεν επάγει την Δ-ισοδυναμία ακόμα και στην περίπτωση που έχουν ισόμορφες διαγωνίους.

Παράδειγμα 5.7.7 Στα παραδείγματα 4.3.5, 4.3.6 έχουμε όμοια nests $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ που δρουν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα, όπου η άλγεβρα $\mathcal{N}_1''$ είναι ολικά ατομική masa και η άλγεβρα $\mathcal{N}_2''$ είναι masa με την ιδιότητα η άλγεβρα $\mathcal{N}_2''|_{N(H_2)}$ να έχει μη τετριμμένο συνεχές μέρος γιά κάθε μη μηδενική προβολή $N \in \mathcal{N}_2$. Ορίζουμε τα nests

$$\mathcal{M}_1 = \{0 \oplus N : N \in \mathcal{N}_1\} \cup \{N \oplus H_1 : N \in \mathcal{N}_2\} \subset B(H_2 \oplus H_1)$$

$$\mathcal{M}_2 = \{0 \oplus N : N \in \mathcal{N}_2\} \cup \{N \oplus H_2 : N \in \mathcal{N}_1\} \subset B(H_1 \oplus H_2).$$

Αν $\theta : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ είναι ένας ισομορφισμός συνδέσμων που επάγεται από ένα αντιστρέψιμο φραγμένο τελεστή $T \in B(H_1, H_2)$ η απεικόνιση $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ που δίδεται από τις σχέσεις

$$\phi(0 \oplus N) = 0 \oplus \theta(N), N \in \mathcal{N}_1 \text{ και } \phi(N \oplus H_1) = \theta^{-1}(N) \oplus H_2, N \in \mathcal{N}_2$$

είναι επίσης ισομορφισμός που επάγεται από τον τελεστή $T^{-1} \oplus T$. Άρα από την προηγούμενη πρόταση, για τις άλγεβρες $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}(\mathcal{M}_1), \mathcal{B} = \mathrm{Alg}(\mathcal{M}_2)$ οι κατηγορίες ${}_{\mathcal{A}}\mathfrak{M}$, ${}_{\mathcal{B}}\mathfrak{M}$ είναι ισοδύναμες. Παρατήρησε ότι οι διαγώνιες αυτών των αλγεβρών είναι ισόμορφες επειδή $\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{N}_2'' \oplus \mathcal{N}_1'', \Delta(\mathcal{B}) = \mathcal{N}_1'' \oplus \mathcal{N}_2''$. Οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δεν είναι Δ-ισοδύναμες γιατί αν ήταν από την Πρόταση 5.7.2 θα ήταν TRO ισοδύναμες. Επομένως από το Θεώρημα 4.2.3 θα υπήρχε $*$-ισομορφισμός

$$\pi : \Delta(\mathcal{A}) \to \Delta(\mathcal{B}) \ \text{ώστε} \ \pi(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2.$$

Επειδή οι διαγώνιες είναι masas η απεικόνιση π επάγεται από μοναδιαίο τελεστή (Θεώρημα 2.2.6). Τώρα υπάρχουν δύο δυνατότητες: η $\pi(0 \oplus I_{H_1}) = 0 \oplus N$ για κάποιο $N \in \mathcal{N}_2$ οπότε οι άλγεβρες $\mathcal{N}_1'', \mathcal{N}_2''|_{N(H_2)}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμες, η $\pi(0 \oplus I_{H_1}) = M \oplus I_{H_2}$ για κάποιο $M \in \mathcal{N}_1$ οπότε οι άλγεβρες $\mathcal{N}_1'', \mathcal{N}_1''|_{M(H_1)} \oplus \mathcal{N}_2''$ είναι μοναδιαία ισοδύναμες. Και οι δύο περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο γιατί και στις δύο η πρώτη άλγεβρα είναι ολικά ατομική ενώ η δεύτερη έχει συνεχές μέρος.

Παράδειγμα 5.7.8 Αν $\mathcal{X}$ είναι αφηρημένος δυικός χώρος τελεστών [10] η άλγεβρα

$$\mathcal{U}(\mathcal{X}) = \{ \begin{pmatrix} \lambda & X \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, X \in \mathcal{X} \}$$

είναι αφηρημένη δυική άλγεβρα τελεστών [10]. Κάθε πλήρως ισομετρική και normal αναπαράσταση π της $\mathcal{U}(\mathcal{X})$ είναι της μορφής

$$\pi : \mathcal{U}(\mathcal{X}) \to B(H_1 \oplus H_2) : \pi\left(\begin{pmatrix} \lambda & X \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha(X) \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

όπου H_1, H_2 είναι χώροι Χίλμπερτ και η απεικόνιση $\alpha : \mathcal{X} \to B(H_2, H_1)$ είναι w^*-συνεχής πλήρης ισομετρία [13]. Υποθέτουμε ότι οι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι αφηρημένοι δυικοί χώροι τελεστών. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι πλήρως ισομετρικοί και w^*-ομοιομορφικοί.

(ii) Οι άλγεβρες $\mathcal{U}(\mathcal{X}), \mathcal{U}(\mathcal{Y})$ είναι πλήρως ισομετρικές, w^*-ομοιομορφικές και ισομορφικές σαν άλγεβρες.

(iii) Οι άλγεβρες $\mathcal{U}(\mathcal{X}), \mathcal{U}(\mathcal{Y})$ είναι Δ-ισοδύναμες.

Απόδειξη Είναι φανερό ότι το (ii) συνεπάγεται το (iii). Για την απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ βλέπε το Πόρισμα 2.2.12 στο [10]. Υποθέτουμε τώρα ότι οι άλγεβρες $\mathcal{U}(\mathcal{X}), \mathcal{U}(\mathcal{Y})$ είναι Δ- ισοδύναμες μέσω συναρτητή $\mathcal{F}$. Επιλέγουμε πλήρως ισομετρική, normal αναπαράσταση

$$\pi : \mathcal{U}(\mathcal{X}) \to B(H_1 \oplus H_2)$$

ώστε η άλγεβρα $\pi(\mathcal{U}(\mathcal{X}))$ να είναι ανακλαστική. Υποθέτουμε ότι η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι

$$\sigma : \mathcal{U}(\mathcal{Y}) \to B(K_1 \oplus K_2).$$

Από τα Θεωρήματα 5.6.6, 5.6.13 η απεικόνιση σ είναι πλήρης ισομετρία και η άλγεβρα $\sigma(\mathcal{U}(\mathcal{Y}))$ είναι ανακλαστική. Επίσης η απεικόνιση

$$\mathcal{F} : \pi(\Delta(\mathcal{U}(\mathcal{X}))' \to \sigma(\Delta(\mathcal{U}(\mathcal{Y}))'$$

είναι $*$-ισομορφισμός. Επειδή $\pi(\Delta(\mathcal{U}(\mathcal{X})))' = B(H_1) \oplus B(H_2), \sigma(\Delta(\mathcal{U}(\mathcal{Y})))' = B(K_1) \oplus B(K_2)$ η $\mathcal{F}$ επάγεται από μοναδιαίο τελεστή της μορφής $U = U_1 \oplus U_2$. Από το Θεώρημα 5.6.8 έχουμε ότι

$$U\mathrm{Lat}(\pi(\mathcal{U}(\mathcal{X})))U^* = \mathrm{Lat}(\sigma(\mathcal{U}(\mathcal{Y}))).$$

Επειδή οι άλγεβρες $\pi(\mathcal{U}(\mathcal{X})), \sigma(\mathcal{U}(\mathcal{Y}))$ είναι ανακλαστικές παίρνουμε την ισότητα

$$U\pi(\mathcal{U}(\mathcal{X}))U^* = \sigma(\mathcal{U}(\mathcal{Y})).$$

Υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις $\alpha : \mathcal{X} \to B(H_2, H_1)$ και $\beta : \mathcal{Y} \to B(K_2, K_1)$ είναι w^*-συνεχείς και πλήρεις ισομετρίες ώστε

$$\pi\left(\left(\begin{array}{cc} \lambda & X \\ 0 & \mu \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc} \lambda & \alpha(X) \\ 0 & \mu \end{array}\right)$$

και

$$\sigma\left(\left(\begin{array}{cc} \lambda & Y \\ 0 & \mu \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc} \lambda & \beta(Y) \\ 0 & \mu \end{array}\right).$$

Εύκολα ελέγχεται τώρα ότι η απεικόνιση

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : f(X) = \beta^{-1}(U_1 \alpha(X) U_2^*)$$

είναι πλήρης ισομετρία, w^*-συνεχής και επί.

Βιβλιογραφία

[1] Α. ΚΑΤΑΒΟΛΟΣ, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών,* Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 2006.

[2] Σ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ, Θ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ, Ν. ΚΑΛΑΜΙΔΑΣ, Β. ΦΑΡΜΑΚΗ, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση,* Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ, Αθήνα, 1988.

[3] Μ. ΦΡΑΓΚΟΥΛΟΠΟΥΛΟΥ, *Πλειογραμμική Άλγεβρα,* Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Αθήνα, 1994.

[4] Ι. ΤΟΝΤΟΡΟΦ, *Πρότυπα πάνω σε Ανακλαστικές Άλγεβρες*, Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1999.

[5] W.B. ARVESON, Operator algebras and invariant subspaces, *Ann. of Math.* **100** (1974) 433-532.

[6] H. BASS, The Morita Theory, *Lecture Notes, Univ. of Oregon, Eugene,* 1962.

[7] D.P. BLECHER, A completely bounded characterization of operator algebras, *Math. Annalen* **303** (1995) 227-239.

[8] D.P. BLECHER, A Morita theorem for algebras of operators on Hilbert space, *J. of Pure and Applied algebra* **156** (2001), 153-169.

[9] D.P. BLECHER, B. MAGAJNA, Duality and operator algebras: automatic weak w^* continuity and applications, *Journal of Functional Analysis* **224** (2005), 386-407.

[10] D.P. BLECHER, C. LE MERDY, Operator algebras and their modules, *London Mathematical Society Monographs,* 2004.

[11] D.P. BLECHER, P.S. MUHLY, V.I. PAULSEN, Categories of operator modules - Morita equivalence and projective modules, *Memoirs of the A.M.S.* **143** (2000) No 681.

[12] D.P. BLECHER, Z-J RUAN, A.M. SINCLAIR, A characterization of operator algebras, *J. Funct. Anal.* **89** (1990), 188-201.

[13] D.P. BLECHER AND B. SOLEL, A double commutant theorem for operator algebras, *J. Operator Theory* **51**: 435-453, 2004.

[14] P.M. COHN, Cohn, P. M. Morita equivalence and duality. Reprinting of the 1966 edition. Queen Mary College Mathematics Notes. *Queen Mary College, London, 1976*

[15] KENNETH R. DAVIDSON, *Nest algebras*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Harlow, 1988.

[16] KENNETH R. DAVIDSON, *C^*-Algebras by Example*, Fields Insitute Monographs, 1996.

[17] K.R. DAVIDSON, Commutative subspace lattices, *Indiana Univ. Math. J.* **27** (3) (1978) 479-490.

[18] K.R. DAVIDSON, J.L. ORR, The Jacobson radical of a CSL algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994) 925-947.

[19] J. DIXMIER, Les Algebres d' Operateurs dans l' Espace Hilbertien, *Gauthier-Villars,* Paris, 1969.

[20] E. EFFROS, N. OZAWA, Z.J. RUAN, On injectivity and nuclearity for operator spaces, *Duke Math.*, **110** (2001) 489-521.

[21] E.G. EFFROS AND Z-J RUAN, *Operator Spaces*, London Mathematical Society Monographs, New Series, 23, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[22] G.K. ELEFTHERAKIS, Decompositions of Reflexive Bimodules over Maximal Abelian Selfadjoint Algebras, *Journal of Operator Theory*, **56** (2) (2006) 291-315.

[23] J.A. ERDOS, Reflexivity for subspace maps and linear spaces of operators, *Proc. London Math. Soc.*, **52** (1986) 582-600.

[24] J.A. ERDOS, A.KATAVOLOS, V.S. SHULMAN, Rank one subspaces of Bimodules over Maximal Abelian Selfadjoint Algebras, *J. Funct. Anal.* **157** (1998) 554-587.

[25] J.A. ERDOS, S.C. POWER, Weakly Closed Ideals of Nest Algebras, *J. Operator Theory* **7** (1982) 219-235.

[26] P.R. HALMOS, Reflexive lattices of subspaces, *J. London Math. Soc.* (2) 4 (1971), 257-263.

[27] L. HARRIS, A generalisation of C^*-algebras, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1981), 331-361.

[28] M. HESTENES, A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **11** (1961), 1315-1357.

[29] A. HOPENWASSER, The radical of a reflexive operator algebra, *Pacific J. Math.* **65** (1976) 375-392.

[30] R.V. KADISON, J.R. RINGROSE, *Fundamentals of the theory of operator algebras*,vol. I and II, Academic Press, Inc., 1986.

[31] A. KATAVOLOS AND E. KATSOULIS, Semisimplicity in operator algebras and subspace lattices *J. London Math. Soc.* **42** (2): 365-372, 1990.

[32] A.KATAVOLOS, I.G. TODOROV, Normalizers of operator algebras and reflexivity, *Proc. London Math. Soc.* **86** (2003) 463-484.

[33] E.G. KATSOULIS, Integration with respect to a commutative subspace lattice, *J. Operator Theory* **22** (1989) 307-323.

[34] M. KAUR AND Z-J. RUAN, Local properties of ternary rings of operators and their linking C^*-algebras, *J. Funct. Anal.* **195** (2002), 262-305.

[35] D.R. LARSON, B. SOLEL, Bimodules of nest subalgebras over von Neumann algebras, *Operator Theory: Advances and Applications,* **32** (1988) 159-180.

[36] C. LAURIE AND W. LONGSTAFF, A note on rank one operators in reflexive algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983) 293-297.

[37] A.I. LOGINOV, V.S. SHULMAN, Hereditary and intermediate reflexivity of W*-algebras, (Russian) *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **39** (1975) 1260-1273, (English translation) *Math. USSR-Izv.* **9** (1975) 1189-1201.

[38] SAUNDERS MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.

[39] B. MAGAJNA, On the relative reflexivity of finitely generated modules of operators, *transactions of the AMS*, **327** (1991) no 1 221-249.

[40] ROBERT E. MEGGINSON, An Introduction to Banach Space Theory, Graduate Texts in Mathematics, 183. Springer-Verlag, New York, 1998.

[41] CHRISTIAN LE MERDY, An operator space characterization of dual operator algebras, *Amer. J. Math.* **121** (1999) no 1, 55-63.

[42] K. MORITA, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Tokyo Kyoiku Daigaku (A)* **6** (1958) 83-142.

[43] V.I. PAULSEN, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Math. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[44] G. PISIER, *Introduction to operator space theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 294, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[45] M.A. RIEFFEL, Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra* **5** (1974) 51-96.

[46] M.A. RIEFFEL, Morita equivalence for operator algebras, *Proc. Symp. in Pure Math.* AMS 38 Part 1 (1982) 285-298.

[47] J.R. RINGROSE, On some algebras of operators, *Proc. London Math. Soc.*(3) **15** (1965), 61-83.

[48] ZHONG-JIN RUAN, Subspaces of C^*-algebras, *J. Funct. Anal.* **76** (1988), 217-230.

[49] ZHONG-JIN RUAN, A characterization of non-unital operator algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), 193-198.

[50] ZHONG-JIN RUAN, Type Decomposition and the Rectangular AFD Property for W^*-TRO's, *Canad. J. Math.* **4** (2004) 843-870.

[51] SHOICHIRO SAKAI, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer-Verlag, 1971.

[52] V. SHULMAN AND L. TUROWSKA, Operaror synthesis. I. Synthetic sets, bilattices and tensor algebras, *Journal of Functional Analysis* **209** (2004) 293-331.

[53] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebras I, II, III*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.

[54] I.G. TODOROV, Synthetic properties of ternary masa-bimodules, *Houston Journal of Math.* **32** (2006) no 2, 505-519.

[55] H. ZETTL, A characterization of ternary rings of operators, *Adv. in Math.*, **48** (1983), 117-143.