Amenability και C*-άλγεβρες

Διπλωματική Εργασία

Δημήτριος Ανδρέου

Επιβλέπων καθηγητής: Αριστείδης Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2016

Abstract

This thesis concentrates on the notion of amenable locally compact groups. Amenability was originally introduced in 1929 by J. von Neumann in his study of the Banach-Tarski paradox. One of the most interesting features of amenability is that it has a great number of equivalent characterisations. Here we shall present certain of them using tools provided by Harmonic and Functional Analysis, especially the theory of C*-algebras.

In Chapter 1, we introduce the notion of amenability in terms of left invariant means in certain C*-algebras associated to a locally compact group. Next, we show that amenability is equivalent to a fixed point property and as a consequence that every abelian locally compact group is amenable. Also, the fixed point property allows us to prove another characterisation of amenable groups in terms of probability measures in compact spaces which are invariant under continuous group actions. Finally, we prove that amenability is preserved under the formation of closed subgroups, extensions and quotients.

In Chapter 2, we discuss some characterisations of amenability by approximation properties. One of those properties (Theorem 2.2.1) comprises the main ingredient of the proof of the "Weak Containment Theorem"(cf. Theorems 4.4.8 and 4.4.10).

Chapter 3 is actually a brief introduction to the theory of unitary representations of locally compact groups, which is required for the comprehension of the next chapter.

In Chapter 4, we examine the impact of amenability on the representation theory of groups. More specifically, we define the full and reduced C*-algebras, $C^*(G)$ and $C^*_r(G)$ of a locally compact group G. The first, is categorically nice, which means that there is a bijective correspondance between the unitary representations of G and the representations of $C^*(G)$ on the same Hilbert space, but unfortunately $C^*(G)$ is rather an abstract object. On the contrary, $C^*_r(G)$ is more tractable, but its representations encode only those unitary representations of G which are weakly contained in the left regular representation of G on $L^2(G)$. The final result is the "Weak

Containment Theorem", which states that $C^*(G)$ and $C_r^*(G)$ are actually the same if and only if G is amenable.

Finally, familiarity with Functional Analysis and especially with the basic theory of C*-algebras is presupposed.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **v**

1 Amenability και η ιδιότητα σταθερού σημείου **1**
- 1.1 Προκαταρκτικά και ορισμοί . . . 1
- 1.2 Amenable ομάδες . . . 3
- 1.3 Το θεώρημα σταθερού σημείου . . . 16
- 1.4 Amenability των αβελιανών τοπικά συμπαγών ομάδων . . . 20
- 1.5 Amenability και κληρονομικότητα . . . 22
- 1.6 Αντιπαραδείγματα - οι ομάδες $\mathbb{F}_2$ και $SL_2(\mathbb{R})$ . . . 33

2 Amenability και η ιδιότητα προσέγγισης **43**
- 2.1 Η ιδιότητα P_1 του Reiter . . . 43
- 2.2 Η ιδιότητα προσέγγισης για amenable ομάδες . . . 52

3 Αναπαραστάσεις τοπικά συμπαγών ομάδων **55**
- 3.1 Unitary αναπαραστάσεις . . . 55
- 3.2 Αναπαραστάσεις μιας ομάδας και της αντίστοιχης άλγεβρας . . . 58
- 3.3 Συναρτήσεις θετικού τύπου . . . 65
- 3.4 Τοπολογίες στο σύνολο $\mathcal{P}_1$ . . . 71
- 3.5 Θετικά ορισμένες συναρτήσεις . . . 76

4 Amenability και C^*-άλγεβρες **79**
- 4.1 Οι C^*-άλγεβρες μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας . . . 79
- 4.2 Η C^*-άλγεβρα μιας αβελιανής ομάδας . . . 83
- 4.3 Οι άλγεβρες Fourier και Fourier-Stieltjes μιας ομάδας . . . 85
- 4.4 Χαρακτηρισμός των amenable ομάδων μέσω C^*-αλγεβρών . . . 89

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση της έννοιας της amenability για τοπικά συμπαγείς τοπολογικές ομάδες.

Την κλάση των amenable ομάδων εισήγαγε και μελέτησε πρώτος ο von Neumann (1929), προκειμένου να εξηγήσει γιατί το παράδοξο Banach-Tarski εμφανίζεται μόνο για διαστάσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 3. Ωστόσο, η απαρχή της amenability είχε ήδη συντελεστεί το 1904, όταν ο Lebesgue έθεσε το ερώτημα αν το ολοκλήρωμά του στο $\mathbb{R}$ θα εξακολουθούσε να είναι μοναδικά καθορισμένο αν αντικαθιστούσαμε την αριθμίσιμη προσθετικότητα με την ασθενέστερη συνθήκη της πεπερασμένης προσθετικότητας.

Αργότερα, ο Banach απάντησε αρνητικά στο παραπάνω ερώτημα, αποδεικνύοντας την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου στις μεταφορές, πεπερασμένα προσθετικού, θετικού μέτρου μ στο $\mathbb{R}$ διαφορετικού από το μέτρο Lebesgue. Μάλιστα, το μ οριζόταν σε όλο το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$ και ήταν πεπερασμένο ($\mu(\mathbb{R}) = 1$).

Ο ορισμός που έδωσε ο von Neumann το 1929 αφορούσε διακριτές ομάδες:

Ορισμός (von Neumann-1929)**.** Μια (διακριτή) ομάδα G λέγεται amenable αν υπάρχει συνολοσυνάρτηση $\mu\colon \mathfrak{P}(G) \to [0, \infty)$ τέτοια, ώστε:

1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, για κάθε δύο ξένα $A, B \subset G$.

2) $\mu(G) = 1$.

3) $\mu(gA) = \mu(A)$, για κάθε $g \in G$ και $A \subset G$.

Ο ακριβής όρος που είχε χρησιμοποιήσει ο von Neumann ήταν "meßbar". Ο όρος amenable οφείλεται στον M. M. Day, ο οποίος πιθανότατα τον χρησιμοποίησε ως λογοπαίγνιο.

Η ύπαρξη πεπερασμένα προσθετικών αναλλοίωτων μέτρων που είναι πεπερασμένα μελετήθηκε κατά τις δεκαετίες των '20 και '30 από τους Banach και Tarski. Αξίζει να δούμε, έστω και κάπως επιφανειακά, την σύνδεση της amenability με το παράδοξο Banach-Tarski.

Ορισμός. Έστω G μια ομάδα που δρα σε ένα σύνολο X. Ένα $E \subset X$ λέγεται G-paradoxical αν υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset E$ και $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$, ώστε

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i = \bigcup_{i=1}^{m} h_j \cdot B_j.$$

Η ίδια η ομάδα G λέγεται paradoxical αν είναι G-paradoxical ως προς την πολλαπλασιαστική δράση της G στον εαυτό της.
Επίσης, ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου X λέγεται paradoxical αν είναι G-paradoxical, όπου G η ομάδα των αντιστρέψιμων ισομετριών του X (μία ισομετρία $g \in G$ δρα σε ένα $x \in X$ με $g \cdot x = g(x)$).

Με την ορολογία αυτή, το παράδοξο Banach-Tarski διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα (Weak Banach-Tarski paradox)**.** Κάθε κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^3$ είναι paradoxical.

Η απόδειξή του στηρίζεται στο γεγονός ότι η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες $\mathbb{F}_2$, η οποία εμφυτεύεται στην $SO(3)$, άρα και στην ομάδα των αντιστρέψιμων ισομετριών του $\mathbb{R}^3$, είναι paradoxical. Μάλιστα, ισχύει επιπλέον το εξής:

Θεώρημα (Banach-Tarski paradox)**.** Για κάθε ζεύγος A, B φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^3$ με μη κενά εσωτερικά, υπάρχουν αντιστρέψιμες ισομετρίες $g_1, \ldots, g_n$ του $\mathbb{R}^3$ και υποσύνολα $A_i \subset A$, $B_i \subset B$, $i = 1, \ldots, n$, ώστε $A_i \cap A_j = \varnothing = B_i \cap B_j$, για $i \neq j$, και

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad g_i(A_i) = B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Διαισθητικά το παράδοξο Banach-Tarski θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως εξής:

> Υπάρχει τρόπος να «κόψουμε» μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ σε πεπερασμένα
> το πλήθος κομμάτια, τα οποία μπορούμε να τα «ξανακολλήσουμε»
> παίρνοντας δύο σφαίρες, κάθε μια από τις οποίες
> να έχει ίση ακτίνα με την αρχική.

Αυτό δικαιολογεί και τον χαρακτηρισμό του ως «παράδοξο».
Η σύνδεση του παραδόξου αυτού με την έννοια της amenability γίνεται φανερή από το θεώρημα του Tarski και το πόρισμά του:

Θεώρημα (Tarski-1938)**.** Έστω G μια ομάδα που δρα σε ένα σύνολο X και $E \subset X$. Τότε, το E δεν είναι G-paradoxical αν και μόνον αν υπάρχει πεπερασμένα προσθετική συνολοσυνάρτηση $\mu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$, ώστε $\mu(E) \in (0, \infty)$ και $\mu(s \cdot A) = \mu(A)$, για κάθε $s \in G$ και $A \subset X$.

Πόρισμα. Μια (διακριτή) ομάδα G είναι amenable αν και μόνον αν δεν είναι paradoxical.

Με άλλα λόγια, το παράδοξο Banach-Tarski οφείλεται στο ότι η $\mathbb{F}_2$ δεν είναι amenable.

Ο ορισμός του von Neumann, αν και χρήσιμος σε κάποιες περιπτώσεις, έχει σοβαρά μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, τα θεωρήματα της Θεωρίας Μέτρου που βασίζονται στην αριθμήσιμη προσθετικότητα δεν ισχύουν για πεπερασμένα προσθετικά μέτρα. Ευτυχώς, όμως, υπάρχει ένας ισοδύναμος ορισμός της amenability, για διακριτές ομάδες, ο οποίος γενικεύεται και για τοπικά συμπαγείς ομάδες και επιπλέον μας επιτρέπει να μελετήσουμε τις amenable ομάδες με την βοήθεια της Συναρτησιακής και της Αρμονικής Ανάλυσης.

Για ένα πεπερασμένα προσθετικό αναλλοίωτο μέτρο μ σε μια ομάδα G, με $\mu(G) = 1$, μπορούμε να ορίσουμε ολοκλήρωμα ως προς μ, με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται και το ολοκλήρωμα Lebesgue. Αν και το ολοκλήρωμα αυτό δεν θα έχει όλες τις ιδιότητες του κλασικού ολοκληρώματος Lebesgue, εν τούτοις η απεικόνιση

$$m\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C} : m(\phi) = \int_G \phi d\mu$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με τις ιδιότητες:

1) $m(\mathbf{1}) = 1$.

2) αν $\phi \geq 0$, τότε $m(\phi) \geq 0$.

3) $m(\lambda_s \phi) = m(\phi),\ \forall s \in G, \forall \phi \in \ell^\infty(G)$,

όπου $(\lambda_s \phi)(x) := \phi(s^{-1}x)$, $s, x \in G$. Ένα τέτοιο $m \in \ell^\infty(G)^*$ καλείται αριστερά αναλλοίωτος μέσος (left invariant mean). Η αντιστοιχία $\mu \longleftrightarrow m$ είναι αμφιμονοσήμαντη (αντίστροφα, δεδομένου του m θα ορίζαμε $\mu(E) := m(\chi_E)$) και άρα μια διακριτή ομάδα θα είναι amenable αν και μόνον αν υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στον $\ell^\infty(G)$. Αυτός θα είναι και ο ορισμός της amenability τον οποίο θα γενικεύσουμε αργότερα για τοπικά συμπαγείς ομάδες, αντικαθιστώντας τον $\ell^\infty(G)$ με τον $L^\infty(G)$.

Το πιο εντυπωσιακό ίσως γνώρισμα της amenability είναι ότι έχει πάρα πολλούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς, οι οποίοι εν γένει μπορεί να μοιάζουν εκ πρώτης όψεως πολύ διαφορετικοί ή και άσχετοι μεταξύ τους. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε κάποιους από αυτούς, χρησιμοποιώντας εργαλεία από την Αρμονική και την Συναρτησιακή Ανάλυση και ιδιαίτερα απ' την θεωρία των C^*-αλγεβρών.

Στο Κεφάλαιο 1, γενικεύουμε τον παραπάνω ορισμό για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G και δείχνουμε ότι η ύπαρξη ενός αριστερά αναλλοίωτου μέσου στον $L^\infty(G)$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός αντίστοιχου σε συγκεκριμένες C^*-υπάλγεβρες του $L^\infty(G)$. Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε ένα χαρακτηρισμό της amenability μέσω μιας ιδιότητας σταθερού σημείου, τον οποίο χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι κάθε αβελιανή τοπικά συμπαγής ομάδα είναι amenable, καθώς και για την απόδειξη ενός άλλου χαρακτηρισμού της amenability (βλ. Θεώρημα 1.6.5), ο οποίος είναι κατά κάποιον τρόπο ένα μη διακριτό ανάλογο του Θεωρήματος Tarski (βλ. παραπάνω). Τέλος, δείχνουμε ότι η amenability διατηρείται από κλειστές υποομάδες, πηλίκα και επεκτάσεις.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε κάποιους χαρακτηρισμούς των amenable ομάδων μέσω ιδιοτήτων προσέγγισης-πυκνότητας.

Στο Κεφάλαιο 3, αναπτύσσονται κάποιες βασικές έννοιες και εργαλεία από την θεωρία των unitary αναπαραστάσεων τοπικά συμπαγών ομάδων, που χρειάζονται για την καλύτερη κατανόηση του επόμενου κεφαλαίου.

Στο Κεφάλαιο 4, εξετάζουμε την επίδραση της amenability στην θεωρία των αναπαραστάσεων μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας, με ιδιαίτερη έμφαση στο "Weak Containment Theorem" (βλ. Θεωρήματα 4.4.8 και 4.4.10). Ειδικότερα, θα δούμε ότι η θεωρία των unitary αναπαραστάσεων μιας ομάδας G είναι ισοδύναμη με αυτήν των αναπαραστάσεων της αντίστοιχης C^*-άλγεβρας $C^*(G)$, δηλαδή της πλήρωσης της άλγεβρας $L^1(G)$ ως προς την «μεγαλύτερη» C^*-νόρμα αυτής. Εκτός απ' την $C^*(G)$, η οποία είναι αρκετά αφηρημένη, ορίζεται και μια πιο προσιτή C^*-άλγεβρα, η $C^*_r(G)$, της οποίας, όμως, οι αναπαραστάσεις κωδικοποιούν παρά μόνον λίγες unitary αναπαραστάσεις της G, για την ακρίβεια εκείνες που «περιέχονται ασθενώς» στην αριστερή κανονική αναπαράσταση της G. Θα δείξουμε ότι οι δύο αυτές C^*-άλγεβρες «ταυτίζονται» αν και μόνον αν η G είναι amenable.

Προϋποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει κάποια εξοικείωση με την Συναρτησιακή Ανάλυση και με την βασική θεωρία των C^*-αλγεβρών, διαφορετικά, παραπέμπουμε στην Βιβλιογραφία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αριστείδη Κατάβολο για την πολύτιμη καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς επίσης και τους κ.κ. Μιχάλη Ανούση και Γιώργο Ελευθεράκη για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου προς τον κ. Gerhard Racher για την διάθεση των σημειώσεων των διαλέξεών του.

Δημήτρης Ανδρέου

Κεφάλαιο 1

Amenability και η ιδιότητα σταθερού σημείου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την έννοια της amenability για τοπικά συμπαγείς Hausdorff ομάδες και θα δείξουμε ένα χαρακτηρισμό αυτής μέσω μιας ιδιότητας σταθερού σημείου, τον οποίον θα εφαρμόσουμε για να δείξουμε ότι κάθε αβελιανή τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα είναι amenable. Επιπλέον, θα δούμε πώς συμπεριφέρεται αλγεβρικά η amenability, δηλαδή πώς κληρονομείται, παραδείγματος χάριν, από κλειστές υποομάδες και πηλίκα. Τέλος, θα δούμε δύο σημαντικά παραδείγματα ομάδων που δεν είναι amenable.

1.1 Προκαταρκτικά και ορισμοί

Ξεκινάμε παραθέτοντας χωρίς αποδείξεις κάποια βασικά αποτελέσματα από την θεωρία των τοπικά συμπαγών τοπολογικών ομάδων και την Αρμονική Ανάλυση.

Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Ξέρουμε απ' την θεωρία των τοπικά συμπαγών ομάδων ότι κάθε τέτοια ομάδα εφοδιάζεται με ένα, μοναδικό ως προς πολλαπλασιασμό με σταθερά, αριστερό μέτρο Haar, δηλαδή ένα μη τετριμμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel, έστω μ, ώστε $\mu(gA) = \mu(A)$ για κάθε $g \in G$ και A Borel-μετρήσιμο υποσύνολο της G. Δηλαδή, το μ είναι αριστερά αναλλοίωτο ως προς μεταφορές.

Από τις ιδιότητες του μέτρου Haar που αναφέραμε και την τοπική συμπάγεια της G, προκύπτει εύκολα ότι κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο της G έχει θετικό μέτρο.

Στα επόμενα, αν δεν αναφέρεται ρητά ποιο μέτρο έχει ορισθεί σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα, θα εννοείται ότι πρόκειται για ένα σταθεροποιημένο αριστερό μέτρο Haar αυτής.

Αν σταθεροποιήσουμε ένα μέτρο Haar μ της G, τότε, ως γνωστόν, υπάρχει συνεχής ομομορφισμός ομάδων $\Delta_G \colon G \to (0, +\infty)$, που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\mu(Ag) = \Delta_G(g)\mu(A), \quad \forall A \text{ Borel-υποσύνολο της } G, \ \forall g \in G.$$

Για την ολοκλήρωση ως προς το μέτρο μ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$d(gx) = dx$$

$$d(xg) = \Delta_G(g)dx$$
$$dx^{-1} = \Delta_G(x^{-1})dx$$

για $g \in G$. Γράφουμε dx αντί για $d\mu(x)$.

Αν η G είναι αβελιανή ή συμπαγής, τότε $\Delta_G = 1$. Τέτοιες ομάδες λέγονται unimodular.

Αν, λοιπόν, μ είναι ένα αριστερό μέτρο Haar στην G, τότε ο χώρος $L^1(G)$ των κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς μ-σχεδόν παντού ισότητα) των ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων της G είναι χώρος Banach, ως προς την νόρμα:

$$\|f\|_1 := \int_G |f(x)|dx, \qquad f \in L^1(G).$$

Επιπλέον, ορίζοντας ως γινόμενο την συνέλιξη:

$$(f * g)(y) := \int_G f(x)g(x^{-1}y)dx, \qquad f, g \in L^1(G), \ y \in G$$

ο $L^1(G)$ γίνεται άλγεβρα Banach και αν ορίσουμε ακόμη:

$$f^*(x) := \overline{f(x^{-1})}\Delta_G(x^{-1})$$

για $x \in G$ και $f \in L^1(G)$, τότε εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κανείς ότι η $f \mapsto f^*$ είναι ισομετρική ενέλιξη. Τέλος, αποδεικνύεται ότι η $*$-άλγεβρα Banach $L^1(G)$, ενώ εν γένει δεν έχει μονάδα, εν τούτοις έχει πάντα προσεγγιστική μονάδα.

Γενικά, για ένα αυθαίρετο χώρο μέτρου (X, μ), δεν είναι σωστό ότι ο δυϊκός χώρος Banach του $L^1(X, \mu)$ είναι ο $L^\infty(X, \mu)$ με την νόρμα ουσιώδες supremum (essential supremum-norm):

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : \mu(\{x \in G : |f(x)| > M\}) = 0\} \qquad (1)$$

Αυτό θα είναι σωστό αν υποθέσουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, όμως εν γένει το μέτρο Haar σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα δεν είναι πάντα σ-πεπερασμένο.

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε στην περίπτωση μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας με μέτρο Haar μ να δώσουμε ένα τροποποιημένο ορισμό του ουσιώδους supremum, ώστε να υφίσταται ο παραπάνω δυϊσμός.

Έτσι, για μια τοπικά συμπαγή ομάδα Hausdorff G με μέτρο Haar μ ορίζουμε την νόρμα ουσιώδες supremum μιας μετρήσιμης $f\colon G \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : \text{ το } \{x \in G : |f(x)| > M\} \text{ είναι τοπικά } \mu\text{-μηδενικό}\} \quad (2)$$

Ένα Borel-υποσύνολο E της G λέγεται τοπικά μ-μηδενικό αν $\mu(E \cap K) = 0$, για κάθε συμπαγές $K \subset G$.

Στο εξής, θα συμβολίζουμε με $L^\infty(G,\mu)$ ή $L^\infty(G)$ τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας, ως προς τοπικά μ-σχεδόν παντού ισότητα, μετρήσιμων μιγαδικών συναρτήσεων f της G με $\|f\|_\infty < \infty$, όπου η $\|\cdot\|_\infty$ έχει την έννοια του ορισμού (2). Δηλαδή, δύο ουσιωδώς φραγμένες μετρήσιμες $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ θεωρούνται ισοδύναμες αν το σύνολο $\{x \in G : f(x) \neq g(x)\}$ είναι τοπικά μ-μηδενικό.

Ορίζοντας στον $L^\infty(G)$ πολλαπλασιασμό και ενέλιξη ως εξής:

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x), \quad f^*(x) = \overline{f(x)}, \qquad x \in G,\ f, f_1, f_2 \in L^\infty(G)$$

ο $L^\infty(G)$ γίνεται αβελιανή C^*-άλγεβρα με μονάδα την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ με $\mathbf{1}_G(x) = 1$, για κάθε $x \in G$. Τέλος, η απεικόνιση:

$$T\colon L^\infty(G) \to (L^1(G))^* : \phi \mapsto T_\phi$$

$$\text{όπου} \quad T_\phi(f) = \int_G f\phi \, d\mu, \quad (f \in L^1(G)).$$

είναι καλά ορισμένη και ισομετρικός γραμμικός ισομορφισμός.
Σημειώνουμε, ακόμη, ότι αν το μέτρο Haar είναι σ-πεπερασμένο, τότε οι δύο ορισμοί για τον $L^\infty(G)$ συμπίπτουν, δηλαδή οι ορισμοί (1) και (2) συμφωνούν.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το μέτρο Haar και τους χώρους $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, παραπέμπουμε στα [3, Κεφάλαιο 9], [7] και [8].

1.2 Amenable ομάδες

Ορισμός 1.2.1. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Ορίζουμε την απεικόνιση $\lambda\colon G \to \mathrm{Aut}(L^\infty(G))$, όπου $\mathrm{Aut}(L^\infty(G))$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών ισομετριών από τον $L^\infty(G)$ στον εαυτό του με πράξη την σύνθεση, ως εξής:

$$(\lambda_g \phi)(x) := \phi(g^{-1}x)$$

για $\phi \in L^\infty(G)$ και $g, x \in G$. Γράφουμε λ_g αντί για $\lambda(g)$.
Η λ είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός ομάδων και λέγεται **αριστερή δράση** (left translation) της G στον $L^\infty(G)$.

Θα δείξουμε ότι η λ είναι πράγματι καλά ορισμένη και ομομορφισμός ομάδων. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν:

$$\lambda_g\phi \in L^\infty(G), \quad \|\lambda_g\phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty, \quad \lambda_{gh} = \lambda_g\lambda_h$$

για κάθε $g, h \in G$ και $\phi \in L^\infty(G)$, καθώς και ότι αν $\phi_1 = \phi_2$ τοπικά μ-σχεδόν παντού, τότε $\lambda_g\phi_1 = \lambda_g\phi_2$ τοπικά μ-σχεδόν παντού, για $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(G)$ και $g \in G$.
Απόδειξη: Έστω $M > 0$, $g \in G$, $K \subset G$ συμπαγές και $\phi \in L^\infty(G)$. Τότε, χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο ως προς αριστερές μεταφορές του μέτρου Haar μ της G, έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in G : |(\lambda_g\phi)(x)| > M\} \cap K) &= \mu(\{x \in G : |\phi(g^{-1}x)| > M\} \cap K)\\ &= \mu((g\{y \in G : |\phi(y)| > M\}) \cap K)\\ &= \mu(g(\{y \in G : |\phi(y)| > M\} \cap (g^{-1}K)))\\ &= \mu(\{y \in G : |\phi(y)| > M\} \cap (g^{-1}K))\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $g^{-1}K$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν το K είναι συμπαγές, επομένως όταν το K διατρέχει το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων της G το $g^{-1}K$ διατρέχει επίσης όλα τα συμπαγή υποσύνολα της G. Άρα, $\|\lambda_g\phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty < \infty$, απ' όπου έπεται και ότι $\lambda_g\phi \in L^\infty(G)$.
Επίσης, για $g, h \in G$ έχουμε:

$$(\lambda_{gh}\phi)(x) = \phi((gh)^{-1}x) = \phi(h^{-1}g^{-1}x) = (\lambda_h\phi)(g^{-1}x) = ((\lambda_g\lambda_h)\phi)(x)$$

για $x \in G$ και $\phi \in L^\infty(G)$, που σημαίνει ότι $\lambda_{gh} = \lambda_g\lambda_h$, γαι κάθε $g, h \in G$. Τέλος, αν $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(G)$ με $\phi_1 = \phi_2$ τοπικά μ-σχεδόν παντού και $g \in G$, τότε:

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty = 0 \Rightarrow \|\lambda_g(\phi_1 - \phi_2)\|_\infty = 0 \Rightarrow \|\lambda_g\phi_1 - \lambda_g\phi_2\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_g\phi_1 = \lambda_g\phi_2 \text{ τοπικά } \mu\text{-σχεδόν παντού}$$

$\square$

Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι η λ δεν είναι απαραίτητα συνεχής αν θεωρήσουμε την $\mathrm{Aut}(L^\infty(G))$ με την τοπολογία της νόρμας τελεστή ή με κάποια ασθενέστερη τοπολογία όπως η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης, εκτός και αν η G είναι διακριτή.
Πράγματι, αν θεωρήσουμε την αβελιανή ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ με το μέτρο Lebesgue και $A := [-1, 1]$, $\phi := \chi_A$, τότε για $s \in \mathbb{R}$ με $s \neq 0$, έχουμε $|\lambda_s\phi - \phi| = |\chi_{s+A} - \chi_A| = \chi_{(s+A)\triangle A}$ και επομένως $\|\lambda_s\phi - \phi\|_\infty \leq 1$. Επειδή $s \neq 0$, εύκολα βλέπουμε ότι η συμμετρική διαφορά $(s + A)\triangle A$ περιέχει ένα κλειστό διάστημα, έστω C, με μη κενό εσωτερικό και άρα το C είναι θετικού μέτρου. Κατά

συνέπεια, αν $0 \leq \gamma < 1$, τότε το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : |\chi_{(s+A)\triangle A}(t)| > \gamma\} \cap C = C$ είναι θετικού μέτρου και άρα θα πρέπει $\|\lambda_s\phi - \phi\|_\infty \geq 1$, δηλαδή εν τέλει $\|\lambda_s\phi - \phi\|_\infty = 1$, για κάθε $s \neq 0$, ενώ για $s = 0$ η τελευταία νόρμα είναι ίση με 0. Έτσι, για την ϕ που επιλέξαμε, η απεικόνιση $\mathbb{R} \to L^\infty(\mathbb{R}) : s \mapsto \lambda_s\phi$ δεν είναι συνεχής, δηλαδή η λ δεν είναι συνεχής αν θεωρήσουμε την $\mathrm{Aut}(L^\infty(\mathbb{R}))$ με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Εντελώς ανάλογα ορίζεται και η αριστερή δράση της G στον $L^1(G)$ (και γενικότερα στον $L^p(G)$ για $1 \leq p < \infty$), με:

$$(\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x),\ f \in L^1(G), \quad (g, x \in G)$$

και είναι επίσης καλά ορισμένη και ισχύουν: $\|\lambda_g f\|_1 = \|f\|_1$ και $\lambda_{gh} = \lambda_g\lambda_h$. Πράγματι:

$$\|\lambda_g f\|_1 = \int_G |f(g^{-1}x)| d\mu(x) = \int_G |f(x)| d\mu(x) = \|f\|_1$$

απ' το γεγονός ότι το μέτρο μ είναι αριστερά αναλλοίωτο.
Το ότι η λ είναι καλά ορισμένη προκύπτει απ' το γεγονός ότι είναι ισομετρική, ως εξής: αν δύο $f, h \in L^1(G)$ είναι σχεδόν παντού ίσες, τότε $f - h = 0$ σχεδόν παντού και άρα $\|\lambda_g(f - h)\|_1 = 0$, δηλαδή $\|\lambda_g f - \lambda_g h\|_1 = 0$. Άρα, $\lambda_g f = \lambda_g h$ σχεδόν παντού.
Τέλος, το ότι η λ είναι πολλαπλασιαστική προκύπτει όμοια με πριν.

Ορισμός 1.2.2. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Η G λέγεται **amenable** αν υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $m \colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$, που να ικανοποιεί τα εξής:

1. $m(f) \geq 0$, για $f \geq 0$ (θετικότητα)
2. $m(\mathbf{1}_G) = 1$
3. $m(\lambda_g f) = m(f)$, για κάθε $f \in L^\infty(G)$ και $g \in G$ (αριστερά αναλλοίωτο)

Ένα τέτοιο m λέγεται **αριστερά αναλλοίωτος μέσος** (left invariant mean) του $L^\infty(G)$.

Επειδή ο $L^\infty(G)$ είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα, έπεται ότι οι συνθήκες 1. και 2. του ορισμού ικανοποιούνται αν και μόνο αν το m είναι state, δηλαδή θετικό γραμμικό συναρτησοειδές νόρμας ίσης με 1.

Μπορούμε να ορίσουμε, με εντελώς ανάλογο τρόπο, την έννοια του αριστερά αναλλοιώτου μέσου και για κάθε αριστερά αναλλοίωτη $*$-υπάλγεβρα E του $L^\infty(G)$ με $\mathbf{1}_G \in E$, δηλαδή για κάθε τέτοια υπάλγεβρα E που ικανοποιεί την:

$$\lambda_g f \in E, \quad \forall f \in E.$$

Παρατήρηση: Σε μια συμπαγή Hausdorff ομάδα G κάθε μέτρο Haar είναι πεπερασμένο (μάλιστα, ισχύει και το αντίστροφο). Επομένως, εφ' όσον το μέτρο Haar είναι μοναδικό ως προς πολλαπλασιασμό με θετική σταθερά, μπορούμε να επιλέξουμε ένα μέτρο Haar μ στην G που να είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $\mu(G) = 1$. Έτσι, αν ορίσουμε $m\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ με $m(f) = \int_G f d\mu$, για $f \in L^\infty(G)$, τότε το m είναι ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος του $L^\infty(G)$. Έτσι, έχουμε το εξής:

Πόρισμα 1.2.3. Κάθε συμπαγής Hausdorff ομάδα είναι amenable.

Επομένως, η κλάση των amenable ομάδων είναι αρκετά «μεγάλη», αφού περιέχει όλες τις συμπαγείς Hausdorff ομάδες. Θα δούμε αργότερα ότι οι συμπαγείς Hausdorff ομάδες περιέχονται γνησίως στην κλάση των amenable ομάδων.

Ορισμός 1.2.4. Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Συμβολίζουμε με $C_b(G)$ τον χώρο των μιγαδικών συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων στην G. Μια συνάρτηση $f\colon G \to \mathbb{C}$ λέγεται **αριστερά ομοιόμορφα συνεχής** αν ισχύει:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U της μονάδας $e \in G$, ώστε
$|f(s^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon$, για κάθε $s \in U$ και $x \in G$.

Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $e \in G$, ώστε:

$$\sup_{x\in G} |f(s^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } s \in U.$$

Αντίστοιχα, η f θα λέγεται **δεξιά ομοιόμορφα συνεχής** αν ισχύει:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U της μονάδας $e \in G$, ώστε
$|f(xs) - f(x)| < \varepsilon$, για κάθε $s \in U$ και $x \in G$.

Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $e \in G$, ώστε:

$$\sup_{x\in G} |f(xs) - f(x)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } s \in U.$$

Συμβολίζουμε με $C_{blu}(G)$ και $C_{bru}(G)$ τις φραγμένες αριστερά ομοιόμορφα συνεχείς και τις φραγμένες δεξιά ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις στην G, αντίστοιχα. Επίσης, θέτουμε $C_{bu}(G) := C_{blu}(G) \cap C_{bru}(G)$. Τα στοιχεία της τομής λέγονται **ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες** συναρτήσεις της G.

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι τα $C_{blu}(G)$ και $C_{bru}(G)$ είναι υποσύνολα του $C_b(G)$. Επίσης, ο $C_b(G)$ με την supremum-νόρμα, τις κατά σημείο πράξεις και με ενέλιξη:

$$\phi^*(t) := \overline{\phi(t)}, \text{ για } t \in G \text{ και } \phi \in C_b(G)$$

είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ και οι χώροι $C_{blu}(G)$, $C_{bru}(G)$, $C_{bu}(G)$ είναι C^*-υπάλγεβρες της $C_b(G)$, που περιέχουν την $\mathbf{1}_G$ και κάθε μια από αυτές είναι αριστερά αναλλοίωτη.
Πράγματι, έστω π.χ. $f \in C_{blu}(G)$, $g \in G$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει περιοχή U του $e \in G$ ώστε:

$$|f(s^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall s \in U, \ \forall x \in G. \qquad (*)$$

Θέτουμε $V := gUg^{-1}$. Το V είναι επίσης περιοχή του e και για $x \in G, \ t = gsg^{-1} \in V, \ s \in U$ έχουμε:

$$|(\lambda_g f)(t^{-1}x) - (\lambda_g f)(x)| = |f(g^{-1}gs^{-1}g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| =$$

$$= |f(s^{-1}g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| < \varepsilon, \quad \text{απ' την } (*)$$

Δηλαδή, $\forall g \in G, \forall f \in C_{blu}(G), \quad \lambda_g f \in C_{blu}(G)$. Ομοίως, έπεται και για την $C_{bru}(G)$ ότι είναι αριστερά αναλλοίωτη. Για την $C_b(G)$ είναι άμεσο.
Επίσης, οι άλγεβρες $C_{blu}(G)$, $C_{bru}(G)$ και $C_{bu}(G)$ είναι κλειστές $*$-υπάλγεβρες της $C_b(G)$ ως προς την supremum-νόρμα $\|\cdot\|_{sup}$. Για παράδειγμα, αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στην $C_{blu}(G)$, ώστε $\|f_n - f\|_{sup} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, τότε για ένα τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε:

$$\|f_k - f\|_{sup} < \varepsilon/3.$$

Ακόμη, επειδή η f_k είναι αριστερά ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει περιοχή U της μονάδας $e \in G$, ώστε

$$\|\lambda_s f_k - f_k\|_{sup} < \varepsilon/3 \qquad \forall s \in U.$$

Άρα, για κάθε $s \in U$, έχουμε:

$$\|\lambda_s f - f\|_{sup} \leq \|\lambda_s f - \lambda_s f_k\|_{sup} + \|\lambda_s f_k - f_k\|_{sup} + \|f_k - f\|_{sup}$$

$$= \|\lambda_s f_k - f_k\|_{sup} + 2\|f_k - f\|_{sup} < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Επομένως, τα ομοιόμορφα όρια αριστερά ομοιόμορφα συνεχών είναι επίσης α-ριστερά ομοιόμορφα συνεχείς. Δηλαδή, η $C_{blu}(G)$ είναι κλειστή και άρα C^*-υπάλγεβρα της $C_b(G)$. Όμοια και για τις $C_{bru}(G)$ και $C_{bu}(G)$.

Ας συμβολίσουμε με $\|\cdot\|_{sup}$ την supremum-νόρμα στην $C_b(G)$, προς διάκριση από την νόρμα ουσιώδες supremum $\|\cdot\|_\infty$ του $L^\infty(G)$.
Θέλουμε να ταυτίσουμε την $C_b(G)$ με μια C^*-υπάλγεβρα της $L^\infty(G)$. Γι' αυτό δείχνουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 1.2.5. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Για κάθε $f \in C_b(G)$ ισχύει:

$$\|f\|_{sup} = \|M_f\| = \|f\|_\infty$$

όπου $M_f \colon L^2(G) \to L^2(G)$ ο πολλαπλασιαστικός τελεστής που αντιστοιχεί στην f, δηλαδή $M_f g := fg$, για κάθε $g \in L^2(G)$.

Απόδειξη. Έστω μ το μέτρο Haar της G. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$M \colon C_b(G) \to \mathcal{B}(L^2(G,\mu)) : f \mapsto M_f$$

Παρατηρούμε ότι η M είναι $*$-ομομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών. Θα δείξουμε ότι:

$$\|f\|_\infty = \|M_f\| = \|f\|_{sup}\ , \quad \forall f \in C_b(G).$$

Έστω $f \in C_b(G)$. Εφ' όσον για κάθε $x \in G$ ισχύει $|f(x)| \leq \sup_{s\in G}|f(s)| = \|f\|_{sup}$, ειδικότερα έπεται ότι $|f(x)| \leq \|f\|_{sup}$ τοπικά μ-σχεδόν παντού στην G και άρα $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{sup}$ (απ' τον ορισμό του ουσιώδους supremum).
Επίσης, για $g \in L^2(G)$ έχουμε:

$$\|M_f g\|_2^2 = \int_G |fg|^2 d\mu \leq \|f\|_\infty^2 \int_G |g|^2 d\mu = \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$$

Επομένως, $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_{sup}$ και μένει να δειχθεί ότι $\|f\|_{sup} \leq \|M_f\|$.
Έστω, λοιπόν, $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής και φραγμένη υπάρχει μη κενό ανοικτό $U \subset G$, ώστε για κάθε $x \in U$, $|f(x)| \geq \|f\|_{sup} - \varepsilon$. Όπως έχουμε αναφέρει, αφού $U \neq \varnothing$ έπεται ότι $\mu(U) > 0$ και εφ' όσον το μ είναι κανονικό θα ισχύει $0 < \mu(U) = \sup\{\mu(K) :\ K \subset U,\ K \text{ συμπαγές}\}$. Άρα, υπάρχει $K \subset U$ συμπαγές τέτοιο, ώστε $\mu(K) > 0$. Επιπλέον, θα ισχύει $|f(x)| \geq \|f\|_{sup} - \varepsilon$, για κάθε $x \in K$. Οπότε, αν $g := \chi_K$, τότε $g \in L^2(G)$, αφού $\|g\|_2 = \mu(K) < \infty$, διότι K συμπαγές. Επομένως:

$$(\|M_f\|\|g\|_2)^2 \geq \|M_f g\|_2^2 = \int_K |f|^2 d\mu \geq (\|f\|_{sup} - \varepsilon)^2 \int_K d\mu =$$

$$= (\|f\|_{sup} - \varepsilon)^2 \|g\|_2^2$$

Επειδή $0 < \mu(K) = \|g\|_2^2 < \infty$, έπεται ότι $\|M_f\| \geq \|f\|_{sup} - \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\|M_f\| \geq \|f\|_{sup}$.

$\square$

Από την Πρόταση 1.2.5 προκύπτει ότι: αν $f, h \in C_b(G)$ και $f = h$ τοπικά σχεδόν παντού, τότε $\|f - h\|_{sup} = \|f - h\|_\infty = 0$ και άρα $f = h$ (παντού στην G). Έτσι, μπορούμε πράγματι να θεωρήσουμε την $C_b(G)$ ως C^*-υπάλγεβρα της

$L^\infty(G)$, αφού ο περιορισμός της νόρμας ουσιώδες supremum της $L^\infty(G)$ στην $C_b(G)$ ταυτίζεται με την supremum-νόρμα της τελευταίας.

Συνεπώς, οι άλγεβρες $C_{blu}(G)$, $C_{bru}(G)$, $C_{bu}(G)$ και $C_b(G)$ είναι C^*- υπάλγεβρες της $(L^\infty(G), \|\cdot\|_\infty)$ και σε κάθε μια από αυτές οι νόρμες supremum και ουσιώδες supremum ταυτίζονται.

Πρόταση 1.2.6. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(α) $C_c(G) \subset C_{bu}(G)$.

(β) Για κάθε $p \in [1, \infty)$ και κάθε $f \in L^p(G)$, ισχύει $\lim\limits_{x \to e} \|\lambda_x f - f\|_p = 0$, όπου e η μονάδα της G.

***Απόδειξη*.** (α) Έστω $f \in C_c(G)$. Ας σταθεροποιήσουμε ένα $\varepsilon > 0$. Έστω ακόμη $K := \text{supp}(f)$, το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο της G. Για κάθε $x \in K$, απ' την συνέχεια της f στο x, μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή U_x της μονάδας, ώστε να ισχύει:

$$|f(yx) - f(x)| < \varepsilon/2 \ , \quad \forall y \in U_x \qquad (*)$$

Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε συμμετρική ανοικτή περιοχή V_x της μονάδας, ώστε $V_x V_x \subset U_x$, για κάθε $x \in K$. Τότε, η οικογένεια $\{V_x x : \ x \in K\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του K, άρα, λόγω συμπάγειας, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} x_i$. Ορίζουμε $V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, το οποίο είναι προφανώς ανοικτή και συμμετρική περιοχή της μονάδας.
Έστω $y \in V$ και $x \in G$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
1) Αν $x \in K$, τότε: υπάρχει $j \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε $x \in V_{x_j} x_j$, δηλαδή $x x_j^{-1} \in V_{x_j} \subset U_{x_j}$. Επίσης, έχουμε: $y^{-1}x = y^{-1}(x x_j^{-1}) x_j \in V_{x_j} V_{x_j} x_j \subset U_{x_j} x_j$, δηλαδή $y^{-1} x x_j^{-1} \in U_{x_j}$ και άρα:

$$|f(y^{-1}x) - f(x)| \leq |f(y^{-1}x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| =$$

$$= |f((y^{-1} x x_j^{-1}) x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f((x x_j^{-1}) x_j)| \overset{(*)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

2) Αν $y^{-1}x \in K$, τότε με παρόμοιο τρόπο προκύπτει $|f(y^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon$.
3) Αν $y^{-1}x, x \notin K$, τότε $f(x) = f(y^{-1}x) = 0$ και άρα $|f(y^{-1}x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.
Συνεπώς, συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις, έχουμε:

$$|f(y^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall y \in V, \ \forall x \in G$$

δηλαδή η f είναι αριστερά ομοιόμορφα συνεχής. Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι είναι και δεξιά ομοιόμορφα συνεχής, άρα τελικά $f \in C_{bu}(G)$.
(β) Συμβολίζουμε με μ το μέτρο Haar της G. Έστω $f \in L^p(G)$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή ο $C_c(G)$ είναι πυκνός στον $L^p(G)$, έπεται ότι υπάρχει $g \in C_c(G)$, ώστε:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon/3 \qquad (1)$$

Έστω $K = \text{supp}(g)$. Απ' το (α) και εφ' όσον $\mu(K) < \infty$, έπεται ότι υπάρχει περιοχή U της μονάδας e, ώστε:

$$\|\lambda_x g - g\|_\infty (2\mu(K))^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι: $\text{supp}(\lambda_x g - g) \subset \text{supp}(\lambda_x g) \cup \text{supp}(g) = xK \cup K$ και άρα $\mu(\text{supp}(\lambda_x g - g)) \leq \mu(xK) + \mu(K) = 2\mu(K)$. Επομένως, για $x \in U$, έχουμε:

$$\|\lambda_x f - f\|_p \leq \|\lambda_x f - \lambda_x g\|_p + \|\lambda_x g - g\|_p + \|f - g\|_p$$

$$\leq \|\lambda_x(f - g)\|_p + \|\lambda_x g - g\|_\infty (2\mu(K))^{1/p} + \|f - g\|_p$$

$$= 2\|f - g\|_p + \|\lambda_x g - g\|_\infty (2\mu(K))^{1/p} \overset{(1),(2)}{\leq} 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

□

Το επόμενο λήμμα μας δίνει ένα αλγεβρικό τρόπο «παραγωγής» ομοιόμορφα συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων από στοιχεία του $L^\infty(G)$, ο οποίος θα φανεί πολύ χρήσιμος στα επόμενα.

Λήμμα 1.2.7. *Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τότε, ισχύουν τα εξής:*
(α) $L^\infty(G) * L^1(G)^\vee \subset C_{bru}(G)$, όπου $L^1(G)^\vee := \{\check{f} : f \in L^1(G)\}$ και $\check{f}(x) := f(x^{-1})$, για $x \in G$.
(β) $L^1(G) * L^\infty(G) \subset C_{blu}(G)$.
(γ) $L^1(G) * C_{bru}(G) \subset C_{bu}(G)$.

Απόδειξη. (α) Έστω $\phi \in L^\infty(G)$, $f \in L^1(G)$ και $h := \phi * \check{f}$. Αρχικά, βλέπουμε ότι η h ορίζεται και είναι φραγμένη, διότι, για κάθε $x \in G$, η απεικόνιση $y \mapsto \phi(y)f(x^{-1}y)$ είναι μετρήσιμη και:

$$|h(x)| = \left| \int_G \phi(y) f(x^{-1}y) dy \right| \leq \int_G |\phi(y)||f(x^{-1}y)| dy \leq \|\phi\|_\infty \int_G |f(x^{-1}y)| dy$$

$$= \|\phi\|_\infty \int_G |f(y)| dy = \|\phi\|_\infty \|f\|_1, \quad \forall x \in G.$$

Παρατηρούμε στην συνέχεια ότι, για $s, x \in G$, έχουμε:

$$|h(xs) - h(x)| = \left| \int_G \left(\phi(y) f(s^{-1}x^{-1}y) - \phi(y) f(x^{-1}y)\right) dy \right|$$

$$= \left| \int_G \phi(y) \left[(\lambda_s f)(x^{-1}y) - f(x^{-1}y) \right] dy \right|$$

$$\leq \|\phi\|_\infty \int_G |(\lambda_s f)(x^{-1}y) - f(x^{-1}y)| dy$$

$$= \|\phi\|_\infty \int_G |(\lambda_s f)(y) - f(y)| dy = \|\phi\|_\infty \|\lambda_s f - f\|_1$$

Επομένως, από την Πρόταση 1.2.6 (β) και την παραπάνω ανισότητα, έπεται ότι η h είναι δεξιά ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $f \in L^1(G)$ και $\phi \in L^\infty(G)$. Παρατηρούμε ότι η $f * \phi$ ορίζεται καλά και είναι φραγμένη, διότι, για κάθε $x \in G$, η απεικόνιση $y \mapsto f(y)\phi(y^{-1}x)$ είναι μετρήσιμη και:

$$|(f*\phi)(x)| = \left| \int_G f(y)\phi(y^{-1}x) dy \right| \leq \int_G |f(y)||\phi(y^{-1}x)| dy \leq \|\phi\|_\infty \int_G |f(y)| dy$$

$$= \|\phi\|_\infty \|f\|_1 < \infty, \quad \forall x \in G.$$

Επιπλέον, ισχύει: $(\lambda_s f) * \phi = \lambda_s (f * \phi)$, για κάθε $s \in G$. Πράγματι:

$$((\lambda_s f) * \phi)(x) = \int_G (\lambda_s f)(y)\phi(y^{-1}x) dy = \int_G f(s^{-1}y)\phi(y^{-1}x) dy$$

$$= \int_G f(w)\phi(w^{-1}s^{-1}x) dw = (f * \phi)(s^{-1}x) = \lambda_s(f * \phi)(x), \quad \forall x \in G.$$

Για $x, s \in G$ έχουμε:

$$|(f * \phi)(s^{-1}x) - (f * \phi)(x)| = |\lambda_s(f * \phi)(x) - (f * \phi)(x)|$$

$$= |((\lambda_s f) * \phi)(x) - (f * \phi)(x)| = |((\lambda_s f - f) * \phi)(x)|$$

$$\leq \|\phi\|_\infty \|\lambda_s f - f\|_1$$

και έτσι προκύπτει, πάλι απ' την Πρόταση 1.2.6 (β), ότι η $f * \phi$ είναι αριστερά ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Έστω $f \in L^1(G)$ και $\phi \in C_{bru}(G)$. Θα δείξουμε ότι η συνέλιξή τους $h := f * \phi$ ανήκει στην $C_{bu}(G)$. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η h είναι καλά ορισμένη και φραγμένη, αφού για κάθε $x \in G$ η απεικόνιση $y \mapsto f(y)\phi(y^{-1}x)$ είναι μετρήσιμη και:

$$|h(x)| = \left| \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)dy \right| \leq \int_G |f(y)||\phi(y^{-1}x)|dy \leq \|\phi\|_\infty \int_G |f(y)|dy$$

$$= \|\phi\|_\infty \|f\|_1 < \infty$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Απ' την υπόθεση για την ϕ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $e \in G$, ώστε:

$$|\phi(xs) - \phi(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall s \in U, \ \forall x \in G \qquad (1)$$

Για $s \in U$ και $x \in G$ έχουμε:

$$|h(xs) - h(x)| = \left| \int_G f(y)(\phi(y^{-1}xs) - \phi(y^{-1}x))dy \right| \leq$$

$$\leq \int_G |f(y)||\phi(y^{-1}xs) - \phi(y^{-1}x)|dy \leq \|f\|_1 \varepsilon \text{ , απ' την (1).}$$

Επομένως, η h είναι δεξιά ομοιόμορφα συνεχής. Επιπλέον, από το (β) έχουμε ότι είναι και αριστερά ομοιόμορφα συνεχής, άρα τελικά $h \in C_{bu}(G)$.

□

Χάρη στο προηγούμενο Λήμμα μπορούμε να δείξουμε ότι η ύπαρξη αριστερά αναλλοιώτου μέσου στον $L^\infty(G)$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός τέτοιου μέσου σε τουλάχιστον μια εκ των C^*-υπαλγεβρών του: $C_b(G)$, $C_{bru}(G)$, C_{blu} και $C_{bu}(G)$, δηλαδή:

Πρόταση 1.2.8. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η G είναι amenable.
(β) Υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_b(G)$.
(γ) Υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_{bru}(G)$.
(δ) Υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_{blu}(G)$.
(ε) Υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_{bu}(G)$.

Απόδειξη. Επειδή όλες οι άλγεβρες της εκφώνησης είναι αριστερά αναλλοίωτες C^*-υπάλγεβρες της $L^\infty(G)$ που περιέχουν την μονάδα αυτής, είναι προφανές ότι αν $m\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ είναι ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος, τότε ο περιορισμός του σε κάθε μια εκ των παραπάνω αλγεβρών θα είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτος μέσος. Επομένως, το (α) συνεπάγεται κάθε ένα εκ των (β) έως και (ε). Με το ίδιο ακριβώς επιχείρημα αποδεικνύονται και οι συνεπαγωγές (β)⇒(γ)⇒(ε) και (β)⇒(δ)⇒(ε), αν λάβουμε υπ' όψιν τους εγκλεισμούς που

ικανοποιούν οι παραπάνω άλγεβρες. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι (ε)⇒(α). Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι (ε)⇒(γ) και (γ)⇒(α).
Σταθεροποιούμε ένα μέτρο Haar μ της G. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon C_{bu}(G) \to \mathbb{C}$. Απ' το Λήμμα 1.2.7 (γ) έχουμε ότι $L^1(G) * C_{bru}(G) \subset C_{bu}(G)$. Έτσι, για κάθε $\phi \in C_{bru}(G)$ ορίζουμε:

$$m_\phi\colon L^1(G) \to \mathbb{C} \ \text{ με } m_\phi(f) := m(f * \phi), \quad f \in L^1(G).$$

Το m_ϕ είναι γραμμικό φραγμένο συναρτησοειδές και αριστερά αναλλοίωτο. Πράγματι, η γραμμικότητα έπεται απ' την γραμμικότητα του m και την επιμεριστικότητα της συνέλιξης, ενώ για $f \in L^1(G)$ και $s \in G$ έχουμε:

$$|m_\phi(f)| = |m(f * \phi)| \leq \|m\| \|f * \phi\|_\infty \leq 1 \cdot \|f\|_1 \|\phi\|_\infty = \|f\|_1 \|\phi\|_\infty$$

και

$$m_\phi(\lambda_s f) = m((\lambda_s f) * \phi) = m(\lambda_s(f * \phi)) = m(f * \phi) = m_\phi(f).$$

Έστω πρώτα $\phi \in C_{bru}(G)$ με $\phi \geq 0$. Τότε, $m_\phi \geq 0$, αφού αν $f \geq 0$ τότε $f * \phi \geq 0$ και άρα $m_\phi(f) = m(f * \phi) \geq 0$. Άρα, ο περιορισμός του m_ϕ στον $C_c(G)$ είναι ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές. Συνεπώς, απ' το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (βλ. [10, Θεώρημα 12.26, σελ.218] ή εναλλακτικά [3, Theorem 7.2.8, page 192]), έπεται ότι υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο Borel, έστω ν_ϕ, στην G, ώστε:

$$m_\phi(f) = \int_G f d\nu_\phi, \quad \forall f \in C_c(G).$$

Όμως, επειδή το m_ϕ είναι αριστερά αναλλοίωτο, έπεται ότι το ν_ϕ είναι μέτρο Haar, επομένως υπάρχει θετική σταθερά έστω $\overline{m}(\phi)$, ώστε $\nu_\phi = \overline{m}(\phi)\mu$ και άρα:

$$m_\phi(f) = \int_G f d\nu_\phi = \overline{m}(\phi) \int_G f d\mu, \quad \forall f \in C_c(G).$$

Έτσι, επειδή ο $C_c(G)$ είναι $\|\cdot\|_1$-πυκνός στον $L^1(G, \mu)$, έπεται ότι:

$$m_\phi(f) = \overline{m}(\phi) \int_G f d\mu, \quad \forall f \in L^1(G).$$

Επειδή οι θετικές συναρτήσεις της άλγεβρας $C_{bru}(G)$ την παράγουν γραμμικά, η $\overline{m}$ μπορεί να επεκταθεί γραμμικά σε όλη την $C_{bru}(G)$ και επιπλέον, επειδή το $m_\phi(f)$ είναι γραμμικό και ως προς ϕ (απ' την επιμεριστικότητα της συνέλιξης), θα ισχύει:

$$m_\phi(f) = \overline{m}(\phi) \int_G f d\mu, \quad \forall f \in L^1(G), \ \forall \phi \in C_{bru}(G).$$

Άρα, παίρνουμε ένα γραμμικό θετικό συναρτησοειδές $\overline{m}\colon C_{bru}(G) \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί:

$$m(f * \phi) = \overline{m}(\phi) \int_G f d\mu, \quad \forall f \in L^1(G),\ \forall \phi \in C_{bru}(G).$$

Επιπλέον, αν σταθεροποιήσουμε μια $f \in L^1(G)$ με $f \geq 0$ και $\|f\|_1 = 1$, δηλαδή $\int_G f d\mu = 1$, παρατηρούμε τα εξής:

$$\overline{m}(\mathbf{1}_G) = m(f * \mathbf{1}_G) = m\left(\int_G f d\mu \cdot \mathbf{1}_G\right) = m(\mathbf{1}_G) = 1$$

και για $s \in G$, $\phi \in C_{bru}(G)$:

$$\overline{m}(\lambda_s \phi) = \overline{m}(\lambda_s \phi) \int_G f d\mu = m(f * (\lambda_s \phi)).$$

Ας υπολογίσουμε την $f * (\lambda_s \phi)$:

$$(f * (\lambda_s \phi))(x) = \int_G f(y)(\lambda_s \phi)(y^{-1}x) dy = \int_G f(y)\phi((ys)^{-1}x) dy.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $w = ys$ το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_G f(ws^{-1})\phi(w^{-1}x)\Delta_G(s^{-1}) dw = ((\rho_s f) * \phi)(x)$$

όπου: $(\rho_s f)(x) := f(xs^{-1})\Delta_G(s^{-1})$. Έτσι, λοιπόν, έχουμε:

$$\overline{m}(\lambda_s \phi) = m(f * (\lambda_s \phi)) = m((\rho_s f) * \phi) = \int_G (\rho_s f) d\mu \cdot \overline{m}(\phi)$$

$$= \int_G f(xs^{-1})\Delta_G(s^{-1}) dx \cdot \overline{m}(\phi) = \int_G f(x) dx \cdot \overline{m}(\phi) = \overline{m}(\phi)$$

Δηλαδή, το $\overline{m}$ είναι ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος της $C_{bru}(G)$ και έχουμε στην ουσία δείξει την συνεπαγωγή: (ε)⇒(γ). Μένει να δείξουμε και την κατεύθυνση (γ)⇒(α) και η απόδειξη θα είναι πλήρης.

Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $\overline{m}\colon C_{bru}(G) \to \mathbb{C}$. Απ' το Λήμμα 1.2.7 (α) ξέρουμε ότι $L^\infty(G) * L^1(G)^\vee \subset C_{bru}(G)$, οπότε σταθεροποιώντας μια $f \in L^1(G)$ με $f \geq 0$ και $\|f\|_1 = 1$ ορίζεται καλά η απεικόνιση:

$$\overline{\overline{m}}\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C} : \ \overline{\overline{m}}(\phi) = \overline{m}(\phi * \check{f}), \quad \phi \in L^\infty(G)$$

όπου $\check{f}(s) := f(s^{-1}),\ s \in G$. Η $\overline{\overline{m}}$ είναι προφανώς γραμμική (επειδή η συνέλιξη είναι επιμεριστική) και ακόμη:

$$\overline{\overline{m}}(\mathbf{1}_G) = \overline{m}(\mathbf{1}_G * \check{f}) = \overline{m}\left(\int_G f d\mu \cdot \mathbf{1}_G\right) = \overline{m}(\mathbf{1}_G) = 1.$$

Επίσης, έχουμε:

$$\phi \in L^\infty(G),\ \phi \geq 0 \Rightarrow \phi * \check{f} \geq 0 \text{ στην } C_{bru}(G) \Rightarrow \overline{\overline{m}}(\phi) = \overline{m}(\phi * \check{f}) \geq 0$$

και για $\phi \in L^\infty(G)$, $s \in G$:

$$\overline{\overline{m}}(\lambda_s\phi) = \overline{m}((\lambda_s\phi) * \check{f}) = \overline{m}(\lambda_s(\phi * \check{f})) = \overline{m}(\phi * \check{f}) = \overline{\overline{m}}(\phi).$$

Άρα, το $\overline{\overline{m}}$ είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος στον $L^\infty(G)$, δηλαδή η G είναι amenable.

□

Μια διακριτή ομάδα G είναι πάντα τοπικά συμπαγής και Hausdorff. Στην περίπτωση μιας τέτοιας ομάδας, λοιπόν, μπορούμε να επιλέξουμε σαν μέτρο Haar το αριθμητικό μέτρο μ με $\mu(\{g\}) = 1$, για κάθε $g \in G$. Επομένως, για την διακριτή ομάδα G οι χώροι $L^\infty(G, \mu)$ και $C_b(G)$ συμπίπτουν με τον $\ell^\infty(G)$, δηλαδή τον χώρο των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων της G. Συνεπώς, η G θα είναι amenable αν και μόνον αν ο $\ell^\infty(G)$ εφοδιάζεται με ένα αριστερά αναλλοίωτο μέσο.
Επιπλέον έχουμε το εξής:

Πόρισμα 1.2.9. Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και G_d η ίδια ομάδα με την διακριτή τοπολογία. Αν η G_d είναι amenable, τότε και η G είναι amenable.

Απόδειξη. Αν η G_d είναι amenable, τότε υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$. Όμως, ισχύει προφανώς $C_b(G) \subset \ell^\infty(G)$ και άρα ο περιορισμός του m στην $C_b(G)$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτος μέσος. Επομένως, απ' την Πρόταση 1.2.8 έπεται ότι η G είναι amenable.

□

Σχόλιο: Το αντίστροφο του Πορίσματος 1.2.9 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ομάδα

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I,\ det(A) = 1\}$$

είναι συμπαγής, άρα amenable, αλλά μπορεί να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος στον $\ell^\infty(SO(3))$, δηλαδή ότι η ίδια ομάδα με την διακριτή τοπολογία δεν είναι amenable. Αυτό μπορεί να δειχθεί δείχνοντας πρώτα ότι η $SO(3)$ περιέχει μια υποομάδα ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες $\mathbb{F}_2$, η οποία όπως θα δούμε παρακάτω δεν είναι amenable με την διακριτή τοπολογία. Έτσι, η $SO(3)$ ως διακριτή ομάδα δεν είναι amenable, όπως προκύπτει απ' το Θεώρημα 1.5.8 που θα δούμε στα επόμενα.

1.3 Το θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 1.3.1. Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και X ένας χώρος Banach. Μια **συνεχής ισομετρική αναπαράσταση** της G στον X είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ απ' την G στην ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών ισομετριών απ' τον X στον εαυτό του (με πράξη την σύνθεση) τέτοιος, ώστε:
Για κάθε $\xi \in X$, η απεικόνιση

$$G \to X : s \mapsto \pi(s)\xi$$

είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας του X, δηλαδή: για κάθε $\xi \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U της μονάδας $e \in G$, ώστε:

$$\|\pi(s)\xi - \xi\| < \varepsilon, \quad \forall s \in U.$$

Αν ο X είναι χώρος Hilbert, τότε οι παραπάνω αναπαραστάσεις είναι οι συνεχείς unitary αναπαραστάσεις της G στον X, δηλαδή οι ομομορφισμοί $\pi\colon G \to \mathcal{U}(X)$ που είναι SOT-συνεχείς.

Ορισμός 1.3.2 (Η συζυγής δράση)**.** Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ μια συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G στον χώρο Banach X. Η **συζυγής δράση** π^* της π είναι η απεικόνιση:

$$\pi^*\colon G \to \mathrm{Aut}(X^*) : \ \pi^*(s) = \pi(s)^*, \ s \in G$$

όπου X^* ο δυϊκός χώρος Banach του X και $\pi(s)^*$ ο συζυγής τελεστής του $\pi(s)$, δηλαδή:

$$(\pi^*(s)\xi^*)(\xi) := \xi^*(\pi(s)\xi), \qquad s \in G, \xi \in X, \xi^* \in X^*$$

ή ισοδύναμα:

$$\pi^*(s)\xi^* := \xi^* \circ \pi(s), \qquad s \in G, \xi^* \in X^*.$$

Επειδή κάθε $\pi(s)$, $s \in G$, είναι γραμμική ισομετρία και επί του X, και κάθε $\pi^*(s)$ θα είναι γραμμική ισομετρία επί του X^*, άρα η π^* είναι καλά ορισμένη.
Πράγματι, αν $s \in G$ και θέσουμε $T := \pi(s)$, τότε η $\pi^*(s) = T^*\colon X^* \to X^*$ είναι προφανώς γραμμική και επιπλέον, επειδή η T είναι ισομετρία επί του X, για κάθε $\xi^* \in X^*$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\|\xi^*\| = \sup\{|\xi^*(\xi)| : \|\xi\| = 1, \xi \in X\} &= \sup\{|\xi^*(T\xi)| : \|T\xi\| = 1, \xi \in X\} \\ &= \sup\{|T^*(\xi^*)(\xi)| : \|\xi\| = 1, \xi \in X\} = \|T^*(\xi^*)\|\end{aligned}$$

δηλαδή η T^* είναι ισομετρία.
Τέλος, η T^* είναι επί του X^*, διότι για κάθε $\xi^* \in X^*$ έχουμε $z^* := \xi^* \circ T^{-1} \in X^*$ και, απ' τον ορισμό του συζυγούς τελεστή, $T^*(z^*) = \xi^* \circ T^{-1} \circ T = \xi^*$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $s, t \in G$ ισχύουν:

$$\pi^*(st) = \pi^*(t)\pi^*(s), \quad \pi^*(e) = id_{X^*}.$$

Επομένως, η π^* ορίζει ένα αντιομομορφισμό απ' την G στην $\mathrm{Aut}(X^*)$, ισοδύναμα μια δεξιά δράση της G στον δυϊκό χώρο X^*, αλλά η δράση αυτή δεν είναι απαραίτητα συνεχής, δηλαδή **δεν** είναι εν γένει σωστό ότι για κάθε $\xi^* \in X^*$, η απεικόνιση:

$$G \to X^* : \ s \mapsto \pi^*(s)\xi^*$$

θα είναι συνεχής, ως προς την νόρμα του X^*.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε $G = \mathbb{R}$, $X = L^1(\mathbb{R})$ και πάρουμε $\pi = \lambda$, δηλαδή την αριστερή δράση του $\mathbb{R}$ στον $L^1(\mathbb{R})$, τότε απ' την Πρόταση 1.2.6 (β) η λ είναι συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G στον X. Επίσης, κάνοντας την ταύτιση $L^1(G)^* = L^\infty(G)$ βλέπουμε εύκολα ότι, για $\phi \in X^* = L^\infty(G)$, η απεικόνιση $G \to X^* : s \mapsto \lambda_s^*\phi$ είναι στην ουσία η απεικόνιση:

$$\mathbb{R} \to L^\infty(\mathbb{R}) : s \mapsto \lambda_s\phi$$

η οποία όπως έχουμε δει δεν είναι συνεχής, ως προς την τοπολογία της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$, του $L^\infty(\mathbb{R})$ (βλ. παρατηρήσεις μετά τον Ορισμό 1.2.1).

Ορισμός 1.3.3. Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff, $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ μια συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G σε ένα χώρο Banach X και π^* η συζυγής δράση της π. Ένα $A \subset X^*$ λέγεται $\pi^*(G)$-αναλλοίωτο αν ισχύει:

$$\pi^*(s)A = A, \ \forall s \in G.$$

Επίσης, ένα στοιχείο $\xi^* \in X^*$ λέγεται σταθερό σημείο του $\pi^*(G)$ αν ισχύει:

$$\pi^*(s)\xi^* = \xi^*, \ \forall s \in G.$$

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι μια πολύ κομψή εφαρμογή του Διαχωριστικού Θεωρήματος Hahn-Banach (βλ. [18, Theorem 3.4, p. 59]), μας δίνει ένα χαρακτηρισμό των amenable ομάδων μέσω μιας ιδιότητας σταθερού σημείου:

Θεώρημα 1.3.4 (Ιδιότητα σταθερού σημείου)**.** Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Η G είναι amenable αν και μόνον αν για κάθε χώρο Banach X και κάθε συνεχή ισομετρική αναπαράσταση π της G στον X, η συζυγής δράση π^* της π ικανοποιεί το εξής:

Κάθε μη κενό, w^*-συμπαγές, κυρτό και $\pi^*(G)$-αναλλοίωτο υποσύνολο A του X^* περιέχει ένα σταθερό σημείο του $\pi^*(G)$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$): Έστω ότι η G είναι amenable και $m\colon L^\infty(G)\to\mathbb{C}$ ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος στον $L^\infty(G)$. Θεωρούμε, επίσης, μια συνεχή ισομετρική αναπαράσταση $\pi\colon G\to \mathrm{Aut}(X)$ της G σε ένα χώρο Banach X και ένα $A\subset X^*$ μη κενό, $\pi^*(G)$-αναλλοίωτο, w^*-συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X^*.
Για κάθε ζεύγος $\xi\in X,\ \xi^*\in X^*$ θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_{\xi,\xi^*}\colon G\to\mathbb{C}$ με:

$$\phi_{\xi,\xi^*}(x)=\xi^*(\pi(x)\xi), \qquad x\in G$$

και παρατηρούμε ότι $\phi_{\xi,\xi^*}\in C_b(G)$. Πράγματι, η ϕ_{ξ,ξ^*} είναι ίση με την σύνθεση της συνεχούς απεικόνισης $G\to X : x\mapsto \pi(x)\xi$ (αυτή είναι συνεχής διότι η π είναι συνεχής ισομετρική αναπαράσταση) με το συνεχές συναρτησοειδές ξ^*, επομένως είναι συνεχής. Επίσης, είναι φραγμένη, διότι:

$$|\phi_{\xi,\xi^*}(x)|=|\xi^*(\pi(x)\xi)|\le\|\pi(x)\xi\|\|\xi^*\|=\|\xi\|\|\xi^*\|,\quad \forall x\in G.$$

Επομένως, $\phi_{\xi,\xi^*}\in C_b(G)$ και ειδικότερα $\phi_{\xi,\xi^*}\in L^\infty(G)$ (δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας της ανήκει στον $L^\infty(G)$). Προφανώς, η $\check{\phi}_{\xi,\xi^*}$, όπου $\check{\phi}_{\xi,\xi^*}(t):=\phi_{\xi,\xi^*}(t^{-1})$, ανήκει επίσης στην $C_b(G)$ και άρα στον $L^\infty(G)$.
Έτσι, για κάθε $\xi^*\in X^*$, ορίζεται καλά η απεικόνιση:

$$P\xi^*\colon X\to\mathbb{C}:\ \xi\mapsto m(\check{\phi}_{\xi,\xi^*})\ ,\quad \xi\in X.$$

Παρατηρούμε ότι $P\xi^*\in X^*,\ \forall\xi^*\in X^*$:

$$|(P\xi^*)(\xi)|=|m(\check{\phi}_{\xi,\xi^*})|\le\|m\|\|\check{\phi}_{\xi,\xi^*}\|_\infty\le\|m\|\|\xi\|\|\xi^*\|=\|\xi\|\|\xi^*\|$$

ενώ για την γραμμικότητα της $P\xi^*$ αρκεί να δει κανείς ότι:

$$\phi_{\xi_1+r\xi_2,\xi^*}=\phi_{\xi_1,\xi^*}+r\phi_{\xi_2,\xi^*}\ ,\ \text{για}\ \xi_1,\xi_2\in X, r\in\mathbb{C}$$

το οποίο προκύπτει εύκολα απ' τον ορισμό της ϕ_{ξ,ξ^*}.
Συνεπώς, έχουμε μια γραμμική συστολή $P\colon X^*\to X^*$, δηλαδή $\|P\xi^*\|\le\|\xi^*\|$, για κάθε $\xi^*\in X^*$. Επιπλέον, η P απολαμβάνει τις εξής ιδιότητες:

1. $\pi^*(s)\circ P=P,\quad \forall s\in G.$
2. $P\xi^*\in \mathrm{conv}\overline{\{\pi^*(s)\xi^*:\ s\in G\}}^{w^*},\quad \forall\xi^*\in X^*.$

Πράγματι:
1. Για $\xi\in X$, $\xi^*\in X^*$ και $s\in G$ έχουμε:

$$[\pi^*(s)(P\xi^*)](\xi)=(P\xi^*)(\pi(s)\xi)=m(\check{\phi}_{\pi(s)\xi,\xi^*})$$

Όμως:

$$\check{\phi}_{\pi(s)\xi,\xi^*}(t) = \phi_{\pi(s)\xi,\xi^*}(t^{-1}) = \xi^*(\pi(t^{-1})\pi(s)\xi) = \xi^*(\pi(t^{-1}s)\xi) =$$

$$= \xi^*(\pi((s^{-1}t)^{-1})\xi) = \check{\phi}_{\xi,\xi^*}(s^{-1}t) = (\lambda_s\check{\phi}_{\xi,\xi^*})(t), \quad \forall t \in G.$$

Άρα:

$$m(\check{\phi}_{\pi(s)\xi,\xi^*}) = m(\lambda_s\check{\phi}_{\xi,\xi^*}) = m(\check{\phi}_{\xi,\xi^*}) = (P\xi^*)(\xi)$$

και έτσι έπεται ότι:

$$[\pi^*(s)(P\xi^*)](\xi) = (P\xi^*)(\xi).$$

2. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\xi^* \in X^*$, ώστε $P\xi^* \notin \overline{\mathrm{conv}\{\pi^*(s)\xi^* : \ s \in G\}}^{w^*}$. Απ' το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ και w^*-συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές του X^*, δηλαδή $\xi_0 \in X$ (αφού ο $(X^*, w^*)^*$ είναι ίσος με την εικόνα της κανονικής εμφύτευσης του X στον X^{**}), ώστε:

$$\mathrm{Re}((P\xi^*)(\xi_0)) \leq a < b \leq \mathrm{Re}(\pi^*(x^{-1})\xi^*(\xi_0)), \ \forall x \in G$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}((P\xi^*)(\xi_0)) \leq a < b \leq \mathrm{Re}(\check{\phi}_{\xi_0,\xi^*})$$

και επειδή $m \geq 0$ και $m(\mathbf{1}_G) = 1$, εφαρμόζοντας το m στις παραπάνω ανισότητες, έπεται:

$$\mathrm{Re}((P\xi^*)(\xi_0)) \leq a < b \leq m(\mathrm{Re}(\check{\phi}_{\xi_0,\xi^*})) = \mathrm{Re}(m(\check{\phi}_{\xi_0,\xi^*}))$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}((P\xi^*)(\xi_0)) \leq a < b \leq \mathrm{Re}((P\xi^*)(\xi_0))$$

που είναι άτοπο.
Έτσι, για κάθε $\xi^* \in A$ έχουμε:

$$P\xi^* \in \overline{\mathrm{conv}\{\pi^*(s)\xi^* : \ s \in G\}}^{w^*} \subset A$$

και

$$\pi^*(s)(P\xi^*) = P\xi^*, \quad \forall s \in G$$

άρα το $P\xi^*$ είναι σταθερό σημείο του $\pi^*(G)$ που ανήκει στο A.

($\Leftarrow$): Υποθέτουμε τώρα ότι η G ικανοποιεί την ιδιότητα σταθερού σημείου όπως παραπάνω. Θεωρούμε την αριστερή δράση της G στον χώρο Banach $C_{bu}(G)$:

$$\lambda \colon G \to \mathrm{Aut}(C_{bu}(G)), \ (\lambda_s f)(x) = f(s^{-1}x), \quad s \in G, \ f \in C_{bu}(G).$$

Όπως ήδη έχουμε δει, η λ είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός. Επίσης, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής, αφού για κάθε $f \in C_{bu}(G)$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή U της μονάδας, ώστε:

$$\|\lambda_s f - f\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall s \in U$$

απ' το γεγονός ότι η f είναι αριστερά ομοιόμορφα συνεχής.
Θεωρούμε ακόμα το σύνολο $A = \{m \in C_{bu}(G)^* : \ m \geq 0, \ m(\mathbf{1}_G) = 1\}$. Το A είναι προφανώς κυρτό και w^*-συμπαγές απ' το θεώρημα Αλάογλου, αφού είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του $C_{bu}(G)^*$ (κάθε $m \in A$ έχει νόρμα ίση με 1). Επίσης, για κάθε $s \in G$ έχουμε $\lambda_s^* A = A$. Πράγματι, για $m \in A$ έχουμε: $\lambda_s^*(m) = m \circ \lambda_s \in A$, διότι $f \geq 0 \Rightarrow \lambda_s f \geq 0 \Rightarrow m(\lambda_s f) \geq 0$ και $\lambda_s(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_G$ άρα $(m \circ \lambda_s)(\mathbf{1}_G) = 1$. Αντίστροφα, κάθε $m \in A$ γράφεται ως εξής: $m = m \circ Id = (m \circ \lambda_{s^{-1}}) \circ \lambda_s, \ \forall s \in G$, άρα $m \in \lambda_s^* A, \ \forall s \in G$.
Συνεπώς, λόγω της υπόθεσης, υπάρχει ένα σταθερό σημείο $m \in A$, δηλαδή τέτοιο, ώστε:

$$\lambda_s^* m = m, \quad \forall s \in G$$

δηλαδή: $m \circ \lambda_s = m, \quad \forall s \in G$. Αυτό σημαίνει ότι το m είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος του $C_{bu}(G)$ και άρα η G είναι amenable, απ' την Πρόταση 1.2.8.

□

Σχόλιο: Η χρησιμότητα της Πρότασης 1.2.8 στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος έγκειται στο ότι παρ' όλο που η αριστερή δράση λ της G στον $L^\infty(G)$ δεν είναι απαραίτητα συνεχής, εν τούτοις αν περιοριστούμε στον $C_{bu}(G)$, τότε η συνέχεια του αντίστοιχου περιορισμού της λ είναι άμεση απ' τον ορισμό της αριστερά ομοιόμορφης συνέχειας.

1.4 Amenability των αβελιανών τοπικά συμπαγών ομάδων

Θα δούμε, τώρα, ως συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.4, ότι κάθε αβελιανή τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff είναι amenable. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.3.4 θα χρειαστούμε το θεώρημα σταθερού σημείου Markov-Kakutani:

Θεώρημα 1.4.1 (Markov-Kakutani)**.** *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος Hausdorff, $K \subset X$ ένα κυρτό συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του X και $\mathcal{F}$ μια μεταθετική οικογένεια συνεχών αφινικών μετασχηματισμών του K, δηλαδή κάθε $T \in \mathcal{F}$ είναι μια απεικόνιση $T\colon K \to K$ με $T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y)$ για κάθε $x, \ y \in K$ και $0 < t < 1$ και για κάθε $T, \ S \in \mathcal{F}$*

ισχύει $T \circ S = S \circ T$. Τότε, υπάρχει $p \in K$ τέτοιο, ώστε $T(p) = p$, για κάθε $T \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη. Για $T \in \mathcal{F}$ θέτουμε $T^0 = I := id_K$, $T^n = T \circ T^{n-1}$, για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $T_n := \dfrac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})$, για $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $T \in \mathcal{F}$, η απεικόνιση T_n απεικονίζει το K στον εαυτό του και είναι αφινική και συνεχής, καθώς επίσης $T_n \circ S_m = S_m \circ T_n$, για κάθε $T,\ S \in \mathcal{F}$ και $n,\ m \geq 1$.
Έστω $\mathcal{F}^*$ η οικογένεια που αποτελείται από όλες τις απεικονίσεις του K στον εαυτό του, που είναι συνθέσεις πεπερασμένων το πλήθος στοιχείων της $\mathcal{F}_0 := \{T_n :\ T \in \mathcal{F},\ n \geq 1\}$. Προφανώς, η $\mathcal{F}^*$ είναι μεταθετική και κλειστή ως προς συνθέσεις. Έτσι, για κάθε $f, g \in \mathcal{F}^*$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$ και αν $h := f \circ g$, τότε $h \in \mathcal{F}^*$. Επιπλέον:

$$f(g(K)) \subset f(K) \text{ και } g(f(K)) \subset g(K) \Rightarrow h(K) \subset f(K) \cap g(K)$$

$$\Rightarrow f(K) \cap g(K) \neq \varnothing$$

Συνεπώς, η οικογένεια $\{f(K) :\ f \in \mathcal{F}^*\}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του συμπαγούς K με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Άρα, $\bigcap_{f \in \mathcal{F}^*} f(K) \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει $p \in K$, ώστε $p \in f(K)$ για κάθε $f \in \mathcal{F}^*$.
Έστω $T \in \mathcal{F}$ και U περιοχή του $0 \in X$. Τότε, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $p \in T_n(K)$, αφού $T_n \in \mathcal{F}^*$ και επομένως, επειδή ο T είναι αφινικός, υπάρχει $x_n \in K$ με:

$$p = \frac{1}{n}(x_n + Tx_n + \cdots + T^{n-1}x_n)$$

$$\Rightarrow p - Tp = \frac{1}{n}(x_n - T^n x_n) \in \frac{1}{n}(K - K)$$

Όμως, το $K - K$ είναι συμπαγές, διότι οι πράξεις του X είναι συνεχείς και το K είναι συμπαγές, κατά συνέπεια το $K - K$ θα είναι και φραγμένο. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $K - K \subset nU$. Άρα, $p - Tp \in U$ και επειδή η U ήταν τυχούσα περιοχή του $0 \in X$, έπεται ότι $p = Tp$ (γιατί η τομή των περιοχών του 0 είναι το $\{0\}$). Επομένως, το p είναι σταθερό σημείο του T, για κάθε $T \in \mathcal{F}$.

□

Θεώρημα 1.4.2. Κάθε αβελιανή τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff είναι amenable.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε μια αβελιανή τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G. Έστω X χώρος Banach, $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ μια συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G στον X και $\pi^*\colon G \to \mathrm{Aut}(X^*)$ η συζυγής δράση της π. Έστω ακόμη $A \subset X^*$ ένα μη κενό κυρτό w^*-συμπαγές υποσύνολο του X^* με $\pi^*(s)A = A$, για κάθε $s \in G$.
Ορίζουμε $\mathcal{F} := \{\pi^*(s)|_A : \ s \in G\}$, δηλαδή το σύνολο των περιορισμών των $\pi^*(s)$ στο A και παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια αφινικών μετασχηματισμών του A, επειδή κάθε $\pi^*(s)$ είναι γραμμική. Επιπλέον, απ' την υπόθεση ότι η G είναι αβελιανή έπεται ότι η $\mathcal{F}$ είναι μεταθετική. Πράγματι, αν $s, t \in G$, τότε:

$$\pi^*(s)\pi^*(t) = \pi^*(ts) = \pi^*(st) = \pi^*(t)\pi^*(s).$$

Άρα, απ' το θεώρημα Markov-Kakutani έπεται ότι υπάρχει $\xi^* \in A$, ώστε $\pi^*(s)\xi^* = \xi^*$, $\forall s \in G$. Δηλαδή, η G ικανοποιεί την ιδιότητα σταθερού σημείου και άρα, απ' το Θεώρημα 1.3.4, η G είναι amenable.

□

Επομένως, η κλάση των amenable ομάδων περιέχει και μη συμπαγείς ομάδες. Για παράδειγμα, οι τοπικά συμπαγείς ομάδες $(\mathbb{R}^n, +)$ και $(\mathbb{C}^n, +)$ είναι amenable ως αβελιανές, αλλά όχι συμπαγείς.

1.5 Amenability και κληρονομικότητα

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πώς συμπεριφέρεται η amenability ως προς κάποιες από τις συνήθεις ομαδοθεωρητικές πράξεις, όπως, παραδείγματος χάριν, ως προς σχηματισμό κλειστών υποομάδων και πηλίκων.

Πρόταση 1.5.1. Έστω G, H δύο τοπικά συμπαγείς Hausdorff ομάδες και $\theta\colon G \to H$ συνεχής ομομορφισμός ομάδων του οποίου η εικόνα είναι πυκνή στην H. Υποθέτουμε ότι η G είναι amenable. Τότε, η H είναι επίσης amenable.

Απόδειξη. Εφ' όσον η G είναι amenable, υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon C_{blu}(G) \to \mathbb{C}$, απ' την Πρόταση 1.2.8. Ορίζουμε $\tilde{m}\colon C_{blu}(H) \to \mathbb{C}$, με $\tilde{m}(f) = m(f \circ \theta)$. Η $\tilde{m}$ είναι καλά ορισμένη, διότι αν $f \in C_{blu}(H)$, τότε $f \circ \theta \in C_{blu}(G)$. Πράγματι, αν $f \in C_{blu}(H)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή U της μονάδας στην H, ώστε:

$$\|\lambda_h f - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall h \in U$$

Απ' την συνέχεια της θ, έπεται ότι υπάρχει περιοχή V της μονάδας στην G, ώστε $\theta(V) \subset U$. Παρατηρούμε ακόμη ότι, για $g, x \in G$:

$$\lambda_g(f \circ \theta)(x) = f(\theta(g^{-1}x)) = f(\theta(g^{-1})\theta(x)) = ((\lambda_{\theta(g)}f) \circ \theta)(x)$$

Δηλαδή, $\lambda_g(f\circ\theta) = (\lambda_{\theta(g)}f)\circ\theta$, για κάθε $g\in G$. Επομένως, για κάθε $g\in V$ έχουμε:

$$\|\lambda_g(f\circ\theta) - f\circ\theta\|_\infty = \|(\lambda_{\theta(g)}f - f)\circ\theta\|_\infty \leq \|\lambda_{\theta(g)}f - f\|_\infty < \varepsilon$$

Άρα, $f\circ\theta \in C_{blu}(G)$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι η $\tilde{m}$ είναι γραμμική και:

$$\tilde{m}(\mathbf{1}_H) = m(\mathbf{1}_H\circ\theta) = m(\mathbf{1}_G) = 1$$

$$f\geq 0 \Rightarrow f\circ\theta\geq 0 \Rightarrow \tilde{m}(f) = m(f\circ\theta)\geq 0$$

Δηλαδή, το $\tilde{m}$ είναι state της $C_{blu}(H)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι είναι και αριστερά αναλλοίωτο. Πράγματι:
Έστω $h\in H$, $f\in C_{blu}(H)$ και $\varepsilon>0$. Τότε, υπάρχει περιοχή U της μονάδας της H, ώστε

$$\|\lambda_x f - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall x\in U.$$

Επιπλέον, απ' την πυκνότητα της $\theta(G)$ στην H, έπεται ότι υπάρχει $g\in G$, ώστε $\theta(g)\in hU$, άρα $\|\lambda_{h^{-1}\theta(g)} - f\|_\infty < \varepsilon$. Έτσι, έχουμε:

$$|\tilde{m}(\lambda_h f - f)| = |\tilde{m}(\lambda_h f - \lambda_{\theta(g)}f) + \tilde{m}(\lambda_{\theta(g)}f - f)|$$

$$= |\tilde{m}(\lambda_h f - \lambda_{\theta(g)}f) + m((\lambda_{\theta(g)}f)\circ\theta - f\circ\theta)|$$

$$= |\tilde{m}(\lambda_h f - \lambda_{\theta(g)}f) + m(\lambda_g(f\circ\theta) - f\circ\theta)|$$

$$= |\tilde{m}(\lambda_h f - \lambda_{\theta(g)}f)| \leq \|\tilde{m}\|\|\lambda_h f - \lambda_{\theta(g)}f\|_\infty = \|f - \lambda_{h^{-1}\theta(g)}f\|_\infty < \varepsilon$$

Επειδή το ε ήταν τυχόν έπεται ότι $\tilde{m}(\lambda_h f) = \tilde{m}(f)$. Άρα, το $\tilde{m}$ είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος της $C_{blu}(H)$, επομένως η H είναι amenable, απ' την Πρόταση 1.2.8.

□

Πόρισμα 1.5.2. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και N μια κλειστή κανονική υποομάδα της G. Αν η G είναι amenable, τότε και η ομάδα πηλίκο G/N είναι amenable.

Απόδειξη. Ο κανονικός επιμορφισμός $\pi\colon G\to G/N$ με $g\mapsto gN$, είναι συνεχής και άρα, απ' την προηγούμενη πρόταση, η εικόνα $\pi(G) = G/N$ είναι amenable.

□

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι κάθε κλειστή υποομάδα H μιας amenable ομάδας G είναι επίσης amenable. Ωστόσο, αυτό είναι αρκετά πιο περίπλοκο, καθώς αν μ είναι το μέτρο Haar της G, δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι το μ περιορισμένο στην H είναι μέτρο Haar της H, επομένως δεν υπάρχει κάποια, τουλάχιστον προφανής, σχέση μεταξύ των $L^\infty(G)$ και $L^\infty(H)$.

Παρατήρηση 1.5.3. Ας υποθέσουμε ότι G είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και H μια κλειστή υποομάδα αυτής. Αν η G είναι amenable, τότε (βλ. Πρόταση 1.2.8) υπάρχει ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon C_b(G) \to \mathbb{C}$. Για να δείξουμε ότι η H είναι επίσης amenable αρκεί να βρούμε ένα αριστερά αναλλοίωτο μέσο $\tilde{m}$ της $C_b(H)$. Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε μια γραμμική συστολή $T\colon C_b(H) \to C_b(G)$ με $T(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_G$, $T(f) \geq 0$ για κάθε $f \in C_b(H)$ με $f \geq 0$ και $T\lambda_h = \lambda_h T$, για κάθε $h \in H$. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, αν ορίσουμε $\tilde{m} := m \circ T\colon C_b(H) \to \mathbb{C}$, θα έχουμε:

1. $\tilde{m}(\mathbf{1}_H) = m(T(\mathbf{1}_H)) = m(\mathbf{1}_G) = 1$.
2. $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0 \Rightarrow \tilde{m}(f) = m(T(f)) \geq 0$.
3. $\tilde{m}(\lambda_h f) = m(T(\lambda_h f)) = m(\lambda_h(T(f))) = m(T(f)) = \tilde{m}(f),\ \forall h \in H,\ \forall f \in C_b(H)$.

Επομένως, θα έχουμε ότι η H είναι amenable (πάλι απ' την Πρόταση 1.2.8). Η απόδειξη της ύπαρξης μιας τέτοιας απεικόνισης T απαιτεί κάποια τεχνικά βήματα.

Ας ξεκινήσουμε με τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.5.4 (Συναρτήσεις Bruhat)**.** Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και H μια κλειστή υποομάδα αυτής. Έστω ακόμη μ_H ένα μέτρο Haar της H. Μια συνάρτηση Bruhat για την H είναι μια συνεχής και θετική συνάρτηση $\beta\colon G \to [0, \infty)$ με τις ιδιότητες:

1. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K της G, η $\beta|_{KH}$ έχει συμπαγή φορέα.
2. Για κάθε $g \in G$ έχουμε:

$$\int_H \beta(gh) d\mu_H(h) = 1.$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι κάθε κλειστή υποομάδα μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας έχει μια τουλάχιστον συνάρτηση Bruhat. Στην συνέχεια, θα δούμε πώς αυτό θα μας βοηθήσει να ορίσουμε μια συστολή T όπως παραπάνω (Παρατήρηση 1.5.3).

Λήμμα 1.5.5. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα, H μια κλειστή υποομάδα αυτής και U μια ανοικτή συμμετρική και σχετικά συμπαγής περιοχή της μονάδας. Τότε, υπάρχει $S \subset G$ τέτοιο, ώστε:

(i) Για κάθε $g \in G$, υπάρχει $s \in S$ τέτοιο, ώστε $gH \cap Us \neq \varnothing$.

(ii) Για κάθε συμπαγές $K \subset G$, το σύνολο $\{s \in S :\ KH \cap \overline{U}s \neq \varnothing\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E} = \{S \subset G : s \notin UtH,\ \forall s, t \in S \text{ με } s \neq t\}$. Τότε, το $\mathcal{E}$ με την σχέση $\subset$ είναι μερικά διατεταγμένο και μη κενό. Επίσης, αν $\mathcal{C}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathcal{E}$, τότε $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{E}$, διότι αν $s, t \in \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{E}$ και $s \neq t$, τότε υπάρχουν $S_1,\ S_2 \in \mathcal{C}$ ώστε $s \in S_1$ και $t \in S_2$. Όμως, επειδή το $\mathcal{C}$ είναι ολικά διατεταγμένο, τα $S_1,\ S_2$ συγκρίνονται. Έστω, π.χ., ότι $S_1 \subset S_2$. Τότε, $s, t \in S_2$ και άρα $s \notin UtH$. Όμοια και για την άλλη περίπτωση. Έτσι, απ' το Λήμμα του Zorn έπεται ότι το $\mathcal{E}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω S.
Για το (i): Έστω $g \in G$. Αν υποθέσουμε ότι $gH \cap Us = \varnothing$, για κάθε $s \in S$, τότε $g \notin UsH$, για κάθε $s \in S$. Συνεπώς, αν $S_0 = S \cup \{g\}$ και $s, t \in S_0$ με $s \neq t$, τότε έχουμε τις περιπτώσεις:
1) $s, t \in S$: τότε $s \notin UtH$, απ' τον ορισμό του S.
2) $s = g,\ t \in S$: τότε $s = g \notin UtH$, επειδή $g \notin Us'H$, για κάθε $s' \in S$.
3) $t = g,\ s \in S$: τότε $t \notin UsH \Rightarrow s \notin U^{-1}tH^{-1} = UtH$, διότι $U^{-1} = U$ και $H^{-1} = H$.
Άρα, $S_0 \in \mathcal{E}$ και $S \subset S_0$ και απ' την μεγιστικότητα του S έπεται ότι $S = S_0$, άρα $g \in S$. Έτσι, απ' την αρχική υπόθεση έχουμε ότι $gH \cap Ug = \varnothing$. Άτοπο, αφού $g = ge = eg$ και $e \in U \cap H$.
Για το (ii): Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συμπαγές $K \subset G$, ώστε το σύνολο $\{s \in G :\ KH \cap \overline{U}s \neq \varnothing\}$ να είναι άπειρο. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ στο S και $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ στην H, ώστε $s_n \neq s_m$ για $n \neq m$ και $s_n h_n \in \overline{U}K$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\overline{U}$ είναι συμμετρική, επειδή η U είναι συμμετρική και η αντιστροφή $g \mapsto g^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός). Επειδή τα $\overline{U}$, K είναι συμπαγή και ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής, έπεται ότι το $\overline{U}K$ είναι επίσης συμπαγές. Συνεπώς, η ακολουθία $(s_n h_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει οριακό σημείο έστω $g \in \overline{U}K$. Επιλέγοντας συμμετρική περιοχή της μονάδας, έστω V, με $VV \subset U$, έπεται ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$, ώστε $s_n h_n, s_m h_m \in Vg$ και άρα:

$$s_n h_n (s_m h_m)^{-1} \in (Vg)(Vg)^{-1} = (Vg)(g^{-1}V^{-1}) = VV^{-1} = VV \subset U$$

επομένως: $s_n h_n \in U s_m h_m$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι $s_n \in U s_m H$ και απ' τον ορισμό του S έχουμε ότι $s_n = s_m$, άτοπο.

□

Λήμμα 1.5.6. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και H μια κλειστή υποομάδα αυτής. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon G \to [0,\infty)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(*i*) Για κάθε $g \in G$, ισχύει $\{t \in G : \ f(t) > 0\} \cap gH \neq \varnothing$.

(*ii*) Για κάθε συμπαγές $K \subset G$, η $f|_{KH}$ έχει συμπαγή φορέα.

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια $\phi \in C_c(G)$ ώστε $\phi \geq 0$, $\phi(e) = 1$ και $\phi(g) = \phi(g^{-1})$, για κάθε $g \in G$.
Έστω $U := \{g \in G : \ \phi(g) > 0\}$. Τότε, απ' την επιλογή της ϕ, έχουμε ότι το U είναι ανοικτή συμμετρική περιοχή της μονάδας $e \in G$ και επιπλέον σχετικά συμπαγές, αφού $\overline{U} = \mathrm{supp}(\phi)$ και το $\mathrm{supp}(\phi)$ είναι συμπαγές.
Θεωρούμε ένα σύνολο $S \subset G$, όπως στο Λήμμα 1.5.5, για την U, δηλαδή τέτοιο, ώστε τα U, S να ικανοποιούν τα (*i*) και (*ii*) του Λήμματος 1.5.5. Επιπλέον, ορίζουμε $f\colon G \to [0,\infty)$ με:

$$f(g) = \sum_{s \in S} \phi(gs^{-1}), \quad \text{για } g \in G.$$

Αν θεωρήσουμε ένα τυχόν $g \in G$, τότε υπάρχει συμπαγής περιοχή K του g και επομένως, απ' το Λήμμα 1.5.5 (*ii*), έχουμε ότι το σύνολο $\{s \in S : \phi(gs^{-1}) > 0\}$ είναι πεπερασμένο, διότι:

$$\phi(gs^{-1}) > 0 \Rightarrow gs^{-1} \in \overline{U} \Rightarrow g \in \overline{U}s \Rightarrow KH \cap \overline{U}s \neq \varnothing$$

δηλαδή: $\{s \in S : \phi(gs^{-1}) > 0\} \subset \{s \in S : \ KH \cap \overline{U}s \neq \varnothing\}$. Κατά συνέπεια, η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής.
(*i*) Έστω $g \in G$. Τότε, απ' το Λήμμα 1.5.5 (*i*), έπεται ότι υπάρχει $s \in S$, ώστε $gH \cap Us \neq \varnothing$. Αν, λοιπόν, επιλέξουμε ένα $x \in gH \cap Us$, θα έχουμε αφ' ενός $x \in gH$ και αφ' ετέρου $xs^{-1} \in U$, άρα $f(x) \geq \phi(xs^{-1}) > 0$. Δηλαδή, $x \in \{t \in G : \ f(t) > 0\} \cap gH$.
(*ii*) Έστω $K \subset G$ συμπαγές. Τότε, απ' το Λήμμα 1.5.5 (*ii*), έπεται ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $s_1, \ldots, s_n \in S$, ώστε:

$$\{g \in KH : \ f(g) > 0\} = \bigcup_{s \in S} (Us \cap KH) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Us_i$$

Επειδή κάθε Us_i είναι σχετικά συμπαγές και η ένωσή τους θα είναι σχετικά συμπαγής. Άρα, το σύνολο $\mathrm{supp}(f|_{KH}) = \overline{\{g \in KH : \ f(g) > 0\}}$ είναι συμπαγές.

□

Πρόταση 1.5.7. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και H μια κλειστή υποομάδα αυτής. Τότε, υπάρχει μια τουλάχιστον συνάρτηση Bruhat για την H.

Απόδειξη. Έστω $f\colon G \to [0,\infty)$ μια συνάρτηση όπως στο Λήμμα 1.5.6. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\tau\colon G \to C_c(H): \ g \mapsto f_g, \text{ όπου } f_g(h) := f(gh), \text{ για } h \in H.$$

Η τ είναι καλά ορισμένη, αφού αν $g \in G$, τότε υπάρχει συμπαγής περιοχή K του g και:

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(f_g) &= \overline{\{h \in H : f_g(h) \neq 0\}} = \overline{\{h \in H : f(gh) \neq 0\}} \\ &= g^{-1}\overline{\{gh : h \in H,\ f(gh) \neq 0\}} \subset g^{-1}\mathrm{supp}(f|_{KH})\end{aligned}$$

Επειδή το τελευταίο σύνολο είναι συμπαγές απ' το Λήμμα 1.5.6, έπεται ότι και το $\mathrm{supp}(f_g)$ είναι συμπαγές. Επίσης, είναι προφανές ότι η f_g είναι συνεχής, για κάθε $g \in G$, αφού ο πολλαπλασιασμός στην G και η f είναι συνεχείς.
Θα δείξουμε ότι η τ είναι συνεχής, ως προς την τοπολογία της G και την νόρμα-supremum του $C_c(H)$. Για αυτό, αρκεί να δείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Για κάθε $g \in G$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή της μονάδας, έστω V, στην G, ώστε:

$$\sup_{h\in H} |f_{yg}(h) - f_g(h)| \leq \varepsilon\ , \quad \forall y \in V.$$

Απόδειξη: Ας σταθεροποιήσουμε ένα $g \in G$ και ένα $\varepsilon > 0$. Έστω U συμπαγής περιοχή της μονάδας. Τότε, το Ug είναι συμπαγής περιοχή του g και από την υπόθεση για την f το σύνολο $K := \mathrm{supp}(f|_{UgH})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του UgH, άρα και συμπαγές υποσύνολο της G. Για κάθε $x \in K$, απ' την συνέχεια της f στο x, μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή U_x της μονάδας, ώστε να ισχύει:

$$|f(yx) - f(x)| < \varepsilon/2\ , \quad \forall y \in U_x \qquad (*)$$

Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε συμμετρική περιοχή V_x της μονάδας, ώστε $V_xV_x \subset U_x$, για κάθε $x \in K$. Τότε, η οικογένεια $\{V_x x :\ x \in K\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του K, άρα, λόγω συμπάγειας, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $x_1, \ldots, x_n \in K$, ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}x_i$. Ορίζουμε $V := U \cap (\bigcap_{i=1}^n V_{x_i})$, το οποίο είναι προφανώς περιοχή της μονάδας.
Έστω $y \in V$ και $h \in H$. Θέτουμε $x := gh$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $x \in K$, τότε: υπάρχει $j \in \{1, \dots, n\}$, ώστε $x \in V_{x_j} x_j$, δηλαδή $x x_j^{-1} \in V_{x_j} \subset U_{x_j}$. Επίσης, έχουμε: $yx = y(x x_j^{-1}) x_j \in V_{x_j} V_{x_j} x_j \subset U_{x_j} x_j$, δηλαδή: $y x x_j^{-1} \in U_{x_j}$ και άρα:

$$|f(yx) - f(x)| \leq |f(yx) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| =$$

$$= |f((y x x_j^{-1}) x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f((x x_j^{-1}) x_j)| \overset{(*)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

2) Αν $yx \in K$, τότε με παρόμοιο τρόπο προκύπτει $|f(yx) - f(x)| < \varepsilon$.
3) Αν $yx, x \notin K$, τότε $f(x) = f(yx) = 0$ και άρα $|f(yx) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.
Συνεπώς, συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις, έχουμε:

$$|f(ygh) - f(gh)| < \varepsilon \ , \quad \forall y \in V, \ \forall h \in H$$

δηλαδή:

$$\sup_{h \in H} |f_{yg}(h) - f_g(h)| \leq \varepsilon \ , \quad \forall y \in V.$$

Άρα, η τ είναι συνεχής.
Θεωρούμε τώρα το γραμμικό συναρτησοειδές:

$$I \colon C_c(H) \to \mathbb{C} : \ I(\phi) = \int_H \phi(h) d\mu_H(h), \qquad \phi \in C_c(H).$$

όπου μ_H ένα μέτρο Haar της H. Επειδή το μ_H είναι κανονικό μέτρο Borel και η H τοπικά συμπαγής, το I είναι θετικό και φραγμένο, συνεπώς η σύνθεση $\alpha := I \circ \tau \colon G \to \mathbb{C}$ είναι καλά ορισμένη, συνεχής και ισχύει $\alpha \geq 0$, εφ' όσον $f \geq 0$.
Μάλιστα, ισχύει $\alpha(g) > 0$, για κάθε $g \in G$. Πράγματι, αν $\alpha(g) = 0$, για κάποιο $g \in G$, τότε $\int_H f_g d\mu_H = 0$ από το οποίο, αφού $f_g \geq 0$, συνάγεται ότι $f_g = 0$ μ_H-σχεδόν παντού, δηλαδή $\mu_H(\{h \in H : \ f_g(h) > 0\}) = 0$. Όμως, απ' το Λήμμα 1.5.6 (i), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \varnothing \neq \{x \in G : f(x) > 0\} \cap gH &= \{gh : h \in H, \ f(gh) > 0\} \\ &= g\{h \in H : \ f_g(h) > 0\} \\ &\implies \{h \in H : \ f_g(h) > 0\} \neq \varnothing \end{aligned}$$

Δηλαδή, το σύνολο $\{h \in H : \ f_g(h) > 0\}$ είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο της H (διότι η f_g είναι συνεχής). Επομένως, $\mu_H(\{h \in H : \ f_g(h) > 0\}) > 0$. Άτοπο.
Τέλος, ορίζουμε:

$$\beta \colon G \to [0, \infty) \ \text{με} \ \beta(g) = \frac{f(g)}{\alpha(g)} \ , \ g \in G.$$

Απ' τα προηγούμενα έπεται άμεσα ότι η β είναι συνεχής και μη αρνητική. Επιπλέον, η β είναι μια συνάρτηση Bruhat για την H. Πράγματι, ισχύει προφανώς $\beta(g) = 0 \iff f(g) = 0$ και άρα $\mathrm{supp}(\beta|_{KH}) = \mathrm{supp}(f|_{KH})$, που είναι συμπαγές υποσύνολο της G απ' το Λήμμα 1.5.6 (ii) και επιπλέον, επειδή το μ_H είναι αναλλοίωτο ως προς αριστερές μεταφορές, για κάθε $h \in H$ και $g \in G$, έχουμε:

$$\alpha(gh) = \int_H f(ghw)d\mu_H(w) = \int_H f(gw)d\mu_H(w) = \alpha(g)$$

και άρα, για κάθε $g \in G$:

$$\int_H \beta(gh)d\mu_H(h) = \int_H \frac{f(gh)}{\alpha(gh)}d\mu_H(h) = \frac{1}{\alpha(g)}\int_H f(gh)d\mu_H(h)$$
$$= \frac{1}{\alpha(g)}\alpha(g) = 1$$

□

Θεώρημα 1.5.8. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και H μια κλειστή υποομάδα αυτής. Αν η G είναι amenable, τότε και η H είναι amenable.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.5.7 έχουμε ότι για την H υπάρχει συνάρτηση Bruhat, έστω $\beta\colon G \to [0,\infty)$. Ορίζουμε $T\colon C_b(H) \to C_b(G)$ με:

$$T(\phi)(g) := \int_H \phi(h)\beta(g^{-1}h)d\mu_H(h)\ , \quad g \in G,\ \phi \in C_b(H)$$

όπου το μ_H είναι ένα μέτρο Haar της H.
Η T είναι καλά ορισμένη, διότι για κάθε $\phi \in C_b(H)$ το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει, απ' το γεγονός ότι το $\mathrm{supp}(\beta|_{KH})$ είναι συμπαγές, για κάθε $K \subset G$ συμπαγές. Επίσης, η $T(\phi)$ είναι συνεχής και φραγμένη, αφού για $g \in G$:

$$|T(\phi)(g)| \le \int_H |\phi(h)||\beta(g^{-1}h)|d\mu_H(h) \le \|\phi\|_\infty \int_H \beta(g^{-1}h)d\mu_H(h) = \|\phi\|_\infty$$
$$\implies \|T(\phi)\|_\infty \le \|\phi\|_\infty$$

ενώ το ότι η $T(\phi)$ είναι συνεχής αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως αποδείξαμε και ότι η απεικόνιση α, που ορίσαμε στην απόδειξη του Λήμματος 1.5.6 είναι συνεχής, δηλαδή με ένα επιχείρημα εντελώς ανάλογο με την απόδειξη του ισχυρισμού που διατυπώσαμε στην απόδειξη του Λήμματος 1.5.6.
Επίσης, παρατηρούμε ότι η T είναι γραμμική και $T(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_G$, αφού:

$$T(\mathbf{1}_H)(g) = \int_H \beta(g^{-1}h)d\mu_H(h) = 1\ , \quad \forall g \in G.$$

Επιπλέον, αν $\phi \geq 0$, τότε προφανώς $T(\phi) \geq 0$.
Τέλος, για $h \in H$ και $\phi \in C_b(H)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
T(\lambda_h \phi)(g) &= \int_H \phi(h^{-1}w)\beta(g^{-1}w)d\mu_H(w) \\
&= \int_H \phi(w)\beta(g^{-1}hw)d\mu_H(w) \\
&= T(\phi)(h^{-1}g) \\
&= [(\lambda_h T)(\phi)](g), \qquad \text{για κάθε } g \in G.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η $T\colon C_b(H) \to C_b(G)$ είναι γραμμική συστολή με τις ιδιότητες: $T(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_G$, $T(f) \geq 0$ για κάθε $f \in C_b(H)$ με $f \geq 0$ και $T\lambda_h = \lambda_h T$, για κάθε $h \in H$. Επομένως, όπως έχουμε ήδη επισημάνει στην Παρατήρηση 1.5.3, αν $m\colon C_b(G) \to \mathbb{C}$ είναι ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_b(G)$, τότε η σύνθεση $m \circ T$ είναι ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος στην $C_b(H)$ και άρα αν η G είναι amenable, τότε και η H είναι amenable.

$\square$

Θεώρημα 1.5.9. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και N μια κλειστή κανονική υποομάδα της G. Τότε, η G είναι amenable αν και μόνον αν οι N και G/N είναι και οι δύο amenable.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$): Αν η G είναι amenable, τότε και οι N, G/N είναι amenable, από το Θεώρημα 1.5.8 και το Πόρισμα 1.5.2, αντιστοίχως.
($\Leftarrow$): Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι οι N και G/N είναι amenable. Τότε, υπάρχουν αριστερά αναλλοίωτοι μέσοι $\tilde{m}$ και $\bar{m}$ στις $C_b(N)$ και $C_b(G/N)$ αντιστοίχως.
Ορίζουμε απεικόνιση $T\colon C_{blu}(G) \to C_b(G)$ με

$$T(\phi)(g) := \tilde{m}((\lambda_g \phi)|_N) \ , \quad \phi \in C_{blu}(G),\ g \in G.$$

Η T είναι καλά ορισμένη, διότι αν $\phi \in C_{blu}(G)$, τότε:

$$|T(\phi)(g)| = |\tilde{m}((\lambda_g \phi)|_N)| \leq \|\tilde{m}\| \|(\lambda_g \phi)|_N\|_\infty \leq \|\lambda_g \phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty,\ \forall g \in G$$

δηλαδή η $T(\phi)$ είναι φραγμένη από $\|\phi\|_\infty$ και επιπλέον είναι και συνεχής, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ και $g \in G$, έχουμε (επειδή η ϕ είναι αριστερά ομοιόμορφα συνεχής) ότι υπάρχει περιοχή U της μονάδας ώστε:

$$\|\lambda_s \phi - \phi\|_\infty < \varepsilon \ , \quad \forall s \in U.$$

Έτσι, για $t = gs \in gU$, $s \in U$ έχουμε:

$$|T(\phi)(t) - T(\phi)(g)| = |\tilde{m}((\lambda_{gs}\phi)|_N - (\lambda_g\phi)|_N)| \leq \|(\lambda_{gs}\phi)|_N - (\lambda_g\phi)|_N)\|_\infty$$

$$\leq \|\lambda_g\lambda_s\phi - \lambda_g\phi\|_\infty = \|\lambda_g(\lambda_s\phi - \phi)\|_\infty = \|\lambda_s\phi - \phi\|_\infty < \varepsilon$$

δηλαδή, $T(\phi) \in C_b(G)$. Επίσης, βλεπουμε ότι η T είναι γραμμική και, όπως προκύπτει απ' τα παραπάνω, φραγμένη με $\|T\| \leq 1$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για κάθε $\phi \in C_{blu}(G)$ και $g, h \in G$ με $gN = hN$, ισχύει $T(\phi)(g) = T(\phi)(h)$. Πράγματι, εφ' όσον $gN = hN = Nh$ (διότι η N είναι κανονική), έπεται ότι υπάρχει $n \in N$ με $g = nh$ και άρα:

$$(\lambda_g\phi)|_N = (\lambda_{nh}\phi)|_N = (\lambda_n\lambda_h\phi)|_N = \lambda_n((\lambda_h\phi)|_N)$$

συνεπώς:

$$T(\phi)(g) = \tilde{m}((\lambda_g\phi)|_N) = \tilde{m}(\lambda_n((\lambda_h\phi)|_N)) = \tilde{m}((\lambda_h\phi)|_N)) = T(\phi)(h).$$

Έτσι, η T επάγει μια γραμμική και φραγμένη απεικόνιση $\tilde{T}\colon C_{blu}(G) \to C_b(G/N)$ με: $\tilde{T}(\phi)(Ng) := T(\phi)(g)$, για $g \in G$. Η $\tilde{T}$ είναι καλά ορισμένη από τα παραπάνω και εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμική, επειδή η T είναι, ενώ για $\phi \in C_{blu}(G)$ έχουμε $\|\tilde{T}(\phi)\|_\infty = \|T(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$. Επίσης, έπεται άμεσα ότι $\tilde{T}(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_{G/N}$ και $\tilde{T}(\phi) \geq 0$, αν $\phi \geq 0$.
Θεωρούμε, τώρα, την σύνθεση

$$m := \check{m} \circ \tilde{T}\colon C_{blu}(G) \to \mathbb{C}$$

όπου $\check{m}\colon C_b(G/N) \to \mathbb{C}$ με $\check{m}(f) := \bar{m}(\check{f})$ και $\check{f}(xN) := f(x^{-1}N)$, για $f \in C_b(G/N)$, $x \in G$. Είναι άμεσο ότι το $\check{m}$ είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές που διατηρεί την μονάδα.
Απ' τα προηγούμενα έπεται ότι το m είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές με $m(\mathbf{1}_G) = 1$. Επιπλέον, για $g, x \in G$ και $\phi \in C_{blu}(G)$ υπολογίζουμε:

$$\left(\tilde{T}(\lambda_g\phi)\right)^\vee (xN) = \tilde{T}(\lambda_g\phi)(x^{-1}N) = T(\lambda_g\phi)(x^{-1}) = \tilde{m}((\lambda_{x^{-1}}\lambda_g\phi)|_N)$$

$$= \tilde{m}((\lambda_{x^{-1}g}\phi)|_N) = \tilde{T}(\phi)\left(((g^{-1}N)(xN))^{-1}\right) = \left[\lambda_{gN}\left(\tilde{T}(\phi)\right)^\vee\right](xN)$$

δηλαδή

$$\left(\tilde{T}(\lambda_g\phi)\right)^\vee = \lambda_{gN}\left(\tilde{T}(\phi)\right)^\vee.$$

Επομένως, για $g \in G$ και $\phi \in C_{blu}(G)$ έχουμε:

$$m(\lambda_g\phi) = \check{m}\left(\tilde{T}(\lambda_g\phi)\right) = \bar{m}\left(\left(\tilde{T}(\lambda_g\phi)\right)^\vee\right) = \bar{m}\left(\lambda_{gN}\left(\tilde{T}(\phi)\right)^\vee\right)$$

$$= \bar{m}\left(\left(\tilde{T}(\phi)\right)^{\vee}\right) = \check{m}\left(\tilde{T}(\phi)\right) = m(\phi).$$

Άρα, το m είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος της $C_{blu}(G)$ και επομένως η G είναι amenable.

□

Είδαμε ότι η κλάση των amenable ομάδων περιέχει όλες τις συμπαγείς και όλες τις αβελιανές τοπικά συμπαγείς (εννοείται Hausdorff) ομάδες και είναι «κλειστή» ως προς τον σχηματισμό κλειστών υποομάδων, πηλίκων και επεκτάσεων (λέμε ότι η ομάδα G είναι επέκταση μιας ομάδας A με πηλίκο B αν υπάρχει κανονική υποομάδα N της G, ώστε $A \cong N$ και $G/N \cong B$, πρβλ. και Θεώρημα 1.5.9). Με δεδομένα όλα αυτά, διαπιστώνουμε ότι η κλάση των amenable ομάδων είναι αρκετά ευρεία.

Ορισμός 1.5.10. Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος υποομάδες της G, έστω N_i, $i = 1, \ldots, n$, ώστε $\{e\} = N_0 \subset \ldots \subset N_n = G$, κάθε N_{i-1} είναι κανονική υποομάδα της N_i και κάθε πηλίκο N_i/N_{i-1} είναι αβελιανή, για $i = 1, \ldots, n$.

Πόρισμα 1.5.11. Κάθε επιλύσιμη τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα είναι amenable.

Απόδειξη. Έστω G επιλύσιμη τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Έστω G_d η ίδια ομάδα εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία. Χάρη στο Πόρισμα 1.2.9 αρκεί να δείξουμε ότι η G_d είναι amenable. Πράγματι, επειδή η G είναι επιλύσιμη και η επιλυσιμότητα δεν εξαρτάται απ' την θεωρούμενη τοπολογία, έπεται ότι υπάρχουν υποομάδες της G έστω $N_0, \ldots, N_n$ ώστε $\{e\} = N_0 \subset \ldots \subset N_n = G$, κάθε N_{i-1} είναι κανονική υποομάδα της N_i και κάθε πηλίκο N_i/N_{i-1} είναι αβελιανή, για $i = 1, \ldots, n$. Επομένως, θεωρώντας όλες τις ομάδες διακριτές και εφαρμόζοντας διαδοχικά το Θεώρημα 1.5.9 σε συνδυασμό με το ότι κάθε αβελιανή είναι amenable, έπεται ότι η G_d είναι amenable.

□

Επομένως, κάθε μη αβελιανή, αλλά επιλύσιμη ομάδα μας δίνει ένα παράδειγμα μιας μη αβελιανής amenable ομάδας. Παραδείγματος χάριν, η συνεχής ομάδα του Heisenberg:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων, δεν είναι αβελιανή. Ωστόσο, είναι επιλύσιμη, διότι η παράγωγος υποομάδα G' της G, δηλαδή η υποομάδα της

G που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $ABA^{-1}B^{-1}$, με $A, B \in G$, είναι η εξής:

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

η οποία είναι αβελιανή. Επίσης, η παράγωγος υποομάδα μιας ομάδας είναι πάντα κανονική και το αντίστοιχο πηλίκο G/G' είναι αβελιανή ομάδα. Άρα, η $\{I\} \subset G' \subset G$ ικανοποιεί τον Ορισμό 1.5.10.

1.6 Αντιπαραδείγματα - οι ομάδες $\mathbb{F}_2$ και $SL_2(\mathbb{R})$

Θα δούμε τώρα δύο σημαντικά παραδείγματα τοπικά συμπαγών ομάδων, οι οποίες όμως δεν είναι amenable.

Η πρώτη, η οποία αποτελεί και το κλασικό παράδειγμα ομάδας που δεν είναι amenable, είναι η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες $\mathbb{F}_2$ με την διακριτή τοπολογία.

Πρόταση 1.6.1. Η $\mathbb{F}_2$ με την διακριτή τοπολογία δεν είναι amenable.

Απόδειξη. Έστω $\{a, b\}$ βάση της $\mathbb{F}_2$ και A το σύνολο των ανηγμένων λέξεων της $\mathbb{F}_2$ που έχουν ως πρώτο γράμμα μια δύναμη του a με μη μηδενικό ακέραιο εκθέτη. Τότε, αφ' ενός έχουμε ότι $\mathbb{F}_2 = A \cup aA$ και αφ' ετέρου τα σύνολα A, bA, b^2A είναι ανά δύο ξένα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon \ell^\infty(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{C}$. Έστω, ακόμη, λ η αριστερή δράση της $\mathbb{F}_2$ στον $\ell^\infty(\mathbb{F}_2)$. Έτσι, χάρη στο ότι το m είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος, έχουμε τα εξής:

$$1 = m(\mathbf{1}) = m(\chi_{\mathbb{F}_2}) = m(\chi_{A \cup aA}) \leq m(\chi_A) + m(\chi_{aA}) =$$

$$= m(\chi_A) + m(\lambda_a \chi_A) = 2m(\chi_A)$$

Άρα, $m(\chi_A) \geq 1/2$.
Απ' την άλλη όμως έχουμε:

$$3m(\chi_A) = m(\chi_A) + m(\lambda_b \chi_A) + m(\lambda_{b^2} \chi_A) = m(\chi_A + \chi_{bA} + \chi_{b^2A}) =$$

$$= m(\chi_{A \cup bA \cup b^2A}) \leq m(\chi_{\mathbb{F}_2}) = 1$$

Άρα, $m(\chi_A) \leq 1/3$. Άτοπο.

□

Παρατήρηση 1.6.2. Με βάση το ότι η $\mathbb{F}_2$ δεν είναι amenable, απ' το Θεώρημα 1.5.8 προκύπτει ότι κάθε διακριτή ομάδα που περιέχει μια υποομάδα ισόμορφη με την $\mathbb{F}_2$ δεν είναι amenable.

Πόρισμα 1.6.3. Η ελεύθερη ομάδα σε n το πλήθος γεννήτορες $\mathbb{F}_n$ με την διακριτή τοπολογία δεν είναι amenable, για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη. Έστω $n \geq 2$ και $\{a_1, \ldots, a_n\}$ βάση της $\mathbb{F}_n$. Θεωρούμε $H := \langle \{a_1, a_2\} \rangle$, δηλαδή την υποομάδα της $\mathbb{F}_n$ που παράγεται από τα $a_1,\ a_2$. Προφανώς έχουμε ότι $H \cong \mathbb{F}_2$ και άρα, απ' την Παρατήρηση 1.6.2, έπεται το ζητούμενο.

□

Το παραπάνω Πόρισμα μπορεί να δειχθεί και ανεξάρτητα από το Θεώρημα 1.5.8, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι στο επιχείρημα της απόδειξης της Προτασης 1.6.1 ουσιαστικό ρόλο δεν έπαιξε το γεγονός ότι η τάξη της ελεύθερης ομάδας $\mathbb{F}_2$ είναι ίση με 2, αλλά το γεγονός ότι αυτή είναι πεπερασμένη και μεγαλύτερη ή ίση του 2.

Το επόμενο παράδειγμα που θα δούμε είναι η ειδική γραμμική ομάδα:

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ ad - bc = 1 \right\}$$

με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων.

Αν θεωρήσουμε την $SL_2(\mathbb{R})$ ως υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$, τότε αυτή είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff με την σχετική τοπολογία, δηλαδή ως προς την Ευκλείδεια νόρμα πινάκων. Θα δείξουμε, ως συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.4, ότι η $SL_2(\mathbb{R})$ δεν είναι amenable.

Πρώτα, όμως, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα ισοδύναμο χαρακτηρισμό της amenability, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.4, καθώς και το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.6.4. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\delta\colon G \times K \to K : (g, x) \mapsto g \cdot x$ συνεχής δράση της G σε ένα συμπαγή Hausdorff χώρο K. Θεωρούμε τον χώρο Banach $A = (C(K), \| \cdot \|_\infty)$. Τότε, η απεικόνιση

$$\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(A) : (\pi(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)\ , \quad \text{για } f \in A,\ x \in K,\ g \in G$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G στον A.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, η π είναι καλά ορισμένη, διότι για κάθε $f \in A$ και $g \in G$, απ' την συνέχεια της δράσης και της f, έπεται $\pi(g)f \in A$. Ακόμη, εύκολα βλέπουμε ότι η $\pi(g)\colon A \to A$ είναι γραμμική, για κάθε $g \in G$. Επιπλέον, $\|f\|_\infty = \|\pi(g)f\|_\infty$, για κάθε $g \in G$ και $f \in A$. Πράγματι, ισχύει $K = \{g^{-1}\cdot x : x \in K\}$, διότι κάθε $y \in K$ γράφεται ως $y = g^{-1} \cdot (g \cdot y)$. Επομένως, έχουμε:

$$\|f\|_\infty = \sup_{y\in K} |f(y)| = \sup_{x\in K} |f(g^{-1} \cdot x)| = \|\pi(g)f\|_\infty$$

Επίσης, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η π είναι ομομορφισμός (προκύπτει α-κριβώς όπως το ότι η αριστερή δράση μιας ομάδας G στον $L^\infty(G)$ είναι ομο-μορφισμός - βλ. Ορισμό 1.2.1).
Μένει να δείξουμε ότι η π είναι συνεχής. Έστω, λοιπόν, $f \in A$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in K$, απ' την συνέχεια της f, υπάρχει ανοικτή περιοχή W_x του x, ώστε:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall y \in W_x \qquad (*)$$

Επειδή η δράση $\delta\colon G \times K \to K$ είναι συνεχής στο (e,x), έπεται ότι υπάρχουν ανοικτά $U_x \subset G$ και $V_x \subset K$, με $x \in V_x$ και $e \in U_x$, ώστε $x \in U_x \cdot V_x \subset W_x$, όπου $U_x \cdot V_x := \delta(U_x \times V_x)$. Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε συμμετρική ανοικτή περιοχή A_x του e, ώστε $A_xA_x \subset U_x$. Τότε, επειδή $x \in A_x \cdot V_x$, θα έχουμε $K = \bigcup_{x\in K} A_x \cdot V_x$ και κάθε σύνολο $A_x \cdot V_x$ είναι ανοικτό υποσύνολο του K, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι οι απεικονίσεις $K \to K : y \mapsto g \cdot y$, για $g \in G$, είναι ομοιομορφισμοί. Έτσι, εφ' όσον ο K είναι συμπαγής, έπεται ότι υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$, ώστε $K = \bigcup_{i=1}^n A_{x_i} \cdot V_{x_i}$. Θέτουμε $U := \bigcap_{i=1}^n A_{x_i}$, το οποίο είναι μια ανοικτή και συμμετρική περιοχή του e.
Έστω, τώρα, αυθαίρετα $g \in U$ και $x \in K$. Τότε, υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$, ώστε $x \in A_{x_i} \cdot V_{x_i}$ και άρα υπάρχουν $x_i' \in V_{x_i}$ και $h_i \in A_{x_i}$, ώστε $x = h_i \cdot x_i'$. Επομένως, $(g^{-1}h_i)\cdot x_i' \in (A_{x_i}A_{x_i})\cdot V_{x_i} \subset U_{x_i}\cdot V_{x_i} \subset W_{x_i}$ και $x \in A_{x_i}\cdot V_{x_i} \subset W_{x_i}$. Συνεπώς, έχουμε:

$$|f(g^{-1} \cdot x) - f(x)| \leq |f((g^{-1}h_i) \cdot x_i') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει απ' τα προηγούμενα και την $(*)$.
Άρα, η π είναι συνεχής ισομετρική αναπαράσταση.

$\square$

Θεώρημα 1.6.5. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Η G είναι amenable αν και μόνον αν για κάθε συμπαγή Hausdorff χώρο K και κάθε συνεχή δράση $\delta\colon G \times K \to K : (g,x) \mapsto g \cdot x$, υπάρχει G-αναλλοίωτο κανονικό Borel-μέτρο πιθανότητας μ στον K. Λέγοντας ότι το μ είναι G-αναλλοίωτο μέτρο, εννοούμε ότι $\mu(g \cdot E) = \mu(E)$, για κάθε Borel-υποσύνολο E της G και κάθε $g \in G$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$): Υποθέτουμε ότι η G είναι amenable. Έστω K συμπαγής Hausdorff χώρος και $\delta\colon G \times K \to K : (g, x) \mapsto g \cdot x$ μια συνεχής δράση. Έστω ακόμη $A := C(K)$ και $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(A)$, με $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ για $f \in A,\ x \in K,\ g \in G$. Τότε, η π είναι συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της G στον χώρο Banach A, απ' το Λήμμα 1.6.4.
Απ' το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (βλ. [10, Θεώρημα 12.38, σελ. 227]), έπεται ότι η απεικόνιση

$$T\colon M_r(K) \to A^*$$

με:

$$(T\mu)(f) = \int_K f d\mu\ , \qquad \text{για } f \in A,\ \mu \in M_r(K)$$

όπου $M_r(K)$ ο χώρος Banach των κανονικών μιγαδικών μέτρων Borel στον K, είναι ισομετρικός ισομορφισμός και $\mu \geq 0 \iff T\mu \geq 0$. Έστω, ακόμη, $\pi^*\colon G \to \mathrm{Aut}(A^*)$ η συζυγής δράση της π. Για $g \in G$, $\mu \in M_r(K)$ και $f \in A$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\pi^*(g)(T\mu)(f) = (T\mu)(\pi(g)f) &= \int_K f(g^{-1} \cdot x) d\mu(x) \\ &= \int_K f(x) d\mu(g \cdot x) = (T\mu_g)(f)\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$\pi^*(g)(T\mu) = T\mu_g, \text{ για κάθε } g \in G \text{ και } \mu \in M_r(K)$$

όπου $\mu_g(E) := \mu(g \cdot E)$, για καθε Borel-μετρήσιμο $E \subset K$ και $g \in G$.
Έστω $B := \{\phi \in A^* : \phi \geq 0,\ \|\phi\| = 1\}$, δηλαδή το σύνολο των states της C^*-άλγεβρας A. Τότε, προφανώς έχουμε:

$$B = \{T\mu \in A^* : \mu \in M_r(K),\ \mu \geq 0,\ \mu(K) = 1\}.$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι το B είναι κυρτό και (απ' το θεώρημα Αλάογλου) w^*-συμπαγές υποσύνολο του A^*. Ακόμη, ισχύει $\pi^*(g)B = B$, για κάθε $g \in G$, διότι, για κάθε $g \in G$ και $\mu \in M_r(K)$, έχουμε $\mu \geq 0 \implies \mu_g \geq 0$ και $\mu_g(K) = \mu(g \cdot K) = \mu(K) = 1$, αφού $g \cdot K = K$ και άρα $\pi^*(g)(T\mu) = T\mu_g \in B$, για κάθε $T\mu \in B$.
Συνεπώς, επειδή η G είναι amenable, απ' το Θεώρημα 1.3.4 έπεται ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο για την $\pi^*(G)$ στο B, δηλαδή υπάρχει κανονικό Borel-μέτρο πιθανότητας μ στον K, ώστε:

$$\pi^*(g)(T\mu) = T\mu\ , \qquad \forall g \in G.$$

Επομένως:

$$T\mu_g = T\mu\ , \quad \forall g \in G$$

και επειδή η T είναι 1-1, έπεται:

$$\mu_g = \mu \ , \qquad \forall g \in G$$

δηλαδή $\mu(g \cdot E) = \mu(E)$, για κάθε $g \in G$ και κάθε Borel-υποσύνολο E της G.

($\Leftarrow$): Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε συνεχή δράση της G σε ένα συμπαγή χώρο Hausdorff K, υπάρχει ένα G-αναλλοίωτο κανονικό Borel-μέτρο πιθανότητας στον K.
Η $C_{bu}(G)$ είναι, όπως έχουμε δει, μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επομένως, το φάσμα της $C_{bu}(G)$, έστω Ω, με την w^*-τοπολογία είναι συμπαγής Hausdorff χώρος. Επίσης, η απεικόνιση Gelfand $C_{bu}(G) \to C(\Omega) : f \mapsto \hat{f}$, όπου $\hat{f}(\tau) := \tau(f)$, για $\tau \in \Omega$, είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός (βλ. [11, Theorem (Gelfand) 2.1.10]).
Ορίζουμε απεικόνιση $\delta \colon G \times \Omega \to \Omega : (g, \tau) \mapsto g \cdot \tau$, με $(g \cdot \tau)(f) := \tau(\lambda_{g^{-1}} f)$, για κάθε $f \in C_{bu}(G)$, όπου λ είναι η αριστερή δράση της G στην $C_{bu}(G)$. Παρατηρούμε ότι η δ είναι συνεχής δράση της G στο Ω. Πράγματι, για $\tau \in \Omega$ και $g, h \in G$ έχουμε:

$$(e \cdot \tau)(f) = \tau(\lambda_e f) = \tau(f) \ , \quad \forall f \in C_{bu}(G)$$

άρα $e \cdot \tau = \tau$ και επίσης:

$$\begin{aligned} [g \cdot (h \cdot \tau)](f) &= (h \cdot \tau)(\lambda_{g^{-1}} f) = \tau(\lambda_{h^{-1}g^{-1}} f) \\ &= \tau(\lambda_{(gh)^{-1}} f) = [(gh) \cdot \tau](f) \ , \quad \forall f \in C_{bu}(G) \end{aligned}$$

δηλαδή $g \cdot (h \cdot \tau) = (gh) \cdot \tau$. Επομένως, η δ είναι δράση. Θα δείξουμε ότι είναι και συνεχής.
Έστω δύο δίκτυα $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ και $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ στους χώρους G και Ω αντιστοίχως με $g_\gamma \longrightarrow g \in G$ και $\tau_\gamma \xrightarrow{w^*} \tau \in \Omega$. Θα δείξουμε ότι $g_\gamma \cdot \tau_\gamma \xrightarrow{w^*} g \cdot \tau$. Πράγματι, για κάθε $f \in C_{bu}(G)$ και κάθε $\gamma \in \Gamma$, έχουμε:

$$\begin{aligned} |(g_\gamma \cdot \tau_\gamma)(f) - (g \cdot \tau)(f)| &= \left| \tau_\gamma \left(\lambda_{g_\gamma^{-1}} f \right) - \tau \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) \right| \\ \leq \left| \tau_\gamma \left(\lambda_{g_\gamma^{-1}} f \right) - \tau_\gamma \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) \right| &+ \left| \tau_\gamma \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) - \tau \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) \right| \\ \leq \|\tau_\gamma\| \left\| \lambda_{g_\gamma^{-1}} f - \lambda_{g^{-1}} f \right\|_\infty &+ \left| \tau_\gamma \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) - \tau \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) \right| \\ = \left\| \lambda_{g g_\gamma^{-1}} f - f \right\|_\infty &+ \left| \tau_\gamma \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) - \tau \left(\lambda_{g^{-1}} f \right) \right| . \end{aligned}$$

Επειδή $g g_\gamma \longrightarrow e$ και επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, έπεται ότι:

$$\left\| \lambda_{g g_\gamma^{-1}} f - f \right\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Επιπλέον, εφ' όσον $\tau_\gamma \xrightarrow{w^*} \tau$, έπεται ότι:

$$|\tau_\gamma(\lambda_{g^{-1}}f) - \tau(\lambda_{g^{-1}}f)| \longrightarrow 0$$

και άρα $|(g_\gamma \cdot \tau_\gamma)(f) - (g \cdot \tau)(f)| \longrightarrow 0$, για κάθε $f \in C_{bu}(G)$, δηλαδή

$$g_\gamma \cdot \tau_\gamma \xrightarrow{w^*} g \cdot \tau$$

που σημαίνει ότι η δράση που έχουμε ορίσει είναι συνεχής.
Έτσι, απ' την υπόθεση, προκύπτει ότι υπάρχει κανονικό Borel-μέτρο πιθανότητας μ στο Ω, ώστε $\mu(E) = \mu(g \cdot E)$, για κάθε $g \in G$ και κάθε Borel-υποσύνολο E της G, δηλαδή $\mu = \mu_g$, για κάθε $g \in G$.
Ορίζουμε $m \colon C_{bu}(G) \to \mathbb{C}$, ως εξής:

$$m(f) := \int_\Omega \hat{f} d\mu \ , \quad \forall f \in C_{bu}(G).$$

Παρατηρούμε ότι το m είναι αριστερά αναλλοίωτος μέσος. Πράγματι, προφανώς η m είναι γραμμική και επιπλέον:

$$m(\mathbf{1}_G) = \int_\Omega \widehat{\mathbf{1}_G} d\mu = \int_\Omega d\mu = \mu(\Omega) = 1.$$

Επίσης, $m \geq 0$, διότι αν $f \in C_{bu}(G)$ με $f \geq 0$, τότε $\hat{f} \geq 0$ και άρα $m(f) = \int_\Omega \hat{f} d\mu \geq 0$.
Τέλος, το m είναι αριστερά αναλλοίωτο, αφού για κάθε $f \in C_{bu}(G)$ και $g \in G$ έχουμε:

$$m(\lambda_g f) = \int_\Omega \widehat{(\lambda_g f)}(\tau) d\mu(\tau) = \int_\Omega \tau(\lambda_g f) d\mu(\tau)$$

$$= \int_\Omega (g^{-1} \cdot \tau)(f) d\mu(\tau) = \int_\Omega \hat{f}(g^{-1} \cdot \tau) d\mu(\tau) = \int_\Omega \hat{f}(\tau) d\mu(g \cdot \tau)$$

$$= \int_\Omega \hat{f}(\tau) d\mu_g(\tau) = \int_\Omega \hat{f}(\tau) d\mu(\tau) = m(f)$$

Άρα, απ' την Πρόταση 1.2.8, η G είναι amenable.

□

Λήμμα 1.6.6. Έστω $P_1 := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ η συμπαγοποίηση κατά ένα σημείο του $\mathbb{R}$ και $C(P_1)$ ο χώρος Banach των συνεχών μιγαδικών συναστήσεων του P_1, με την supremum-νόρμα. Ορίζουμε $\delta \colon SL_2(\mathbb{R}) \times P_1 \to P_1 : (g, x) \mapsto g \cdot x$ ως:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \frac{a}{c}$$

με την σύμβαση ότι $\dfrac{a}{0} = \infty$, για $a \neq 0$ και $\dfrac{a}{\infty} := 0$ για $a \in \mathbb{R}$. Τότε, η δ είναι μια συνεχής δράση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον P_1 και η $\pi\colon SL_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(C(P_1))$ με:

$$(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x), \quad \text{για } g \in SL_2(\mathbb{R}),\ f \in C(P_1),\ x \in P_1$$

είναι μια συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον $C(P_1)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η δ είναι καλά ορισμένη, διότι αν $ad - bc = 1$, τότε κανένα από τα κλάσματα $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \in \mathbb{R}$, και $\dfrac{a}{c}$ δεν είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$. Επίσης, με πράξεις ρουτίνας, εύκολα προκύπτει ότι η δ είναι δράση, δηλαδή $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ και $I \cdot x = x$, για κάθε $g, g_1, g_2 \in SL_2(\mathbb{R})$ και $x \in P_1$, όπου I είναι ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας.

α) Η δράση δ είναι συνεχής:
Πράγματι, ας θεωρήσουμε δίκτυα $(x_k)_{k \in K}$ και $\left\{ \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \right\}_{k \in K}$ στον P_1 και την $SL_2(\mathbb{R})$ αντιστοίχως, με:

$$x_k \longrightarrow x \in P_1 \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
1) Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $k_0 \in K$, ώστε $x_k \in \mathbb{R}$, για κάθε $k \geq k_0$. Οπότε, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \cdot x_k = \frac{a_k x_k + b_k}{c_k x_k + d_k} \qquad (\forall k \geq k_0)$$

και άρα

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \cdot x_k \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x$$

2) Αν $x = \infty$, τότε, επειδή το $P_1 \setminus [-1, 1]$ είναι ανοικτή περιοχή του ∞, έπεται ότι υπάρχει $k_1 \in K$, ώστε $x_k \in P_1 \setminus [-1, 1]$, για κάθε $k \geq k_1$ και άρα $x_k \neq 0$, $\forall k \geq k_1$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Πάλι, όπως πριν, υπάρχει $k_2 \in K$, ώστε για κάθε $k \geq k_2$ να ισχύει $x_k \notin \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$, άρα επιλέγοντας $k_0 \in K$ με $k \geq k_i$, για $i = 1, 2$, παίρνουμε:

$$\left| \frac{1}{x_k} \right| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

δηλαδή: $\left(\dfrac{1}{x_k}\right)_{k\geq k_1} \longrightarrow 0$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \cdot x_k = \begin{cases} \dfrac{a_k + b_k \dfrac{1}{x_k}}{c_k + d_k \dfrac{1}{x_k}}, \text{ για } x_k \in \mathbb{R} \\ \\ \dfrac{a_k}{c_k}, \text{ για } x_k = \infty \end{cases} \quad , \qquad \forall k \geq k_1$$

άρα $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \cdot x_k \longrightarrow \dfrac{a}{c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x.$

β) Το ότι η π είναι συνεχής ισομετρική αναπαράσταση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον $C(P_1)$ έπεται απ' το Λήμμα 1.6.4.

□

Πρόταση 1.6.7. Η $SL_2(\mathbb{R})$ δεν είναι amenable.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $SL_2(\mathbb{R})$ είναι amenable. Θεωρούμε την δράση $\delta\colon SL_2(\mathbb{R}) \times P_1 \to P_1 : (g,x) \mapsto g \cdot x$ του Λήμματος 1.6.6, η οποία είνα συνεχής. Απ' το Θεώρημα 1.6.5 έπεται ότι υπάρχει κανονικό Borel-μέτρο πιθανότητας μ στον P_1, ώστε:

$$\mu_g = \mu \ , \qquad \forall g \in SL_2(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

όπου $\mu_g(E) := \mu(g \cdot E)$, για $g \in SL_2(\mathbb{R})$ και $E \subset P_1$ Borel-μετρήσιμο.
Για $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$, έχουμε $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = x + b$ και $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \infty = \infty$.
Άρα, εφαρμόζοντας την (1), για κάθε $E \subset P_1$ Borel-μετρήσιμο με $\infty \in E$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu_g(E) = \mu_g(E \setminus \{\infty\}) + \mu_g(\{\infty\}) \\ &= \mu((E \setminus \{\infty\}) + b) + \mu(\{\infty\}) \end{aligned}$$

ενώ για $E \subset P_1$ Borel-μετρήσιμο με $\infty \notin E$, έχουμε:

$$\mu(E) = \mu_g(E) = \mu(E + b).$$

Επομένως, απ' την μοναδικότητα του μέτρου Lebesgue ως προς το αναλλοίωτο των μεταθέσεων (βλ. [10, Θεώρημα 4.9, σελ. 41]), έχουμε ότι υπάρχουν (θετικές) σταθερές c_1 και c_2, ώστε:

$$\mu = c_1 m + c_2 \delta_\infty$$

όπου m το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και δ_∞ το μέτρο Dirac στο σημείο ∞, δηλαδή, για κάθε Borel-μετρήσιμο $E \subset P_1$, έχουμε:

$$\mu(E) = c_1 m(E \setminus \{\infty\}) + c_2 \delta_\infty(E).$$

Για $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, με $a > 0$, και $E \subset \mathbb{R}$ Borel-μετρήσιμο έχουμε $g \cdot x = a^2 x$, για $x \in \mathbb{R}$, επομένως, πάλι από την (1), παίρνουμε:

$$c_1 m(E) = \mu(E) = \mu(g \cdot E) = \mu(a^2 E) = c_1 m(a^2 E) = c_1 a^2 m(E)$$

και άρα $c_1 = 0$, δηλαδή $\mu = c_2 \delta_\infty$. Όμως, $\mu(P_1) = 1$ και $\delta_\infty(P_1) = 1$, άρα πρέπει $c_2 = 1$, οπότε $\mu = \delta_\infty$. Απ' την άλλη μεριά, αν πάρουμε $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, τότε $g \cdot \infty = \dfrac{0}{1} = 0$ και επομένως:

$$0 = \delta_\infty(\{0\}) = \mu(\{0\}) = \mu(g \cdot \{\infty\}) \stackrel{(1)}{=} \mu(\{\infty\}) = \delta_\infty(\{\infty\}) = 1$$

και έτσι προκύπτει άτοπο.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Amenability και η ιδιότητα προσέγγισης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την απόδειξη ενός άλλου χαρακτηρισμού της amenability και συγκεκριμένα με τον χαρακτηρισμό αυτής μέσω μιας ιδιότητας προσέγγισης (approximation property). Ειδικότερα, θα δούμε ότι μια ομάδα G είναι amenable αν και μόνον αν η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της G από συνεχείς συναρτήσεις της μορφής $f * \tilde{f}$, όπου $f \in L^2(G)$, $\|f\|_2 = 1$ και $\tilde{f}(x) := \overline{f(x^{-1})}$, $x \in G$.

Αργότερα, που θα μελετήσουμε την C^*-άλγεβρα μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή για να δείξουμε ότι μια ομάδα είναι amenable αν και μόνον αν η αριστερή κανονική αναπαράσταση της αντίστοιχης C^*-άλγεβρας είναι εμφύτευση, δηλαδή 1-1.

2.1 Η ιδιότητα P_1 του Reiter

Πρώτα δίνουμε κάποιους ορισμούς, για οικονομία στις διατυπώσεις:

Ορισμός 2.1.1. Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και μ ένα μέτρο Haar της G. Ορίζουμε:

$$L^1(G)_{+1} := \left\{ f \in L^1(G) : \ f \geq 0 \ , \ \int_G f d\mu = 1 \right\}$$

Ορισμός 2.1.2 (Ιδιότητα P_1 του Reiter)**.** Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Λέμε ότι η G έχει την ιδιότητα P_1 αν για κάθε συμπαγές $K \subset G$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $f \in L^1(G)_{+1}$, ώστε:

$$\|\lambda_s f - f\|_1 < \varepsilon \ , \qquad \forall s \in K.$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε πρώτα ότι μια τοπικά συμπαγής ομάδα είναι amenable αν και μόνον αν έχει την ιδιότητα P_1 και κατόπιν ότι η τελευταία είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα προσέγγισης που περιγράψαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου.

Παρατήρηση 2.1.3. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα με μέτρο Haar μ. Όπως γνωρίζουμε, ο δυϊκός χώρος Banach του $L^1(G)$ είναι ισομετρικά γραμμικά ισόμορφος με τον $L^\infty(G)$ μέσω του ισομετρικού γραμμικού ισομορφισμού:

$$T\colon L^\infty(G) \to L^1(G)^*$$

$$\text{με} \quad (T\phi)(f) = \int_G f\phi d\mu \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Έτσι, ο $L^1(G)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L^\infty(G)^*$ μέσω της σύνθεσης:

$$T^* \circ \tau\colon L^1(G) \to L^\infty(G)^*$$

όπου T^* ο συζυγής τελεστής του T και $\tau\colon L^1(G) \to L^1(G)^{**}$ η κανονική εμφύτευση του $L^1(G)$ στον δεύτερο δυϊκό του, δηλαδή $\tau(f)(\xi^*) = \xi^*(f)$, για κάθε $f \in L^1(G)$ και $\xi^* \in L^1(G)^*$.
Για $f \in L^1(G)$ και $\phi \in L^\infty(G)$, υπολογίζουμε:

$$(T^* \circ \tau)(f)(\phi) = (\tau(f) \circ T)(\phi) = \tau(f)(T\phi) = (T\phi)(f) = \int_G f\phi d\mu$$

Επομένως, ορίζοντας:

$$\langle \phi, f\rangle := \int_G f\phi d\mu \ , \text{για } f \in L^1(G) \text{ και } \phi \in L^\infty(G)$$

παρατηρούμε ότι κάθε $f \in L^1(G)$ ορίζει ένα $m_f \in L^\infty(G)^*$ με $m_f(\phi) = \langle \phi, f\rangle$, για $\phi \in L^\infty(G)$, δηλαδή $m_f := (T^* \circ \tau)(f)$.
Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε τον $L^1(G)$ ως υπόχωρο του $L^\infty(G)^*$, πράγμα το οποίο θα φανεί αρκετά χρήσιμο στα επόμενα.

Λήμμα 2.1.4. Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα με μέτρο Haar μ. Τότε, το σύνολο $L^1(G)_{+1}$ είναι w^*-πυκνό υποσύνολο του συνόλου των states του $L^\infty(G)$. Δηλαδή, για κάθε state m του $L^\infty(G)$, υπάρχει ένα δίκτυο $(f_a)_{a\in A}$ στο $L^1(G)_{+1}$, ώστε:

$$m(\phi) = \lim_a \langle \phi, f_a\rangle = \lim_a \int_G \phi f_a d\mu \ , \qquad \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην Παρατήρηση 2.1.3, κάθε $f \in L^1(G)_{+1}$ ορίζει ένα $m_f \in L^\infty(G)^*$ με $m_f(\phi) = \langle \phi, f \rangle$, για $\phi \in L^\infty(G)$. Επομένως, $\|m_f\| = \|f\|_1 = 1$ και $m_f(\phi) \geq 0$, για $\phi \geq 0$, επειδή $f \geq 0$ και το μέτρο Haar είναι θετικό. Δηλαδή, το $A := \{m_f : f \in L^1(G)_{+1}\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου S των states του $L^\infty(G)$. Επειδή το $L^1(G)_{+1}$ είναι κυρτό, το ίδιο ισχύει και για το A. Επίσης, το S είναι κυρτό και w^*-συμπαγές (θεώρημα Αλάογλου), άρα και w^*-κλειστό υποσύνολο του $L^\infty(G)^*$. Επομένως, η w^*-κλειστή θήκη $cl_{w^*}A$ του A είναι κυρτό w^*-κλειστό υποσύνολο του S. Θα δείξουμε ότι $cl_{w^*}A = S$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $m \in S$, ώστε $m \notin cl_{w^*}A$. Τότε, απ' το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, έπεται ότι υπάρχει ένα w^*-συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^\infty(G)^*$, δηλαδή ένα $\phi_0 \in L^\infty(G)$, καθώς και $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\mathrm{Re}(m_f(\phi_0)) \leq a < b \leq \mathrm{Re}(m(\phi_0)) \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1}$$

και επειδή τα m, m_f είναι θετικά γραμμικά συναρτησοειδή, προκύπτει ότι:

$$m_f(\mathrm{Re}\phi_0) \leq a < b \leq m(\mathrm{Re}\phi_0) \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1}.$$

Θέτουμε $\phi := \mathrm{Re}\phi_0 + \|\phi_0\|_\infty \cdot \mathbf{1}_G$. Τότε, $\phi \geq 0$, διότι $|\phi_0(x)| \leq \|\phi_0\|_\infty$ τοπικά μ-σχεδόν παντού, και άρα $-\|\phi_0\|_\infty \leq \mathrm{Re}\phi_0(x) \leq \|\phi_0\|_\infty$ τοπικά μ-σχεδόν παντού. Επομένως, απ' την θετικότητα των m, m_f και την προηγούμενη ανισότητα έπεται:

$$0 \leq m_f(\phi) \leq a' < b' \leq m(\phi) \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1} \qquad (1)$$

όπου $a' := a + \|\phi_0\|_\infty$ και $b' := b + \|\phi_0\|_\infty$. Ακόμη, έχουμε $m(\phi) \leq \|m\| \|\phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty$, διότι $\|m\| = 1$. Συνεπώς, από την (1) προκύπτει ότι:

$$0 \leq m_f(\phi) \leq a' < b' \leq \|\phi\|_\infty \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1} \qquad (2)$$

Έστω $\varepsilon := \dfrac{b' - a'}{2} > 0$. Τότε, από την (2) έχουμε:

$$m_f(\phi) < \|\phi\|_\infty - \varepsilon \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1} \qquad (3)$$

Όμως, απ' τον ορισμό της νόρμας ουσιώδες supremum, έπεται ότι υπάρχει συμπαγές $K \subset G$, ώστε:

$$\mu(C \cap K) > 0,$$

όπου:

$$C := \left\{ x \in G : \phi(x) > \|\phi\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Αν, λοιπόν, πάρουμε $f := \dfrac{1}{\mu(C\cap K)}\chi_{C\cap K}$, τότε $f \in L^1(G)_{+1}$ (αφού $0 < \mu(C\cap K) \leq \mu(K) < \infty$) και, με βάση την σχέση (3) και τον ορισμό του C, έπεται:

$$\|\phi\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\mu(C\cap K)}\int_{C\cap K}\phi d\mu = \langle \phi, f\rangle = m_f(\phi) \leq \|\phi\|_\infty - \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\ \varepsilon \leq \varepsilon/2$$

και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Λήμμα 2.1.5. Έστω G μια amenable ομάδα. Τότε, υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $\tilde{m}$ στον $L^\infty(G)$ ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\tilde{m}(f*\phi) = \tilde{m}(\phi)\ ,\quad \forall f \in L^1(G)_{+1},\ \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με μ το μέτρο Haar της G. Εφ' όσον η G είναι amenable, υπάρχει αριστερά αναλλοίωτος μέσος $m\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$. Θα δείξουμε το ζητούμενο σε τρία βήματα:

Βήμα 1: Δείχνουμε πρώτα ότι $m(f*\psi) = m(\psi)$, για κάθε $\psi \in C_{blu}(G)$ και $f \in L^1(G)_{+1}$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $\psi \in C_{blu}(G)$ η απεικόνιση $G \to C_{blu}(G) : x \mapsto \lambda_x\psi$ είναι συνεχής και φραγμένη. Επομένως, για κάθε $f \in L^1(G)_{+1}$, το διανυσματικό ολοκλήρωμα (για την έννοια του διανυσματικού ολοκληρώματος βλ. [7, Appendix 4]):

$$f*\psi = \int_G f(x)\lambda_x\psi d\mu(x)$$

υπάρχει ως στοιχείο του $C_{blu}(G)$ (βλ. και Λήμμα 1.2.7 (β)). Έτσι, επειδή το m περιορισμένο στον $C_{blu}(G) \subset L^\infty(G)$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, μετατίθεται με το ολοκλήρωμα, και άρα έχουμε:

$$m(f*\psi) = m\left(\int_G f(x)\lambda_x\psi\right)d\mu(x) = \int_G m(f(x)\lambda_x\psi)d\mu(x)$$

$$= \int_G f(x)m(\lambda_x\psi)d\mu(x) = \int_G f(x)m(\psi)d\mu(x)$$

$$= m(\psi)\int_G f(x)d\mu(x) = m(\psi)\cdot 1 = m(\psi)$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.
Βήμα 2: Ισχύει $m(f_1 * \phi) = m(f_2 * \phi)$, για κάθε $f_1, f_2 \in L^1(G)_{+1}$ και $\phi \in L^\infty(G)$.
Έστω $(u_a)_{a\in A}$ μια προσεγγιστική μονάδα της $*$-άλγεβρας Banach $L^1(G)$, δηλαδή ένα δίκτυο συναρτήσεων της $L^1(G)$ με: $u_a \geq 0$, $\|u_a\|_1 = 1$, για κάθε $a \in A$ και $\lim_a \|f * u_a - f\|_1 = 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$.
Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε $f \in L^1(G)_{+1}$ και $\phi \in L^\infty(G)$, θα έχουμε:

$$\|f * \phi - f * u_a * \phi\|_\infty \leq \|f - f * u_a\|_1 \cdot \|\phi\|_\infty \longrightarrow 0$$

και άρα, απ' την συνέχεια του m και το γεγονός ότι $f*\phi,\ f*u_a*\phi \in C_{blu}(G) \subset L^\infty(G)$ (βλ. Λήμμα 1.2.7 (β)), έπεται ότι:

$$m(f * \phi) = \lim_a m(f * u_a * \phi)$$

όμως, $u_a * \phi \in C_{blu}(G)$, πάλι απ' το Λήμμα 1.2.7 (β) και άρα, απ' το Βήμα 1, $m(f * u_a * \phi \in) = m(u_a * \phi)$, για κάθε $a \in A$. Επομένως, έχουμε:

$$m(f * \phi) = \lim_a m(u_a * \phi)\ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1}.$$

Έτσι, επειδή το δεξί μέλος στην τελευταία ισότητα δεν εξαρτάται από την f, προκύπτει το ζητούμενο.
Βήμα 3: Σταθεροποιούμε μια $h \in L^1(G)_{+1}$ και ορίζουμε $\tilde{m}\colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ με $\tilde{m}(\phi) := m(h * \phi)$. Ισχυριζόμαστε ότι το $\tilde{m}$ είναι το ζητούμενο αριστερά αναλλοίωτος μέσος του $L^\infty(G)$.
Πράγματι, η $\tilde{m}$ είναι καλά ορισμένη (απ' το Λήμμα 1.2.7 (β)), γραμμική και φραγμένη. Επίσης, αν $\phi \geq 0$, τότε $h * \phi \geq 0$ και άρα $\tilde{m}(\phi) = m(h * \phi) \geq 0$, και $\tilde{m}(\mathbf{1}_G) = m(h * \mathbf{1}_G) = m(\mathbf{1}_G) = 1$, αφού: $(h * \mathbf{1}_G)(x) = \int h(y)d\mu(y) = 1$, για $x \in G$.
Επιπλέον, για κάθε $f \in L^1(G)_{+1}$ και $\phi \in L^\infty(G)$, έχουμε $f * \phi \in C_{blu}(G)$ και άρα απ' το Βήμα 1 έχουμε: $\tilde{m}(f * \phi) = m(h * f * \phi) = m(f * \phi)$. Απ' το Βήμα 2, όμως, έπεται $m(f * \phi) = m(h * \phi)$ και άρα $\tilde{m}(f * \phi) = m(h * \phi) = \tilde{m}(\phi)$.
Τέλος, το $\tilde{m}$ είναι αριστερά αναλλοίωτο, διότι για κάθε $s \in G$, έχουμε:

$$\tilde{m}(\lambda_s\phi) = m(h * (\lambda_s\phi)) = m((\rho_s h) * \phi)$$

όπου $(\rho_s f)(x) := f(xs^{-1})\Delta_G(s^{-1})$, για $f \in L^1(G)$ και $s, x \in G$.
Αλλά, παρατηρούμε ότι $\rho_s h \geq 0$, διότι $h \geq 0$, και

$$\int_G \rho_s h(x)d\mu(x) = \int_G h(xs^{-1})\Delta_G(s^{-1})d\mu(x) = \int_G h(x)\Delta_G(s^{-1})d\mu(xs)$$

$$= \int_G h(x)d\mu(x) = 1$$

δηλαδή, $\rho_s h \in L^1(G)_{+1}$ και επομένως, απ' το Βήμα 2, έχουμε $m((\rho_s h) * \phi) = m(h * \phi) = \tilde{m}(\phi)$ και άρα $\tilde{m}(\lambda_s \phi) = \tilde{m}(\phi)$.

$\square$

Πρόταση 2.1.6. Για μια τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η G είναι amenable.

(β) Υπάρχει ένα δίκτυο $(f_a)_{a\in A}$ στο $L^1(G)_{+1}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $f \in L^1(G)_{+1}$ και κάθε $\phi \in L^\infty(G)$ να ισχύει:

$$\lim_a \langle \phi, f * f_a - f_a \rangle = 0$$

(όπου $\langle \phi, f \rangle := \int \phi f$, για $\phi \in L^\infty(G)$ και $f \in L^1(G)$ - βλ. και Παρατήρηση 2.1.3).

(γ) Υπάρχει ένα δίκτυο $(f_a)_{a\in A}$ στο $L^1(G)_{+1}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $f \in L^1(G)_{+1}$ να ισχύει:

$$\lim_a \|f * f_a - f_a\|_1 = 0.$$

(δ) Η G έχει την ιδιότητα P_1. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $K \subset G$ συμπαγές, υπάρχει $f \in L^1(G)_{+1}$, ώστε $\|\lambda_s f - f\|_1 < \varepsilon$, για κάθε $s \in K$. Επιπλέον, η f μπορεί να επιλεγεί συνεχής και με συμπαγή φορέα.

Απόδειξη. (α)$\Rightarrow$(β): Υποθέτουμε ότι η G είναι amenable. Απ' το Λήμμα 2.1.5 υπάρχει ένας αριστερά αναλλοίωτος μέσος m στον $L^\infty(G)$, για τον οποίο επιπλέον ισχύει:

$$m(f * \phi) = m(\phi) \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1},\ \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Επίσης, απ' το Λήμμα 2.1.4, υπάρχει δίκτυο $(f_a)_{a\in A}$ στο $L^1(G)_{+1}$ τέτοιο, ώστε:

$$\lim_a \langle \phi, f_a \rangle = m(\phi) \ , \quad \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Ισχυρισμός: Για κάθε $\phi \in L^\infty(G)$ και $f, g \in L^1(G)_{+1}$, ισχύει:

$$\langle \phi, f * g \rangle = \langle \bar{f}^* * \phi, g \rangle.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μέτρου Haar και το θεώρημα Fubini, υπολογίζουμε:

$$\langle \phi, f * g \rangle = \int_G \phi(x)(f * g)(x)dx = \int_G \phi(x) \left(\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy \right) dx$$

$$= \int_G \phi(x) \left(\int_G \bar{f}^*(y^{-1}) \Delta_G(y^{-1}) g(y^{-1}x) dy \right) dx$$

$$= \int_G \phi(x) \left(\int_G \bar{f}^*(y) g(yx) dy \right) dx = \iint_{G\times G} \phi(x) \bar{f}^*(y) g(yx) dy dx$$

$$= \int_G \left(\int_G \phi(x) \bar{f}^*(y) g(yx) dx \right) dy = \int_G \left(\int_G \phi(y^{-1}w) \bar{f}^*(y) g(w) dw \right) dy$$

$$= \int_G g(w) \left(\int_G \phi(y^{-1}w) \bar{f}^*(y) dy \right) dw = \int_G g(w) (\bar{f}^* * \phi)(w) dw$$

$$= \langle \bar{f}^* * \phi, g \rangle.$$

Έτσι, για $f \in L^1(G)_{+1}$ και $\phi \in L^\infty(G)$, έχουμε:

$$\langle \phi, f * f_a \rangle = \langle \bar{f}^* * \phi, f_a \rangle \longrightarrow m(\bar{f}^* * \phi) = m(\phi)$$

(για την τελευταία ισότητα αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι $\bar{f}^* \in L^1(G)_{+1} \iff f \in L^1(G)_{+1}$).
Επίσης, έχουμε:

$$\langle \phi, f_a \rangle \longrightarrow m(\phi).$$

Επομένως:

$$\langle \phi, f * f_a - f_a \rangle = \langle \phi, f * f_a \rangle - \langle \phi, f_a \rangle \longrightarrow m(\phi) - m(\phi) = 0.$$

(β)$\Rightarrow$(γ): Έστω $(f_a)_{a\in A}$ ένα δίκτυο στο $L^1(G)_{+1}$, το οποίο ικανονποιεί την υπόθεση (β). Θα δείξουμε ότι:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $F \subset L^1(G)_{+1}$ πεπερασμένο, υπάρχει $f_{(F,\varepsilon)} \in L^1(G)_{+1}$, ώστε:

$$\|f * f_{(F,\varepsilon)} - f_{(F,\varepsilon)}\|_1 < \varepsilon \ , \quad \forall f \in F.$$

Τότε, ορίζοντας $B := \{(F,\varepsilon) : \varepsilon > 0, \ F \subset L^1(G)_{+1} \text{ πεπερασμένο}\}$ και $(F_1,\varepsilon_1) \leq (F_2,\varepsilon_2) \Leftrightarrow F_1 \subset F_2$ και $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, έχουμε ότι το $(B,\leq)$ είναι κατευθυνόμενο και για το δίκτυο $(f_b)_{b\in B}$ του $L^1(G)_{+1}$ έπεται άμεσα ότι:

$$\lim_{b\in B} \|f * f_b - f_b\|_1 = 0 \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1}.$$

Έστω, λοιπόν, $F := \{f_1, \ldots, f_n\} \subset L^1(G)_{+1}$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τον χώρο Banach:

$$E := L^1(G) \times \ldots \times L^1(G) \ , \qquad \|(g_1, \ldots, g_n)\|_E := \sum_{i=1}^n \|g_i\|_1$$

καθώς και το υποσύνολο του E:

$$C := \{(f_1 * f - f, \ldots, f_n * f - f) : \ f \in L^1(G)_{+1}\}$$

το οποίο, όπως εύκολα βλέπουμε, είναι κυρτό. Επειδή ο δυϊκός χώρος Banach του $L^1(G)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(G)$, από την Παρατήρηση 2.1.3, προκύπτει ότι ο E^* ταυτίζεται ισομετρικά με το γινόμενο n το πλήθος αντιτύπων του $L^\infty(G)$:

$$E^* = L^\infty(G) \times \ldots \times L^\infty(G) \ , \qquad \|(\phi_1, \ldots, \phi_n)\|_{E^*} := \sup_{1 \le i \le n} \|\phi_i\|_\infty$$

ενώ ο δυϊσμός αυτός περιγράφεται από την σχέση:

$$\langle(\phi_1, \ldots, \phi_n), (g_1, \ldots, g_n)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, g_i \rangle$$

για $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in E^*$ και $(g_1, \ldots, g_n) \in E$.
Έτσι, από την υπόθεση (β), για τα $f_1, \ldots, f_n$ που επιλέξαμε στην αρχή και για τυχούσα n-άδα $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in E^*$, έχουμε:

$$\langle(\phi_1, \ldots, \phi_n), (f_1 * f_a - f_a, \ldots, f_n * f_a - f_a)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, f_i * f_a - f_a \rangle \longrightarrow 0$$

Άρα, προκύπτει ότι $0_E \in cl_w C$. Όμως, απ' το Θεώρημα Mazur (βλ. [12, Πόρισμα 14.36]), έχουμε ότι $cl_w C = cl_{\|\cdot\|_E} C$, εφ' όσον το C είναι κυρτό. Συνεπώς, $0_E \in cl_{\|\cdot\|_E} C$, απ' το οποίο προκύπτει ότι, για το $\varepsilon > 0$ που έχουμε θεωρήσει, υπάρχει μια $f = f_{(F,\varepsilon)} \in L^1(G)_{+1}$, ώστε:

$$\sum_{i=1}^n \|f_i * f - f\|_1 = \|(f_1 * f - f, \ldots, f_n * f - f)\|_1 < \varepsilon$$

και άρα $\|f_i * f - f\|_1 < \varepsilon$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
(γ)⇒(δ): Από την υπόθεση (γ), παίρνουμε ένα δίκτυο $(f_a)_{a \in A}$ στο $L^1(G)_{+1}$ με:

$$\|f * f_a - f_a\|_1 \longrightarrow 0 \ , \quad \forall f \in L^1(G)_{+1} \qquad (1)$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $K \subset G$ συμπαγές. Σταθεροποιούμε μια $f \in L^1(G)_{+1}$. Τότε, η απεικόνιση $G \to L^1(G)$ με $s \mapsto \lambda_s f$ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της G και την νόρμα του $L^1(G)$ (βλ. Πρόταση 1.2.6 (β)), επομένως η εικόνα του K μέσω αυτής της απεικόνισης, δηλαδή το σύνολο:

$$C := \{\lambda_s f : \ s \in K\} \subset L^1(G)$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^1(G)$ και το $\{B_{\|\cdot\|_1}(\lambda_s f, \varepsilon/3) : \ s \in K\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του C. Επομένως, υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in K$, ώστε:

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\|\cdot\|_1}(\lambda_{s_i} f, \varepsilon/3)$$

και άρα

$$\min_{1 \leq i \leq n} \|\lambda_s f - \lambda_{s_i} f\|_1 < \varepsilon/3 \ , \quad \forall s \in K \qquad (2)$$

Από την (1) μπορούμε να επιλέξουμε ένα $a \in A$ τέτοιο, ώστε:

$$\|f * f_a - f_a\|_1 < \varepsilon/3 \ \text{ και } \ \|(\lambda_{s_i} f) * f_a - f_a\|_1 < \varepsilon/3 \ , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Έτσι, για ένα αυθαίρετο $s \in K$, απ' την (2) μπορούμε να επιλέξουμε ένα $i \in \{1, \ldots, n\}$ με $\|\lambda_s f - \lambda_{s_i} f\|_1 < \varepsilon/3$ και επομένως θα έχουμε:

$$\|\lambda_s(f * f_a) - f * f_a\|_1 = \|(\lambda_s f) * f_a - f * f_a\|_1$$

$$\leq \|(\lambda_s f) * f_a - (\lambda_{s_i} f) * f_a\|_1 + \|(\lambda_{s_i} f) * f_a - f_a\|_1 + \|f_a - f * f_a\|_1$$
$$\leq \|\lambda_s f - \lambda_{s_i} f\|_1 \|f_a\|_1 + \|(\lambda_{s_i} f) * f_a - f_a\|_1 + \|f_a - f * f_a\|_1$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η $f * f_a \in L^1(G)_{+1}$ ικανονποιεί το ζητούμενο. Επίσης, επειδή ο $C_c(G)$ είναι πυκνός στον $L^1(G)$, έπεται άμεσα ότι και το $C_c(G)_{+1}$, δηλαδή το σύνολο των θετικών συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και ολοκλήρωμα 1, είναι πυκνό στο $L^1(G)_{+1}$. Άρα, στην θέση της $f * f_a$ μπορούμε να θεωρήσουμε μια θετική συνεχή με συμπαγή φορέα και ολοκλήρωμα 1.
(δ)⇒(α): Υποθέτουμε ότι η G έχει την ιδιότητα P_1. Τότε, ορίζοντας $\Gamma := \{(K, \varepsilon) : \varepsilon > 0, \ K \subset G \text{ συμπαγές}\}$ και $(K_1, \varepsilon_1) \leq (K_2, \varepsilon_2)$ αν και μόνον αν $K_1 \subset K_2$ και $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, έχουμε ότι το $(\Gamma, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και, απ' την ιδιότητα P_1, μπορούμε να βρούμε δίκτυο $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ στο $L^1(G)_{+1}$, ώστε:

$$\lim_{\gamma \in \Gamma} \|\lambda_s f_\gamma - f_\gamma\|_1 = 0 \ , \quad \forall s \in G.$$

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, ορίζουμε $m_\gamma \colon L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ με:

$$m_\gamma(\phi) := \int_G \phi f_\gamma d\mu \ , \quad \forall \phi \in L^\infty(G)$$

όπου μ το μέτρο Haar της G. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει στην Παρατήρηση 2.1.3, $m_\gamma \in L^\infty(G)^*$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Επίσης, επειδή $f_\gamma \in L^1(G)_{+1}$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$, έπεται ότι $\|m_\gamma\| = m(\mathbf{1}_G) = \|f_\gamma\|_1 = 1$ και $m_\gamma \geq 0$, για κάθε

$\gamma \in \Gamma$. Επομένως, το δίκτυο $(m_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ περιέχεται στο σύνολο των states της C^*-άλγεβρας $L^\infty(G)$, το οποίο είναι w^*-συμπαγές υποσύνολο του $L^\infty(G)^*$ (από το θεώρημα Αλάογλου). Άρα, αντικαθιστώντας, αν χρειάζεται, το $(m_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ με κατάλληλο w^*-συγκλίνον υποδίκτυο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει state m στον $L^\infty(G)$, ώστε $(m_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \xrightarrow{w^*} m$, δηλαδή:

$$m(\phi) = \lim_\gamma m_\gamma(\phi) = \lim_\gamma \int_G \phi f_\gamma d\mu \ , \quad \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Έτσι, για κάθε $\gamma \in \Gamma$, $\phi \in L^\infty(G)$ και $s \in G$, έχουμε:

$$|m_\gamma(\lambda_s\phi) - m_\gamma(\phi)| = \left| \int_G (\lambda_s\phi)(x) f_\gamma(x) d\mu(x) - \int_G \phi(x) f_\gamma(x) d\mu(x) \right|$$

$$= \left| \int_G \phi(s^{-1}x) f_\gamma(x) d\mu(x) - \int_G \phi(x) f_\gamma(x) d\mu(x) \right|$$

$$= \left| \int_G \phi(x) f_\gamma(sx) d\mu(x) - \int_G \phi(x) f_\gamma(x) d\mu(x) \right|$$

$$\leq \int_G |\phi(x)| |(\lambda_{s^{-1}} f_\gamma)(x) - f_\gamma(x)| d\mu(x)$$

$$\leq \|\phi\|_\infty \|\lambda_{s^{-1}} f_\gamma - f_\gamma\|_1.$$

Επειδή ισχύει: $\lim_{\gamma\in\Gamma} \|\lambda_s f_\gamma - f_\gamma\|_1 = 0$, για κάθε $s \in G$, από τις προηγούμενες ανισότητες και το γεγονός ότι $m_\gamma \xrightarrow{w^*} m$, έπεται ότι:

$$m(\lambda_s\phi) = m(\phi) \ , \quad \forall \phi \in L^\infty(G).$$

Επομένως, η G είναι amenable.

□

2.2 Η ιδιότητα προσέγγισης για amenable ομάδες

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την ισοδυναμία μεταξύ της amenability και της ιδιότητας προσέγγισης που περιγράψαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Όπως ήδη αναφέραμε, θα δείξουμε ότι η τελευταία είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα P_1 του Reiter.

Θεώρημα 2.2.1 (Ιδιότητα προσέγγισης)**.** Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Τότε, η G είναι amenable αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές $K \subset G$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in L^2(G)$ με $\|g\|_2 = 1$ τέτοια, ώστε:

$$|1 - (g * \tilde{g})(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall x \in K$$

όπου $\tilde{g}(x) := \overline{g(x^{-1})}$, για $x \in G$. Επιπλέον, η g μπορεί να επιλεγεί συνεχής με συμπαγή φορέα και $\|g\|_2 = 1$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με μ το μέτρο Haar της G. Έστω ότι η G είναι amenable και έστω $K \subset G$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, απ' την Πρόταση 2.1.6, υπάρχει $f \in L^1(G)_{+1}$ τέτοια, ώστε:

$$\|\lambda_s f - f\|_1 < \varepsilon^2 \ , \qquad \forall s \in K.$$

Θέτουμε $g := f^{1/2}$ και παρατηρούμε ότι $g \in L^2(G)$ και $\|g\|_2 = 1$. Επίσης, για κάθε $x \in G$, έχουμε:

$$(g * \tilde{g})(x) = \int_G g(y)\tilde{g}(y^{-1}x)d\mu(y) = \int_G g(y)\overline{g(x^{-1}y)}d\mu(y) = \langle g, \lambda_x g\rangle$$

και άρα: $(g * \tilde{g})(e) = \langle g, g\rangle = \|g\|_2^2 = 1$, όπου e η μονάδα της G.
Έτσι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα:

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}|^2 \leq |a - b| \ , \quad \forall a, b \geq 0$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
|1 - (g * \tilde{g})(x)| &= |(g * \tilde{g})(e) - (g * \tilde{g})(x)| = |\langle g, g - \lambda_x g\rangle| \\
&\leq \|g\|_2 \|g - \lambda_x g\|_2 = \left(\int_G |g(y) - g(x^{-1}y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_G \left|\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x^{-1}y)}\right|^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_G |f(y) - f(x^{-1}y)| d\mu(y)\right)^{1/2} \\
&= \|f - \lambda_x f\|_1^{1/2} < \varepsilon \ , \qquad \forall x \in K.
\end{aligned}$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε συμπαγές $K \subset G$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in L^2(G)$ με $\|g\|_2 = 1$ τέτοια, ώστε:

$$|1 - (g * \tilde{g})(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall x \in K$$

Θα δείξουμε ότι η G έχει την ιδιότητα P_1 και άρα απ' την Πρόταση 2.1.6, ότι είναι amenable. Πράγματι, αν $K \subset G$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$, τότε, παίρνοντας μια $g \in L^2(G)$ όπως παραπάνω, παρατηρούμε ότι $|g| \in L^2(G)$ και, επειδή η $|g|$ έχει επίσης νόρμα ίση με 1, ισχύει:

$$\left|1 - |g| * \widetilde{|g|}(x)\right| \leq |1 - |g * \tilde{g}|(x)| \leq |1 - (g * \tilde{g})(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall x \in K.$$

Έτσι, ορίζοντας $f := |g|^2$, προφανώς $f \in L^1(G)_{+1}$ και για κάθε $x \in K$ έχουμε:

$$\|f - \lambda_x f\|_1 = \int_G \left||g(y)|^2 - |g(x^{-1}y)|^2\right| d\mu(y)$$

$$= \int_G \left||g(y)| - |g(x^{-1}y)|\right| \cdot \left||g(y)| + |g(x^{-1}y)|\right| d\mu(y)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μικρότερο ή ίσο από:

$$\|g - \lambda_x g\|_2 \cdot \| \ |g| + |\lambda_x g| \ \|_2 \leq 2\|g - \lambda_x g\|_2$$

επειδή $\| \ |g| + |\lambda_x g| \ \|_2 \leq 2$, πάλι απ' την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το γεγονός ότι $\|\lambda_x g\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Επομένως, έχουμε:

$$\|f - \lambda_x f\|_1 \leq 2\|g - \lambda_x g\|_2 = 2\left(\|g\|_2^2 + \|\lambda_x g\|_2^2 - 2\mathrm{Re}\langle g, \lambda_x g\rangle\right)^{1/2}$$

$$= 2\left(2 - 2\mathrm{Re}\langle g, \lambda_x g\rangle\right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2}|1 - (g * \tilde{g})(x)|^{1/2} < 2\sqrt{2\varepsilon}$$

Έτσι, έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Αναπαραστάσεις τοπικά συμπαγών ομάδων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας των unitary αναπαραστάσεων τοπικά συμπαγών ομάδων, τα οποία θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στην συνέχεια.

Κυρίως μας ενδιαφέρουν αφ' ενός η σύνδεση ανάμεσα στις unitary αναπαραστάσεις μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G και τις αναπαραστάσεις της αντίστοιχης άλγεβρας $L^1(G)$ και αφ' ετέρου οι έννοιες «συνάρτηση θετικού τύπου» και «θετικά ορισμένη συνάρτηση».

3.1 Unitary αναπαραστάσεις

Ορισμός 3.1.1. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Μια **unitary** αναπαράσταση της G είναι ένα ζεύγος $(\pi, \mathcal{H})$ όπου $\mathcal{H}$ ένας μη τετριμμένος (μιγαδικός) χώρος Hilbert και $\pi\colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ένας ομομορφισμός απ' την G στην ομάδα των unitary τελεστών στον $\mathcal{H}$, ο οποίος είναι συνεχής ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστή (SOT). Δηλαδή, ισχύουν:

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \forall x, y \in G$$

και για κάθε $v \in \mathcal{H}$ η συνάρτηση $G \to \mathcal{H} : x \mapsto \pi(x)v$ είναι συνεχής.
Η $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ καλείται διάσταση της π.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ισχυρή τοπολογία τελεστή στην $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ ταυτίζεται με την ασθενή τοπολογία τελεστή (WOT). Πράγματι, αν ένα δίκτυο unitary τελεστών $(U_a)_{a\in A}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα unitary τελεστή U, τότε για κάθε $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\|(U_a - U)\xi\| = \|U_a\xi\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle U_a\xi, U\xi\rangle + \|U\xi\|^2$$

$$= 2\|\xi\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle U_a\xi, U\xi\rangle$$

Επειδή το τελευταίο μέλος τείνει στο μηδέν, έπεται ότι $\|U_a\xi - U\xi\| \longrightarrow 0$. Επίσης, το ότι η ισχυρή σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή έπεται άμεσα απ' την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Το απλούστερο παράδειγμα unitary αναπαράστασης μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G είναι η τετριμμένη αναπαράσταση διάστασης ένα:

$$\iota\colon G \to \mathcal{U}(\mathbb{C}) = \mathbb{T},\ \iota(x) = 1,\ \forall x \in G.$$

Απ' την άλλη, η αριστερή δράση μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G στον χώρο Hilbert $L^2(G)$, δηλαδή η απεικόνιση

$$\lambda\colon G \to \mathcal{U}(L^2(G)) :\ (\lambda_x f)(s) = f(x^{-1}s),\ x, s \in G,\ f \in L^2(G)$$

αποτελεί ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα unitary αναπαράστασης της G. Η λ ονομάζεται και **αριστερή κανονική αναπαράσταση** (left regular representation) της G.

Ορισμός 3.1.2. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Για δύο unitary αναπαραστάσεις $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ και $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ της G θέτουμε:

$$\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : T\pi_1(x) = \pi_2(x)T,\ \forall x \in G\}.$$

Οι π_1 και π_2 λέγονται **unitarily ισοδύναμες** (unitarily equivalent) αν το σύνολο $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ περιέχει ένα unitary τελεστή.
Για μια unitary αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ της G θέτουμε $\mathcal{C}(\pi) := \mathcal{C}(\pi, \pi)$. Το $\mathcal{C}(\pi) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ καλείται **μεταθέτης** (commutant) της π και είναι προφανώς μια WOT-κλειστή $*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, δηλαδή μια von Neumann άλγεβρα.

Ορισμός 3.1.3. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση της G. Ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος M του $\mathcal{H}$ καλείται αναλλοίωτος υπόχωρος για την π αν ισχύει $\pi(x)M \subset M$, για κάθε $x \in G$.
Αν M είναι ένας μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος για την π, τότε ο περιορισμός της π στον M, δηλαδή η απεικόνιση:

$$\pi|_M\colon M \to \mathcal{U}(M) :\ \pi|_M(x) := \pi(x)|_M,\ x \in G$$

είναι unitary αναπαράσταση της G στον M και καλείται υποαναπαράσταση της π.
Αν οι μόνοι αναλλοίωτοι (κλειστοί) υπόχωροι της π είναι οι $\{0\}$ και $\mathcal{H}$, τότε η π καλείται **ανάγωγη** (irreducible).

Αν $\{(\pi_i, \mathcal{H}_i) : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια unitary αναπαραστάσεων μιας τοπικά συμπαγούς Hausdorff ομάδας G, τότε το **ευθύ άθροισμα** $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$ των π_i, $i \in I$, είναι η αναπαράσταση π της G στον $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$, που ορίζεται ως εξής:

$$\pi(x)\left(\sum_{i\in I} v_i\right) = \sum_{i\in I} \pi_i(x)v_i \ , \qquad x \in G, \ v_i \in \mathcal{H}_i.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η π είναι unitary, κάθε $\mathcal{H}_i$ ως υπόχωρος του $\mathcal{H}$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος για την π και κάθε π_i είναι υποαναπαράσταση της π. Μάλιστα, όπως φαίνεται από τα παρακάτω, κάθε υποαναπαράσταση είναι ευθύς προσθεταίος της αρχικής αναπαράστασης:

Πρόταση 3.1.4. Έστω $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση μιας τοπικά συμπαγούς Huasdorff ομάδας G.

(α) Αν M είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος για την π, τότε και ο $M^\perp$ είναι αναλλοίωτος για την π.

(β) Αν M είναι μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος για την π, τότε η π είναι το ευθύ άθροισμα των $\pi|_M$ και $\pi|_{M^\perp}$.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in G$ και $v \in M^\perp$. Τότε, επειδή ο M είναι αναλλοίωτος, για κάθε $u \in M$, ισχύει $\pi(x^{-1})u \in M$ και άρα $\langle \pi(x)v, u\rangle = \langle v, \pi(x)^*u\rangle = \langle v, \pi(x)^{-1}u\rangle = \langle v, \pi(x^{-1})u\rangle = 0$. Επομένως, $\pi(x)v \in M^\perp$.
(β) Άμεσο από το (α) και το γεγονός ότι $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

□

Ορισμός 3.1.5. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση της G. Για ένα $u \in \mathcal{H}$ ο **κυκλικός υπόχωρος** που παράγεται απ' το u είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\pi(x)u : x \in G\}$ και συμβολίζεται με $[\pi(x)u : x \in G]$. Προφανώς, κάθε κυκλικός υπόχωρος είναι αναλλοίωτος για την π. Επίσης, αν $[\pi(x)u : x \in G] = \mathcal{H}$, τότε το u καλείται **κυκλικό διάνυσμα** της π. Τέλος, αν η π έχει κάποιο κυκλικό διάνυσμα, ονομάζεται **κυκλική** αναπαράσταση.

Η σημασία των κυκλικών αναπαραστάσεων στην μελέτη των unitary αναπαραστάσεων μιας ομάδας φαίνεται στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 3.1.6. Κάθε unitary αναπαράσταση είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών.

Απόδειξη. Έστω $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση μιας ομάδας G. Απ' το Λήμμα του Zorn προκύπτει εύκολα ότι υπάρχει μια μεγιστική οικογένεια $\{M_a : a \in A\}$ από ανά δύο κάθετους κυκλικούς υπόχωρους του $\mathcal{H}$ για την π. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ με $u \perp M_a$, για κάθε $a \in A$, τότε απ' την Πρόταση 3.1.4 (α) έπεται ότι ο $[\pi(x)u : x \in G]$ είναι κάθετος σε όλους τους M_a, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την μεγιστικότητα της $\{M_a : a \in A\}$. Συνεπώς, θα ισχύει $\mathcal{H} = \bigoplus_{a\in A} M_a$ και $\pi = \bigoplus_{a\in A} \pi|_{M_a}$.

□

Πρόταση 3.1.7. Έστω $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση μιας τοπικά συμπαγούς Huasdorff ομάδας G, M ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και P η ορθή προβολή επί του M. Τότε, ο M είναι αναλλοίωτος για την π αν και μόνον αν $P \in \mathcal{C}(\pi)$.

Απόδειξη. Αν $P \in \mathcal{C}(\pi)$ και $v \in M$, τότε, για κάθε $x \in G$, έχουμε:

$$\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \in M$$

και άρα ο M είναι αναλλοίωτος.
Αντίστροφα, αν ο M είναι αναλλοίωτος, τότε $\pi(x)Pv = \pi(x)v = P\pi(x)v$, για κάθε $v \in M$, ενώ για κάθε $v \in M^{\perp}$ έχουμε $\pi(x)Pv = 0 = P\pi(x)v$ (διότι απ' την Πρόταση 3.1.4, ο $M^{\perp}$ είναι επίσης αναλλοίωτος). Άρα, $\pi(x)P = P\pi(x)$, για κάθε $x \in G$.

□

3.2 Αναπαραστάσεις μιας ομάδας και της αντίστοιχης άλγεβρας

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των unitary αναπαραστάσεων μιας τοπικά συμπαγούς Hausdorff ομάδας G και των μη εκφυλισμένων $*$-αναπαραστάσεων της $L^1(G)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^1(G)$ είναι $*$-άλγεβρα Banach με γινόμενο την συνέλιξη

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy \ , \qquad (f, g \in L^1(G))$$

(όπου το ολοκλήρωμα λαμβάνεται πάντα ως προς το μέτρο Haar της G) και ενέλιξη

$$f^*(x) = \Delta_G(x^{-1})\overline{f(x^{-1})} \ , \qquad (f \in L^1(G)).$$

Επιπλέον, μια $*$-αναπαράσταση μιας $*$-άλγεβρας Banach A σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, έστω $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, λέγεται **μη εκφυλισμένη** (nondegenerate) αν δεν υπάρχει $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, ώστε $\pi(a)u = 0$, για κάθε $a \in A$.

Έστω, λοιπόν, G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα, $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση της G και $f \in L^1(G)$. Τότε, ορίζεται ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{H}$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\pi(f)$, ως εξής:
Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\phi\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (u, v) \mapsto \int_G f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx$$

και παρατηρούμε αφ' ενός ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη, διότι η απεικόνιση $x \mapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$, $x \in G$ είναι συνεχής και φραγμένη από $\|u\|\|v\|$ (αφού η π είναι unitary) και αφ' ετέρου ότι η ϕ είναι μια sesquilinear μορφή στον $\mathcal{H}$ και μάλιστα φραγμένη, διότι για κάθε $u, v \in \mathcal{H}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} |\phi(u, v)| = \left| \int_G f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx \right| &\le \int_G |f(x)||\langle \pi(x)u, v\rangle| dx \\ &\le \|u\|\|v\|\|f\|_1. \end{aligned}$$

Για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η π είναι unitary και άρα, για κάθε $x \in G$, $|\langle \pi(x)u, v\rangle| \le \|\pi(x)u\|\|v\| = \|u\|\|v\|$.
Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $\mathcal{H}$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\pi(f)$, τέτοιος, ώστε:

$$\phi(u, v) = \langle \pi(f)u, v\rangle \ , \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

δηλαδή:

$$\langle \pi(f)u, v\rangle = \int_G f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx \ , \quad \forall u, v \in \mathcal{H} \tag{3.1}$$

και επιπλέον $\|\pi(f)\| = \|\phi\| \le \|f\|_1$.
Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\pi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι το ολοκλήρωμα:

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x) dx$$

με την ασθενή έννοια.

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $f \mapsto \pi(f)$, $f \in L^1(G)$ είναι μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της άλγεβρας $L^1(G)$ και επιπλέον ότι κάθε τέτοια προκύπτει από μια μοναδική unitary αναπαράσταση της G με την παραπάνω διαδικασία. Γι' αυτόν τον λόγο, θα χρησιμοποιούμε στο εξής το ίδιο γράμμα για μια unitary αναπαράσταση π της G και την αντίστοιχη απεικόνιση (αναπαράσταση) $f \mapsto \pi(f)$, $f \in L^1(G)$.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση της G. Τότε, η απεικόνιση $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : f \mapsto \pi(f)$ είναι μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της άλγεβρας $L^1(G)$. Επιπλέον, ισχύει:

$$\pi(x)\pi(f) = \pi(\lambda_x f) \ , \quad \forall x \in G, \ \forall f \in L^1(G).$$

Απόδειξη. Προφανώς η $f \mapsto \pi(f), \ f \in L^1(G)$ είναι γραμμική, απ' τον ορισμό του τελεστή $\pi(f)$ (βλ. σχέση (3.1)) και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Επιπλέον, για $f, g \in L^1(G)$ έχουμε:

$$\pi(f * g) = \iint f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)dydx = \int f(y)\left(\int g(y^{-1}x)\pi(x)dx\right)dy$$

$$= \int f(y)\left(\int g(x)\pi(yx)dx\right)dy = \iint f(y)g(x)\pi(y)\pi(x)dxdy = \pi(f)\pi(g)$$

και

$$\pi(f^*) = \int \Delta_G(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\pi(x)dx = \int \overline{f(x)}\pi(x^{-1})dx$$

$$= \int \overline{f(x)}\pi(x)^* dx = \int (f(x)\pi(x))^* \, dx = \pi(f)^*.$$

Επομένως, η $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι πράγματι μια $*$-αναπαράσταση.
Επιπλέον, για $x \in G$ και $f \in L^1(G)$, έχουμε:

$$\pi(x)\pi(f) = \int f(y)\pi(x)\pi(y)dy = \int f(y)\pi(xy)dy = \int f(x^{-1}y)\pi(y)dy$$

$$= \int (\lambda_x f)(y)\pi(y)dy = \pi(\lambda_x f).$$

Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί δικαιολογούνται αν εφαρμόσουμε τους αντίστοιχους τελεστές σε ένα τυχόν $u \in \mathcal{H}$ και πάρουμε εσωτερικό γινόμενο με ένα επίσης αυθαίρετο $v \in \mathcal{H}$, ακριβώς όπως στην σχέση (3.1).
Τέλος, θα δείξουμε ότι η $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι μη εκφυλισμένη. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, τότε επειδή η π είναι unitary (άρα ισχυρά συνεχής), έπεται ότι υπάρχει συμπαγής περιοχή U της μονάδας $e \in G$, ώστε:

$$\|\pi(x)u - u\| < \frac{\|u\|}{2} \ , \quad \forall x \in U.$$

Αν μ είναι το μέτρο Haar της G, τότε $\mu(U) \in (0, \infty)$, διότι το U είναι συμπαγές και έχει μη κενό εσωτερικό. Επομένως, η $f := \dfrac{1}{\mu(U)}\chi_U$ ανήκει στον $L^1(G)$ (αφού $\|f\|_1 = 1$) και επιπλέον:

$$\|\pi(f)u - u\| = \frac{1}{\mu(U)}\left\|\int_U (\pi(x)u - u)dx\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(U)} \int_U \|\pi(x)u - u\| dx \leq \frac{\|u\|}{2} < \|u\|.$$

Άρα, $\pi(f)u \neq 0$. Συνεπώς, η π είναι μη εκφυλισμένη.

$\square$

Θεώρημα 3.2.2. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση. Τότε, υπάρχει μοναδική unitary αναπαράσταση $(\widetilde{\pi}, \mathcal{H})$ της G, ώστε $\widetilde{\pi}(f) = \pi(f)$, για κάθε $f \in L^1(G)$. Δηλαδή, η π προκύπτει από την $\widetilde{\pi}$ σύμφωνα με την σχέση (3.1).

Απόδειξη. Έστω $(u_a)_{a\in A}$ μια προσεγγιστική μονάδα στον $L^1(G)$, δηλαδή ένα δίκτυο που ικανοποιεί τα εξής: $u_a \geq 0$ και $\int u_a = 1$, για κάθε $a \in A$, και επιπλέον $\|u_a * f - f\|_1 \longrightarrow 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$.
Αν $f \in L^1(G)$, τότε επειδή $\|u_a * f - f\|_1 \longrightarrow 0$, έπεται ότι $(\lambda_x u_a) * f = \lambda_x(u_a * f) \longrightarrow \lambda_x f$ στον $L^1(G)$, για κάθε $x \in G$ (διότι κάθε λ_x είναι ισομετρία επί του $L^1(G)$). Συνεπώς, επειδή η π είναι συστολή και άρα συνεχής (κάθε $*$-αναπαράσταση μιας $*$-άλγεβρας Banach σε μια C^*-άλγεβρα είναι συστολή), προκύπτει ότι:

$$\pi(\lambda_x u_a)\pi(f)v \longrightarrow \pi(\lambda_x f)v\ , \quad \forall f \in L^1(G),\ \forall v \in \mathcal{H},\ \forall x \in G \qquad (1)$$

Ορίζουμε $D := \text{span}\{\pi(f)v : f \in L^1(G),\ v \in \mathcal{H}\}$ και παρατηρούμε ότι ο D είναι πυκνός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Πράγματι, αν $u \in \mathcal{H}$ με $u \perp D$, τότε για κάθε $v \in \mathcal{H}$ και κάθε $f \in L^1(G)$ έχουμε:

$$\langle \pi(f)u, v\rangle = \langle u, \pi(f)^* v\rangle = \langle u, \pi(f^*)v\rangle = 0$$

και άρα $\pi(f)u = 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$. Επομένως, $u = 0$, αφού η π είναι μη εκφυλισμένη.
Επίσης, απ' την (1), έπεται ότι, για κάθε $x \in G$, το δίκτυο $(\pi(\lambda_x u_a))_{a\in A}$ συγκλίνει ισχυρά στον D σε ένα γραμμικό τελεστή $\widetilde{\pi}(x)\colon D \to D$ τέτοιον, ώστε:

$$\widetilde{\pi}(x)\pi(f)v = \pi(\lambda_x f)v\ , \quad \forall v \in \mathcal{H},\ \forall f \in L^1(G) \qquad (2)$$

Ο τελεστής $\widetilde{\pi}(x)$ είναι καλά ορισμένος, διότι για $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{H}$ και $f_1, \ldots, f_n \in L^1(G)$, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \pi(f_i)v_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \pi(\lambda_x f_i)v_i = \lim_{a\in A} \sum_{i=1}^n \pi(\lambda_x u_a)\pi(f_i)v_i$$

$$= \lim_{a\in A} \pi(\lambda_x u_a) \left(\sum_{i=1}^n \pi(f_i)v_i \right) = 0$$

Ακόμη, επειδή $\|\pi\| \leq 1$, έπεται $\|\pi(\lambda_x u_a)\| \leq \|\lambda_x u_a\|_1 = \|u_a\|_1 = 1$, για κάθε $a \in A$. Επομένως, ο τελεστής $\widetilde{\pi}(x)$ επεκτείνεται μοναδικά σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή στον $\mathcal{H}$, τον οποίο συμβολίζουμε επίσης με $\widetilde{\pi}(x)$, ώστε $\|\widetilde{\pi}(x)\| \leq 1$ και $\widetilde{\pi}(x)\pi(f) = \pi(\lambda_x f)$, για κάθε $f \in L^1(G)$.
Θα δείξουμε ότι η $\widetilde{\pi} \colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι unitary αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}$. Πράγματι, για $x, y \in G$ και $f \in L^1(G)$ έχουμε:

$$\widetilde{\pi}(xy)\pi(f) = \pi(\lambda_{xy} f) = \pi(\lambda_x \lambda_y f) = \widetilde{\pi}(x)\pi(\lambda_y f) = \widetilde{\pi}(x)\widetilde{\pi}(y)\pi(f)$$

δηλαδή $\widetilde{\pi}(xy)|_D = \widetilde{\pi}(x)\widetilde{\pi}(y)|_D$ και άρα $\widetilde{\pi}(xy) = \widetilde{\pi}(x)\widetilde{\pi}(y)$ σε όλον τον $\mathcal{H}$. Όμοια, προκύπτει ότι $\widetilde{\pi}(e) = I$ και επομένως η $\widetilde{\pi}$ είναι ομομορφισμός απ' την G στην ομάδα των αντιστρέψιμων φραγμένων τελεστών του $\mathcal{H}$. Επίσης, εφ' όσον για $u \in \mathcal{H}$ έχουμε:

$$\|u\| = \|\widetilde{\pi}(x^{-1})\widetilde{\pi}(x)u\| \leq \|\widetilde{\pi}(x)u\| \leq \|u\|$$

έπεται ότι κάθε $\widetilde{\pi}(x)$ είναι ισομετρία, άρα εν τέλει $\widetilde{\pi}(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, για κάθε $x \in G$. Τέλος, αν $(x_b)_{b\in B}$ είναι ένα δίκτυο στην G με $x_b \longrightarrow x \in G$, τότε $\|\lambda_{x_b} f - \lambda_x f\|_1 \longrightarrow 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$ και άρα:

$$\widetilde{\pi}(x_b)\pi(f) = \pi(\lambda_{x_b} f) \longrightarrow \pi(\lambda_x f) = \widetilde{\pi}(x)\pi(f),\ \forall f \in L^1(G)$$

δηλαδή $\widetilde{\pi}(x_b)u \longrightarrow \widetilde{\pi}(x)u$, για κάθε $u \in D$.
Έστω $w \in \mathcal{H}$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή ο D είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$, υπάρχει $u \in D$, ώστε $\|u - w\| < \varepsilon/3$. Επίσης, από τα προηγούμενα, έπεται ότι υπάρχει $b_0 \in B$, ώστε για κάθε $b \in B$ με $b \geq b_0$:

$$\|\widetilde{\pi}(x_b)u - \widetilde{\pi}(x)u\| < \varepsilon/3.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε τελεστής $\widetilde{\pi}(y)$, $y \in G$, είναι ισομετρία στον $\mathcal{H}$, προκύπτει, για κάθε $b \in B$ με $b \geq b_0$:

$$\|\widetilde{\pi}(x_b)w - \widetilde{\pi}(x)w\| \leq \|\widetilde{\pi}(x_b)w - \widetilde{\pi}(x_b)u\| + \|\widetilde{\pi}(x_b)u - \widetilde{\pi}(x)u\| + \|\widetilde{\pi}(x)u - \widetilde{\pi}(x)w\|$$

$$= \|w - u\| + \|\widetilde{\pi}(x_b)u - \widetilde{\pi}(x)u\| + \|u - w\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Συνεπώς, $\widetilde{\pi}(x_b)w \longrightarrow \widetilde{\pi}(x)w$, για κάθε $w \in \mathcal{H}$. Έτσι, δείξαμε ότι η $\widetilde{\pi}$ είναι unitary αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}$.
Θα δείξουμε τώρα ότι $\pi(f) = \widetilde{\pi}(f)$, $\forall f \in L^1(G)$, όπου $\widetilde{\pi}(f)$ ο τελεστής που προκύπτει απ' την unitary αναπαράσταση $\widetilde{\pi}$ όπως στην (3.1). Επειδή ο D είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$, αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\pi(f)$και $\widetilde{\pi}(f)$ ταυτίζονται στον D. Παρατηρούμε ότι, για $f, g \in L^1(G)$, ισχύει $f * g = \int f(y)\lambda_y g dy$, όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα ερμηνεύεται ως διανυσματικό ολοκλήρωμα μιας

συνάρτησης του $y \in G$ με τιμές στον $L^1(G)$ (βλ. [7, Appendix 4]). Εφ' όσον η π είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής απ' τον $L^1(G)$ στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, έπεται ότι μετατίθεται με το ολοκλήρωμα και έτσι έχουμε:

$$\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g) = \int f(y)\pi(\lambda_y g)dy = \int f(y)\widetilde{\pi}(y)\pi(g)dy$$

$$= \left(\int f(y)\widetilde{\pi}(y)dy\right)\pi(g) = \widetilde{\pi}(f)\pi(g)$$

για κάθε $f, g \in L^1(G)$, δηλαδή $\pi(f) = \widetilde{\pi}(f)$ στον D, για κάθε $f \in L^1(G)$, που είναι το ζητούμενο.
Τέλος, αν σ είναι μια unitary αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}$ ώστε $\sigma(f) = \pi(f)$, για κάθε $f \in L^1(G)$, τότε, απ' την σχέση (3.1), έπεται ότι, για κάθε $u, v \in \mathcal{H}$ και κάθε $f \in L^1(G)$:

$$\int_G f(x)\langle\widetilde{\pi}(x)u, v\rangle dx = \langle\widetilde{\pi}(f)u, v\rangle = \langle\sigma(f)u, v\rangle = \int_G f(x)\langle\sigma(x)u, v\rangle dx$$

και επειδή οι συναρτήσεις $x \mapsto \langle\sigma(x)u, v\rangle$ και $x \mapsto \langle\widetilde{\pi}(x)u, v\rangle$ είναι συνεχείς και φραγμένες, έπεται ότι $\langle\widetilde{\pi}(x)u, v\rangle = \langle\sigma(x)u, v\rangle$, για κάθε $x \in G$ και κάθε $u, v \in \mathcal{H}$, δηλαδή $\widetilde{\pi}(x) = \sigma(x)$, για κάθε $x \in G$.

$\square$

Συνοψίζοντας, αν G είναι μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert, τότε, με βάση τα δύο προηγούμενα θεωρήματα, η σχέση (3.1) μας δίνει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των unitary αναπαραστάσεων της G στον $\mathcal{H}$ και των μη εκφυλισμένων $*$-αναπαραστάσεων της άλγεβρας $L^1(G)$. Δηλαδή, αν π είναι μια unitayr αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}$, τότε η $f \mapsto \pi(f) = \int f(x)\pi(x)dx,\ f \in L^1(G)$, είναι μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$, η οποία καλείται συνήθως **επέκταση** της π στον $L^1(G)$. Αντιστρόφως, κάθε μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$ στον $\mathcal{H}$ προκύπτει με τον παραπάνω τρόπο από μια μοναδική unitary αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}$.

Παραδείγματα

Έχουμε δει δύο παραδείγματα unitary αναπαραστάσεων σε μια γενική τοπικά συμπαγή ομάδα Hausdorff G, την τετριμμένη αναπαράσταση διάστασης ένα και την αριστερή κανονική αναπαράσταση. Αξίζει να δούμε ποιες $*$-αναπαραστάσεις της άλγεβρας $L^1(G)$ αντιστοιχούν σε αυτές, με βάση τα προηγούμενα.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την τετριμμένη αναπαράσταση της G

$$\iota\colon G \to \mathcal{U}(\mathbb{C}) = \mathbb{T}, \quad \iota(x) = 1 \qquad (x \in G).$$

Η αντίστοιχη αναπαράσταση στον $L^1(G)$ θα έχει την μορφή:

$$\iota\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \iota(f)\xi = \int f(x)\iota(x)\xi dx = \int f(x)dx \cdot \xi.$$

όπου $\xi \in \mathbb{C},\ f \in L^1(G)$. Δηλαδή, η αναπαράσταση ι στον $L^1(G)$ είναι στην ουσία το αυτοσυζυγές πολλαπλασιαστικό γραμμικό συναρτησοειδές του $L^1(G)$:

$$\iota(f) = \int f(x)dx = \langle \mathbf{1}_G, f\rangle \ , \quad (f \in L^1(G))$$

που αντιστοιχεί στην σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G \in L^\infty(G)$ (με βάση την ταύτιση $L^\infty(G) \cong L^1(G)^*$ που έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο).

Θεωρούμε τώρα την αριστερή κανονική αναπαράσταση της G στον $L^2(G)$

$$\lambda\colon G \to \mathcal{U}(L^2(G)),\ (\lambda_s f)(x) = f(s^{-1}x) \ , \quad (s, x \in G,\ f \in L^2(G)).$$

Η μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της άλγεβρας $L^1(G)$ που αντιστοιχεί στην λ είναι η εξής:

$$\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G)),\ \lambda(f)g = \int f(x)\lambda_x g dx, \quad (f \in L^1(G),\ g \in L^2(G)).$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$(\lambda(f)g)(x) = \int f(y)(\lambda_y g)(x)dy = \int f(y)g(y^{-1}x)dy = (f * g)(x)$$

για κάθε $x \in G$, $f \in L^1(G)$ και $g \in L^2(G)$. Άρα, για $f \in L^1(G)$, ο τελεστής $\lambda(f)\colon L^2(G) \to L^2(G)$ είναι ο τελεστής αριστερής συνέλιξης (left convolution operator) του $L^2(G)$ που αντιστοιχεί στην f. Επίσης, ο τελεστής $\lambda(f)$ έχει νόρμα:

$$\|\lambda(f)\| = \sup\{|\langle \lambda(f)g, h\rangle| : g, h \in L^2(G),\ \|g\|_2 \le 1,\ \|h\|_2 \le 1\}.$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $\check{g}(x) = g(x^{-1})$ και $\tilde{g} = \overline{\check{g}}$, καθώς και την σχέση (3.1) υπολογίζουμε:

$$\langle \lambda(f)\bar{g}, \bar{h}\rangle = \int f(y)\langle \lambda_y \bar{g}, \bar{h}\rangle dy = \int f(y)\left\{\int (\lambda_y \bar{g})(x)h(x)dx\right\} dy$$

$$= \int f(y)\left\{\int \overline{g(y^{-1}x)}h(x)dx\right\} dy = \int f(y)\left\{\int \overline{\check{g}}(x^{-1}y)h(x)dx\right\} dy$$

$$= \int f(y)(h * \tilde{g})(y)dy = \langle h * \tilde{g}, f \rangle,$$

όπου $\langle \phi, f \rangle := \int f\phi$, για $\phi \in L^\infty(G)$ και $f \in L^1(G)$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.3). Άρα, έχουμε:

$$\|\lambda(f)\| = \sup\{|\langle h * \tilde{g}, f \rangle| : g, h \in L^2(G),\ \|g\|_2 \leq 1,\ \|h\|_2 \leq 1\},\ \forall f \in L^1(G).$$

Επιπλέον, μια άλλη αξιοσημείωτη ιδιότητα της αριστερής κανονικής αναπαράστασης είναι ότι η $\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα:

Πρόταση 3.2.3. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τότε, η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα στον $L^1(G)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(G)$, ώστε $\lambda(f) = 0$. Τότε, $\lambda(f)g = f * g = 0$, για κάθε $g \in L^2(G)$. Επιλέγουμε μια προσεγγιστική μονάδα $(u_a)_{a\in A}$ του $L^1(G)$, με $u_a \in C_c(G)$, $u_a \geq 0$ και $\int u_a = 1$, για κάθε $a \in A$. Επομένως, $u_a \in L^2(G)$, για κάθε $a \in A$, διότι $C_c(G) \subset L^2(G)$, και άρα $f * u_a = 0$, για κάθε $a \in A$. Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\|f\|_1 = \|f - f * u_a\|_1\ , \quad \forall a \in A.$$

Όμως, $\lim_a \|f - f * u_a\|_1 = 0$ και άρα $\|f\|_1 = 0$, δηλαδή $f = 0$ σχεδόν παντού. □

3.3 Συναρτήσεις θετικού τύπου

Ορισμός 3.3.1. Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Μια συνάρτηση $\phi \in L^\infty(G)$ ονομάζεται **συνάρτηση θετικού τύπου** (function of positive type) αν ισχύει:

$$\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx \geq 0\ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Δηλαδή, αν η ϕ ορίζει ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές της $*$-άλγεβρας Banach $L^1(G)$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(G)$ ή απλώς με $\mathcal{P}$ (αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων θετικού τύπου στην G. Τέλος, θέτουμε $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(G) := \{\phi \in \mathcal{P} : \|\phi\|_\infty = 1\}$.

Για $f \in L^1(G)$ και $\phi \in L^\infty(G)$, υπολογίζουμε:

$$\int_G (f^* * f)(x)\phi(x)dx = \iint \Delta_G(y^{-1})\overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\phi(x)dydx$$

$$= \iint \overline{f(y)} f(yx)\phi(x)dydx$$

και επομένως, αν αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης και αντικαταστήσουμε το x με $y^{-1}x$, προκύπτει:

$$\int_G (f^* * f)(x)\phi(x)dx = \iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx.$$

Συνεπώς, η ϕ είναι θετικού τύπου αν και μόνον αν ισχύει:

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx \geq 0 \ , \quad \forall f \in L^1(G). \tag{3.2}$$

Πρόταση 3.3.2. Αν η ϕ είναι θετικού τύπου, τότε και η $\overline{\phi}$ είναι θετικού τύπου.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L^1(G)$, έχουμε:

$$\int (f^* * f)\overline{\phi} = \overline{\left(\int \overline{(f^* * f)}\phi\right)} = \overline{\left(\int \left[(\overline{f})^* * \overline{f}\right] \phi\right)}$$

επομένως, αν η ϕ είναι θετικού τύπου, το τελευταίο μέλος είναι μη αρνητικό, άρα και το πρώτο είναι μη αρνητικό, για κάθε $f \in L^1(G)$. Δηλαδή, η $\overline{\phi}$ είναι θετικού τύπου.

□

Θα δούμε τώρα ότι, για μια τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα, υπάρχει μια πολύ όμορφη σύνδεση μεταξύ των unitary αναπαραστάσεων και των συναρτήσεων θετικού τύπου. Μάλιστα, αυτή η σύνδεση είναι ανάλογη της αντιστοιχίας μεταξύ των (κλάσεων unitarily ισοδυναμίας) κυκλικών $*$-αναπαραστάσεων μιας C^*-άλγεβρας σε χώρους Hilbert και των θετικών γραμμικών συναρτησοειδών αυτής.

Πρόταση 3.3.3. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα, $(\pi, \mathcal{H})$ μια unitary αναπαράσταση της G, $u \in \mathcal{H}$ και $\phi \colon G \to \mathbb{C}$, $\phi(x) := \langle \pi(x)u, u\rangle$, για $x \in G$. Τότε, $\phi \in \mathcal{P}$.

Απόδειξη. Επειδή η π είναι unitary και άρα, όπως έχουμε δει, ασθενώς συνεχής, η ϕ είναι συνεχής. Επίσης, η ϕ είναι φραγμένη, διότι, για κάθε $x \in G$ έχουμε:

$$|\phi(x)| = |\langle \pi(x)u, u\rangle| \leq \|\pi(x)u\|\|u\| = \|u\|^2.$$

Επιπλέον, για $x, y \in G$ έχουμε:

$$\phi(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, u\rangle = \langle \pi(y^{-1})\pi(x)u, u\rangle$$

$$= \langle \pi(y)^* \pi(x)u, u \rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)u \rangle$$

και έτσι, για κάθε $f \in L^1(G)$, παίρνουμε:

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx = \iint \langle f(x)\pi(x)u, f(y)\pi(y)u \rangle dxdy$$

$$= \int \langle \pi(f)u, f(y)\pi(y)u \rangle dy = \langle \pi(f)u, \pi(f)u \rangle = \|\pi(f)\|^2 \geq 0.$$

Άρα, με βάση την (3.2), η ϕ είναι θετικού τύπου.

□

Πόρισμα 3.3.4. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Αν $f \in L^2(G)$ και $\tilde{f}(x) := \overline{f(x^{-1})}$, για $x \in G$, τότε $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$.

Απόδειξη. Θεχρούμε την αριστερή κανονική αναπαράσταση λ της G. Τότε, για κάθε $f \in L^2(G)$, έχουμε:

$$\langle \lambda_x f, f \rangle = \int f(x^{-1}y)\overline{f(y)}dy = \overline{f * \tilde{f}(x)}\ , \quad (x \in G).$$

Απ' την Πρόταση 3.3.3, έπεται ότι $\overline{f * \tilde{f}} \in \mathcal{P}$ και άρα, απ' την Πρόταση 3.3.2, $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$.

□

Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι κάθε μη μηδενική συνάρτηση θετικού τύπου προκύπτει από μια unitary αναπαράσταση με τον τρόπο που περιγράφεται στην Πρόταση 3.3.3.

Έστω, λοιπόν, G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\phi \neq 0$ μια συνάρτηση θετικού τύπου στην G. Παρακάτω περιγράφουμε την κατασκευή μιας unitary αναπαράστασης $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ της G, η οποία είναι στην ουσία η GNS-κατασκευή για το θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $f \mapsto \int f\phi,\ f \in L^1(G)$, της $*$-άλγεβρας Banach $L^1(G)$ που αντιστοιχεί στην ϕ.
Αρχικά, ορίζουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi \colon L^1(G) \times L^1(G) \to \mathbb{C}$, με:

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int (g^* * f)\phi = \iint f(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy\ , \quad \text{για } f, g \in L^1(G).$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή η ϕ είναι θετικά ορισμένη, ισχύει $\langle f, f \rangle_\phi \geq 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$ και η $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς την δεύτερη. Άρα, η $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ είναι μια θετική sesquilinear μορφή στην άλγεβρα $L^1(G)$ και μάλιστα φραγμένη, αφού, απ' τον ορισμό της, εύκολα προκύπτει η ανισότητα:

$$|\langle f, g\rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1 \ , \quad \forall f, g \in L^1(G). \tag{3.3}$$

Ορίζουμε $\mathcal{N}_\phi := \{f \in L^1(G) : \langle f, f\rangle_\phi = 0\}$. Απ' την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f, g\rangle_\phi|^2 \leq |\langle f, f\rangle_\phi||\langle g, g\rangle_\phi| \ , \quad \forall f, g \in L^1(G)$$

προκύπτει ότι $\mathcal{N}_\phi = \{f \in L^1(G) : \langle f, g\rangle_\phi = 0, \ \forall g \in L^1(G)\}$. Με βάση τα προηγούμενα και το γεγονός ότι η $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$ είναι συνεχής (ως φραγμένη), έπεται ότι το $\mathcal{N}_\phi$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^1(G)$. Έτσι, η $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$ επάγει στον χώρο πηλίκο $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$ ένα εσωτερικό γινόμενο, το οποίο συμβολίζουμε επίσης με $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}_\phi$ την Hilbert-πλήρωση του χώρου $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot\rangle_\phi$.
Απ' την ανισότητα (3.3), έπεται:

$$\|f + \mathcal{N}_\phi\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|\phi\|_\infty^{1/2} \|f\|_1 \ , \quad \forall f \in L^1(G). \tag{3.4}$$

Επίσης, αν $f, g \in L^1(G)$ και $x \in G$, τότε:

$$\langle \lambda_x f, \lambda_x g\rangle_\phi = \iint f(x^{-1}y)\overline{g(x^{-1}z)}\phi(z^{-1}x)dydz$$

$$= \iint f(y)\overline{g(z)}\phi((xz)^{-1}(xy))dydz = \iint f(y)\overline{g(z)}\phi(z^{-1}y)dydz = \langle f, g\rangle_\phi.$$

Άρα, για κάθε $x \in G$, ισχύει $\lambda_x(\mathcal{N}_\phi) \subset \mathcal{N}_\phi$ και επομένως, για κάθε $x \in G$, ορίζεται καλά ο γραμμικός τελεστής:

$$\pi_\phi(x)\colon L^1(G)/\mathcal{N}_\phi \to L^1(G)/\mathcal{N}_\phi : \ \pi_\phi(x)(f + \mathcal{N}_\phi) = (\lambda_x f) + \mathcal{N}_\phi$$

όπου $f \in L^1(G)$. Επιπλέον, απ' το γεγονός ότι $\langle \lambda_x f, \lambda_x g\rangle_\phi = \langle f, g\rangle_\phi$, για κάθε $x \in G$ και κάθε $f, g \in L^1(G)$, προκύπτει ότι ο $\pi_\phi(x)$ είναι ισομετρία και επί του $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$, για κάθε $x \in G$ και άρα επεκτείνεται μοναδικά σε ένα unitary τελεστή στον $\mathcal{H}_\phi$, τον οποίο συμβολίζουμε επίσης με $\pi_\phi(x)$. Τέλος, για $f \in L^1(G)$ και $x, y \in G$, έχουμε:

$$\pi_\phi(x)\pi_\phi(y)(f + \mathcal{N}_\phi) = \pi_\phi(x)(\lambda_y f + \mathcal{N}_\phi) = \lambda_{xy} f + \mathcal{N}_\phi = \pi_\phi(xy)(f + \mathcal{N}_\phi)$$

και εφ' όσον ο $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}_\phi$, τελικά ισχύει $\pi_\phi(x)\pi_\phi(y) = \pi_\phi(xy)$ σε όλον τον $\mathcal{H}_\phi$, για κάθε $x, y \in G$, δηλαδή η απεικόνιση $\pi_\phi\colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\phi)$ είναι μια unitary αναπαράσταση της G στον $\mathcal{H}_\phi$.

Θεώρημα 3.3.5. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα, ϕ μια συνάρτηση θετικού τύπου της G και $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ η unitary αναπαράσταση της G που ορίζεται με την παραπάνω διαδικασία. Τότε, υπάρχει κυκλικό διάνυσμα $v_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ για την π_ϕ τέτοιο, ώστε:

$$\pi_\phi(f)v_\phi = f + \mathcal{N}_\phi \ , \quad \forall f \in L^1(G)$$

και

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)v_\phi, v_\phi \rangle_\phi \text{ τοπικά σχεδόν παντού για } x \in G.$$

Απόδειξη. Έστω $(u_a)_{a\in A}$ μια προσεγγιστική μονάδα στον $L^1(G)$. Τότε, το $(u_a^*)_{a\in A}$ είναι επίσης μια προσεγγιστική μονάδα του $L^1(G)$, επομένως, για κάθε $f \in L^1(G)$, ισχύει:

$$\langle f + \mathcal{N}_\phi, u_a + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi = \int (u_a^* * f)\phi \longrightarrow \int f\phi \ .$$

Άρα, επειδή ο $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}_\phi$, το όριο $\lim_{a\in A}\langle v, u_a + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi$ υπάρχει για κάθε $v \in \mathcal{H}_\phi$. Επίσης, απ' την (3.4), έχουμε:

$$\|u_a + \mathcal{N}_\phi\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|u_a\|_1 \|\phi\|_\infty^{1/2} = \|\phi\|_\infty^{1/2} \ , \quad \forall a \in A$$

και άρα η απεικόνιση $\mathcal{H}_\phi \to \mathbb{C} : v \mapsto \lim_{a\in A}\langle v, u_a + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi$, είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathcal{H}_\phi$, νόρμας μικρότερης ή ίσης του $\|\phi\|_\infty^{1/2}$. Συνεπώς, απ' το θεώρημα του Riesz για χώρους Hilbert, έπεται ότι υπάρχει (μοναδικό) $v_\phi \in \mathcal{H}_\phi$, ώστε:

$$\langle w, v_\phi \rangle_\phi = \lim_{a\in A}\langle w, u_a + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi \ , \quad \forall w \in \mathcal{H}_\phi.$$

Ειδικότερα, για κάθε $f \in L^1(G)$, παίρνουμε:

$$\langle f + \mathcal{N}_\phi, v_\phi \rangle_\phi = \int f\phi.$$

Επιπλέον, για $f, g \in L^1(G)$ και $y \in G$, έχουμε:

$$\langle g + \mathcal{N}_\phi, \pi_\phi(y)v_\phi \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(y^{-1})(g + \mathcal{N}_\phi), v_\phi \rangle_\phi = \langle \lambda_{y^{-1}} g + \mathcal{N}_\phi, v_\phi \rangle_\phi$$

$$= \int g(yx)\phi(x)dx = \int g(x)\phi(y^{-1}x)dx$$

και άρα

$$\langle g + \mathcal{N}_\phi, f + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi = \iint g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy$$

$$= \int \overline{f(y)} \langle g + \mathcal{N}_\phi, \pi_\phi(y) v_\phi \rangle_\phi dy = \langle g + \mathcal{N}_\phi, \pi_\phi(f) v_\phi \rangle_\phi .$$

Επομένως, επειδή ο $L^1(G)/\mathcal{N}_\phi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}_\phi$, προκύπτει ότι:

$$\langle w, \pi_\phi(f) v_\phi \rangle_\phi = \langle w, f + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi \ , \quad \forall f \in L^1(G), \forall w \in \mathcal{H}_\phi$$

και έτσι έχουμε

$$\pi_\phi(f) v_\phi = f + \mathcal{N}_\phi \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ακόμη ότι αν $\langle g + \mathcal{N}_\phi, \pi_\phi(y) v_\phi \rangle_\phi = 0$, για κάθε $y \in G$, τότε $\langle g + \mathcal{N}_\phi, f + \mathcal{N}_\phi \rangle_\phi = 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$ και άρα $g + \mathcal{N}_\phi = 0$. Συνεπώς, η γραμμική θήκη του $\{\pi_\phi(y) v_\phi : y \in G\}$ είναι πυκνή στον $\mathcal{H}_\phi$, δηλαδή το v_ϕ είναι κυκλικό διάνυσμα για την π_ϕ.
Τέλος, για κάθε $f \in L^1(G)$, έχουμε:

$$\int \langle \pi_\phi(x) v_\phi, v_\phi \rangle_\phi f(x) dx = \langle \pi_\phi(f) v_\phi, v_\phi \rangle_\phi = \langle f + \mathcal{N}_\phi, v_\phi \rangle_\phi = \int f(x) \phi(x) dx$$

και επομένως $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x) v_\phi, v_\phi \rangle_\phi$ τοπικά σχεδόν παντού για $x \in G$.

□

Τα δύο επόμενα πορίσματα είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 3.3.5:

Πόρισμα 3.3.6. Κάθε συνάρτηση θετικού τύπου μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας Hausdorff είναι τοπικά σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή και φραγμένη συνάρτηση.

Απόδειξη. Αν ϕ είναι μια συνάρτηση θετικού τύπου, τότε, απ' το Θεώρημα 3.3.5, η συνάρτηση $x \mapsto \langle \pi_\phi(x) v_\phi, v_\phi \rangle_\phi$ είναι συνεχής και φραγμένη (επειδή η π_ϕ είναι unitary) και $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x) v_\phi, v_\phi \rangle_\phi$ τοπικά σχεδόν παντού.

□

Πόρισμα 3.3.7. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Αν $\phi \in \mathcal{P}(G)$, τότε $\|\phi\|_\infty = \phi(e)$, όπου e η μονάδα της G, και $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$, για κάθε $x \in G$.

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \mathcal{P}(G)$. Τότε, απ' το Θεώρημα 3.3.5, υπάρχει unitary αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ της G με κυκλικό διάνυσμα, έστω u, ώστε $\phi(x) = \langle \pi(x) u, u \rangle$, τοπικά σχεδόν παντού. Όμως, οι συναρτήσεις ϕ και $x \mapsto \langle \pi(x) u, u \rangle$ είναι συνεχείς και φραγμένες και άρα $\phi(x) = \langle \pi(x) u, u \rangle$, για κάθε $x \in G$ (διότι αν δύο συναρτήσεις στην $C_b(G)$ ταυτίζονται τοπικά σχεδόν παντού, τότε ταυτίζονται παντού). Άρα, για κάθε $x \in G$, έχουμε $|\phi(x)| = |\langle \pi(x) u, u \rangle| \leq \|u\|^2 = \langle \pi(e) u, u \rangle = \phi(e)$ και $\phi(x^{-1}) = \langle \pi(x^{-1}) u, u \rangle = \langle \pi(x)^* u, u \rangle = \langle u, \pi(x) u \rangle = \overline{\phi(x)}$.

□

Η Πρόταση 3.3.3 και το Θεώρημα 3.3.5 μας δείχνουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις κυκλικές unitary αναπαραστάσεις μιας ομάδας και στις συνεχείς συναρτήσεις θετικού τύπου. Η επόμενη πρόταση μας λέει επιπλέον ότι η αναπαράσταση π_ϕ που αντιστοιχεί, σύμφωνα με τα παραπάνω, σε μια $\phi \in \mathcal{P}$ είναι μοναδική, ως προς unitarily equivalence.

Πρόταση 3.3.8. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $(\pi, \mathcal{H})$, $(\sigma, \mathcal{K})$ δύο unitary αναπαραστάσεις της G με κυκλικά διανύσματα u και v αντιστοίχως. Αν $\langle \pi(x)u, u\rangle = \langle \sigma(x)v, v\rangle$, για κάθε $x \in G$, τότε οι π και σ είναι unitarily ισοδύναμες. Μάλιστα, υπάρχει unitary τελεστής $T \in \mathcal{C}(\pi, \sigma)$, ώστε $Tu = v$.

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in G$ έχουμε:

$$\langle \pi(x)u, \pi(y)u\rangle = \langle \pi(y^{-1}x)u, u\rangle = \langle \sigma(y^{-1}x)v, v\rangle = \langle \sigma(x)v, \sigma(y)v\rangle$$

και άρα αν ορίσουμε $T\pi(x)u := \sigma(x)v$ για κάθε $x \in G$, τότε η απεικόνιση T επεκτείνεται γραμμικά σε μια ισομετρία του $\mathrm{span}\{\pi(x)u : x \in G\}$ επί του $\mathrm{span}\{\sigma(x)v : x \in G\}$ και ύστερα επεκτείνεται συνεχώς σε ένα unitary τελεστή $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$, τον οποίο συμβολίζουμε επίσης με το γράμμα T. Τότε, θα έχουμε:

$$Tu = T\pi(e)u = \sigma(e)v = v$$

και για $x, y \in G$:

$$\sigma(y)T\pi(x)u = \sigma(y)\sigma(x)v = \sigma(yx)v = T\pi(y)\pi(x)u.$$

Συνεπώς, $\sigma(y)T = T\pi(y)$,$\forall y \in G$, δηλαδή $T \in \mathcal{C}(\pi, \sigma)$. □

Πόρισμα 3.3.9. Αν π είναι μια unitary αναπαράσταση μιας τοπικά συμπαγούς Hausdorff ομάδας G με κυκλικό διάνυσμα u και $\phi\colon G \to \mathbb{C}$, $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u\rangle$, τότε η π είναι unitarily ισοδύναμη με την αναπαράσταση π_ϕ που περιγράψαμε στο Θεώρημα 3.3.5.

3.4 Τοπολογίες στο σύνολο $\mathcal{P}_1$

Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα τοπολογική ιδιότητα του συνόλου $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(G) := \{\phi \in \mathcal{P} : \|\phi\|_\infty = 1\} \subset L^\infty(G)$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε ότι δύο διαφορετικές (φαινομενικά τουλάχιστον) τοπολογίες στο $\mathcal{P}_1$ ταυτίζονται. Η μια εξ αυτών είναι η w^*-τοπολογία που κληρονομεί το $\mathcal{P}_1$ από τον $L^\infty(G)$, αν τον θεωρήσουμε ως τον δυϊκό χώρο Banach του $L^1(G)$ μέσω του ισομετρικού γραμμικού ισομορφισμού:

$$T\colon L^\infty(G) \to (L^1(G))^* : \phi \mapsto T_\phi$$

$$\text{όπου} \quad T_\phi(f) = \int_G f\phi d\mu, \quad f \in L^1(G).$$

Η δεύτερη είναι η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G. Σε αυτήν την τοπολογία μια συνάρτηση $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ έχει ως βάση περιοχών τα σύνολα της μορφής:

$$N(\phi_0, \varepsilon, K) := \{\phi \in \mathcal{P}_1 : |\phi(x) - \phi_0(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in K\},$$

όπου το ε διατρέχει το σύνολο των θετικών αριθμών και το K διατρέχει το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων της G. Δηλαδή, ένα δίκτυο $(\phi_a)_{a\in A}$ στο $\mathcal{P}_1$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της G σε μια $\phi \in \mathcal{P}_1$ αν και μόνον αν για κάθε $K \subset G$ συμπαγές και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $a_0 \in A$, ώστε για κάθε $a \in A$ με $a \geq a_0$ να ισχύει:

$$\sup_{x\in K} |\phi(x) - \phi_a(x)| < \varepsilon.$$

Λήμμα 3.4.1. Έστω X χώρος Banach και $B \subset X^*$ norm-φραγμένο υποσύνολο του X^*. Τότε, στο B η w^*-τοπολογία ταυτίζεται με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X.

Απόδειξη. Η w^*-τοπολογία είναι η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον X, άρα είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X.
Αντίστροφα, ας πάρουμε $x_0^* \in B$ και μια περιοχή του x_0^* στην τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X, έστω $N(x_0^*, \varepsilon, K) = \{x^* \in B : |x^*(x) - x_0^*(x)| < \varepsilon \ , \forall x \in K\}$, όπου $\varepsilon > 0$ και $K \subset X$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το $N(x_0^*, \varepsilon, K)$ περιέχει μια w^*-περιοχή του x_0^*.
Έστω $C := \sup\{\|x^*\| : x^* \in B\}$ και $\delta := \dfrac{\varepsilon}{3C}$. Τότε, $C < \infty$, διότι το B είναι φραγμένο, και υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τέτοια, ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_X(x_i, \delta)$, επειδή το K είναι συμπαγές. Έτσι, αν $x^* \in B$ και $x \in K$, τότε υπάρχει $j \in \{1 \dots, n\}$, ώστε $x \in B_X(x_j, \delta)$, δηλαδή $\|x - x_j\| < \delta$ και άρα έχουμε:

$$|x^*(x) - x_0^*(x)| \leq |x^*(x - x_j)| + |(x^* - x_0^*)(x_j)| + |x_0^*(x - x_j)|$$

$$\leq \|x^*\|\|x - x_j\| + |(x^* - x_0^*)(x_j)| + \|x_0^*\|\|x - x_j\|$$
$$\leq |(x^* - x_0^*)(x_j)| + C\frac{2\varepsilon}{3C} = |(x^* - x_0^*)(x_j)| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Επομένως, η w^*-περιοχή $\bigcap_{i=1}^n \{x^* \in B : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon/3\}$ του x_0^* περιέχεται στην περιοχή $N(x_0^*, \varepsilon, K)$ του x_0^* για την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα.

□

Λήμμα 3.4.2. Έστω $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ και $f \in L^1(G)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $K \subset G$ συμπαγές, υπάρχει w^*-περιοχή W της ϕ_0 στο $\mathcal{P}_1$ τέτοια, ώστε:

$$|(f * \phi)(x) - (f * \phi_0)(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall \phi \in W, \ \forall x \in K.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $K \subset G$ συμπαγές. Απ' το Πόρισμα 3.3.7, για κάθε $\phi \in \mathcal{P}_1$, ισχύει $\overline{\phi} \in \mathcal{P}_1$ και $\overline{\phi}(x) = \phi(x^{-1})$, $\forall x \in G$. Επομένως, έχουμε:

$$(f * \phi)(x) = \int f(y)\phi(y^{-1}x)dy = \int f(xy)\phi(y^{-1})dy$$

$$= \int f(xy)\overline{\overline{\phi}(y)}dy = \int (\lambda_{x^{-1}}f)\overline{\overline{\phi}} \ , \quad \forall x \in G.$$

Επίσης, απ' την Πρόταση 1.2.6, η συνάρτηση $G \to L^1(G) : x \mapsto \lambda_{x^{-1}}f$ είναι $\|.\|_1$-συνεχής και επομένως το $C := \{\lambda_{x^{-1}}f : x \in K\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^1(G)$, άρα και το $C_0 := \{\overline{h} : h \in C\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $L^1(G)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το $\mathcal{P}_1$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $L^\infty(G) = L^1(G)^*$, ενώ το σύνολο:

$$N := \{\phi \in \mathcal{P}_1 : |(f * \phi)(x) - (f * \phi_0)(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in K\}$$

είναι ίσο με το σύνολο

$$\left\{\phi \in \mathcal{P}_1 : \left|\int h\phi - \int h\phi_0\right| < \varepsilon \ , \ \forall h \in C_0\right\}$$

το οποίο είναι μια περιοχή της ϕ_0 στο $\mathcal{P}_1$ για την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του $L^1(G)$. Άρα, από το Λήμμα 3.4.1, έπεται ότι το N περιέχει μια w^*-περιοχή της ϕ_0 στο $\mathcal{P}_1$, δηλαδή το ζητούμενο.

□

Λήμμα 3.4.3. Αν $\phi \in \mathcal{P}_1$, τότε, για κάθε $x, y \in G$, ισχύει:

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 - 2\,\mathrm{Re}\,\phi(yx^{-1}).$$

Απόδειξη. Απ' το Θεώρημα 3.3.5 υπάρχει unitary αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ της G με κυκλικό διάνυσμα u, ώστε $\langle \pi(x)u, u\rangle = \phi(x)$, για κάθε $x \in G$. Επομένως, $\|u\|^2 = \phi(e) = \|\phi\|_\infty = 1$, και άρα για $x, y \in G$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 = |\langle(\pi(x) - \pi(y))u, u\rangle|^2 = |\langle u, (\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1}))u\rangle|^2 \\ \leq \|u\|^2 \|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\|^2 = \|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\|^2 \\ = 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(x^{-1})u, \pi(y^{-1})u\rangle = 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(yx^{-1})u, u\rangle \\ = 2 - 2\operatorname{Re}\phi(yx^{-1}). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.4.4. Στο $\mathcal{P}_1$ η w^*-τοπολογία και η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G ταυτίζονται. Δηλαδή, αν $(\phi_a)_{a\in A}$ είναι ένα δίκτυο στο $\mathcal{P}_1$ και $\phi \in \mathcal{P}_1$, τότε $\phi_a(x) \longrightarrow \phi(x)$ ομοιόμορφα για x στα συμπαγή υποσύνολα της G αν και μόνον αν ισχύει:

$$\int f(x)\phi_a(x)dx \longrightarrow \int f(x)\phi(x)dx \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με μ το μέτρο Haar της G. Αν $f \in L^1(G)$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει συμπαγές $K \subset G$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{G\setminus K} |f| d\mu < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Έτσι, αν $\phi, \phi_0 \in \mathcal{P}_1$ και $\sup_{x\in K} |\phi(x) - \phi_0(x)| \|f\|_1 < \varepsilon/2$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\int (f\phi - f\phi_0)d\mu\right| \leq \int_K |f||\phi - \phi_0|d\mu + \int_{G\setminus K} |f||\phi - \phi_0|d\mu \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα της G συνεπάγεται την w^*-σύγκλιση.

Αντίστροφα, θεωρούμε $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, $\varepsilon > 0$ και $K \subset G$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι υπάρχει w^*-περιοχή, έστω W, της ϕ_0 στο $\mathcal{P}_1$ τέτοια, ώστε $|\phi - \phi_0| < \varepsilon$ στο K για κάθε $\phi \in W$.

Έστω $\delta > 0$. Επειδή η ϕ_0 είναι συνεχής και $\phi_0(e) = 1$, υπάρχει συμπαγής περιοχή V της μονάδας $e \in G$, ώστε $|\phi_0(x) - 1| < \delta$, για κάθε $x \in V$. Θέτοντας

$$W_1 := \left\{\phi \in \mathcal{P}_1 : \left|\int_V (\phi - \phi_0)d\mu\right|\right\} < \delta\mu(V)$$

έχουμε ότι η W_1 είναι w^*-περιοχή της ϕ_0, διότι $\chi_V \in L^1(G)$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι:

$$\left|\int_V (1-\phi)d\mu\right| \leq \left|\int_V (1-\phi_0)d\mu\right| + \left|\int_V (\phi_0-\phi)d\mu\right| \ , \quad \forall \phi \in W_1 \qquad (3.5)$$

Επιπλέον, για $x \in G$ και $\phi \in W_1$ έχουμε:

$$|(\chi_V * \phi)(x) - \mu(V)\phi(x)| = \left|\int_V (\phi(y^{-1}x) - \phi(x))d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_V |\phi(y^{-1}x) - \phi(x)|d\mu(y).$$

Από το Λήμμα 3.4.3, την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την (3.5), το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μικρότεροή ίσο από:

$$\int_V (2 - 2\operatorname{Re}\phi(y))^{1/2}d\mu(y) \leq \left(\int_V 2 - 2\operatorname{Re}\phi(y)\right)^{1/2} \mu(V)^{1/2} < 2\mu(V)\sqrt{\delta}.$$

Απ' το Λήμμα 3.4.2 υπάρχει w^*-περιοχή W_2 της ϕ_0 στο $\mathcal{P}_1$ τέτοια, ώστε για κάθε $\phi \in W_2$ και κάθε $x \in K$ ισχύει:

$$|(\chi_V * \phi)(x) - (\chi_V * \phi_0)(x)| < \delta\mu(V).$$

Επομένως, αν $\phi \in W_1 \cap W_2$, τότε

$$|\phi(x) - \phi_0(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu(V)}\big[\,|\mu(V)\phi(x) - (\chi_V * \phi)(x)| + |(\chi_V * (\phi - \phi_0))(x)| +$$

$$+|(\chi_V * \phi_0)(x) - \mu(V)\phi_0(x)|\,\big]$$

$$\leq \frac{1}{\mu(V)}\left(2\mu(V)\sqrt{\delta} + \mu(V)\delta + 2\mu(V)\sqrt{\delta}\right) = \delta + 4\sqrt{\delta}.$$

Άρα, αν επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $\delta + 4\sqrt{\delta} < \varepsilon$ και $W := W_1 \cap W_2$, τότε έχουμε το ζητούμενο.

□

3.5 Θετικά ορισμένες συναρτήσεις

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με μια παραλλαγή του ορισμού των συναρτήσεων θετικού τύπου:

Ορισμός 3.5.1. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Μια συνάρτηση $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ καλείται **θετικά ορισμένη** (positive definite) αν για κάθε φυσικό αριθμό n, κάθε $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ και κάθε $x_1, \dots, x_n \in G$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \phi(x_j^{-1} x_i) \geq 0.$$

Έτσι, αν $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση της G, τότε, για $n = 2$, $x_1 = x \in G$ και $x_2 = e \in G$, η συνθήκη του Ορισμού 3.5.1 λέει ότι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \phi(e) & \phi(x) \\ \phi(x^{-1}) & \phi(e) \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ημιορισμένος. Επομένως, $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$ και $\phi(e)^2 - \phi(x)\phi(x^{-1}) \geq 0$ και άρα $|\phi(x)| \leq \phi(e)$, για κάθε $x \in G$. Συμπεραίνουμε ειδικότερα ότι κάθε θετικά ορισμένη συνάρτηση της G είναι φραγμένη.

Ωστόσο, μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, εν γένει, δεν είναι απαραίτητα συνεχής. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $\phi(x) = 1$ για $x = 0$ και $\phi(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε η ϕ ικανοποιεί προφανώς τον Ορισμό 3.5.1, αλλά ασφαλώς δεν είναι συνεχής. Παρ' όλα αυτά, οι συνεχείς θετικά ορισμένες συναρτήσεις μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G είναι ακριβώς οι συνεχείς συναρτήσεις θετικού τύπου της G.

Πρόταση 3.5.2. Έστω G τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα και $\phi \in C_b(G)$. Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η ϕ είναι θετικού τύπου.

(β) Η ϕ είναι θετικά ορισμένη.

(γ) $\int (f^* * f)\phi \geq 0$, για κάθε $f \in C_c(G)$.

Απόδειξη. (α)⇒(β): Έστω ότι η ϕ είναι θετικού τύπου. Τότε, απ' το Θεώρημα 3.3.5, υπάρχει unitary αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ της G με κυκλικό διάνυσμα $u \in \mathcal{H}$, ώστε $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$, για κέθε $x \in G$. Επομένως, για κάθε $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ και $x_1, \dots, x_n \in G$, έχουμε:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \phi(x_j^{-1} x_i) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \langle \pi(x_j^{-1} x_i)u, u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \langle \pi(x_j)^* \pi(x_i)u, u \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\langle \pi(x_i)u, \pi(x_j)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle c_i\pi(x_i)u, c_j\pi(x_j)u\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i\pi(x_i)u \ , \sum_{j=1}^{n} c_j\pi(x_j)u \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i\pi(x_i)u \right\|^2 \geq 0.$$

Άρα, η ϕ είναι θετικά ορισμένη.

(β)⇒(γ): Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι θετικά ορισμένη. Έστω μ το μέτρο Haar της G και $f \in C_c(G)$. Θέτουμε $F(x,y) := f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)$, για $x, y \in G$ και παρατηρούμε ότι $F \in C_c(G \times G)$, διότι αν $K := \mathrm{supp}(f)$, τότε $\mathrm{supp}(F) \subset K \times K$, και άρα η F είναι ομοιόμορφα συνεχής (βλ. Πρόταση 1.2.6). Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η F είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subset G$ της μονάδας της G, ώστε:

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2, y_1, y_2 \in G \text{ με } x_1^{-1}x_2 \in U \text{ και } y_1^{-1}y_2 \in U, \text{ ισχύει:}$$

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Επιλέγουμε μια συμμετρική ανοικτή περιοχή V της μονάδας στην G, ώστε $VV \subset U$. Έτσι, έχουμε $K \times K \subset \bigcup_{x,y\in K}(xV) \times (yV)$ και άρα, απ' την συμπάγεια του $K \times K$, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in K \times K$, ώστε $K \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_iV) \times (y_iV)$.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν $(x, y), (w, z) \in (x_iV) \times (y_iV)$, $i = 1 \ldots, n$, τότε

$$x, w \in x_iV \text{ και } y, z \in y_iV \implies x_i^{-1}x,\ x_i^{-1}w \in V \text{ και } y_i^{-1}y,\ y_i^{-1}z \in y_iV$$

$$\implies x^{-1}w \in V^{-1}V = VV \subset U \text{ και } y^{-1}z \in VV \subset U$$

και άρα

$$|F(x, y) - F(w, z)| < \varepsilon.$$

Επίσης, προφανώς έχουμε $K \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_iV \cup y_iV)$ και άρα αν ορίσουμε $m := 2n$, $E_1 := x_1V \cap K$, $E_i := (x_iV \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k) \cap K$, για $2 \leq i \leq n$, και $E_{n+1} := (y_1V \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k) \cap K$, $E_{n+i} := (y_iV \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{n+i-1} E_k) \cap K$, για $2 \leq i \leq n$, τότε η οικογένεια $\{E_i : 1 \leq i \leq m\}$ είναι μια πεπερασμένη διαμέριση του K που αποτελείται από Borel-υποσύνολα του K. Ακόμη, επιλέγουμε $a_i \in E_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Έτσι, με βάση τα προηγούμενα, έπεται ότι:

$$|F(x, y) - F(a_i, a_j)| < \varepsilon\ , \quad \forall (x, y) \in E_i \times E_j, \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\int (f^* * f)\phi = \iint F(x, y)dxdy = \sum_{i,j=1}^{m} \iint_{E_i \times E_j} F(x, y)dxdy$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} F(a_i, a_j)\mu(E_i)\mu(E_j) + R$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} f(a_i)\mu(E_i)\overline{f(a_j)\mu(E_j)}\phi(a_j^{-1}a_i) + R \qquad (*)$$

όπου $R := \sum_{i,j=1}^{m} \iint_{E_i \times E_j} [F(x,y) - F(a_i, a_j)]\, dxdy$. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα στην $(*)$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, επειδή η ϕ είναι θετικά ορισμένη, και $|R| \leq \varepsilon\mu(K)^2$. Άρα, επειδή το ε ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι $\int (f^* * f)\phi \geq 0$.

(γ)⇒(α): Υποθέτουμε ότι η ϕ ικανοποιεί το (γ). Αν $f \in L^1(G)$, τότε υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ στον $C_c(G)$ τέτοια, ώστε $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$. Επομένως, $\|f_n^* * f_n - f^* * f\|_1 \longrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$, και άρα $\int (f^* * f)\phi = \lim_{n\to\infty} \int (f_n^* * f_n)\phi \geq 0$. Δηλαδή, η ϕ είναι θετικού τύπου.

□

Κεφάλαιο 4

Amenability και C^*-άλγεβρες

Έχουμε δει (βλ. Θεώρημα προσέγγισης 2.2.1) ότι μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff G είναι amenable αν και μόνον αν η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της G από συναρτήσεις της μορφής $f * \tilde{f}$, όπου $f \in L^2(G)$, $\tilde{f}(t) := \overline{f(t^{-1})}$ και $\|f\|_2 = 1$, δηλαδή από συνεχείς συναρτήσεις θετικού τύπου, καθώς $(f * \tilde{f})(x) = \langle \lambda_x \overline{f}, \overline{f} \rangle$, για κάθε $x \in G$, όπου λ η αριστερή κανονική αναπαράσταση της G στον $L^2(G)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την πλήρη (full) C^*-άλγεβρα $C^*(G)$ και την ανηγμένη (reduced) C^*-άλγεβρα $C^*_r(G)$, για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G, και θα αποδείξουμε ότι το Θεώρημα προσέγγισης 2.2.1 είναι ισοδύναμο με ένα θεώρημα εμφύτευσης (Θεώρημα 4.4.8).

4.1 Οι C^*-άλγεβρες μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας

Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Χρησιμοποιώντας τις unitary αναπαραστάσεις της G και την ένα προς ένα και επί αντιστοιχία αυτών με τις μη εκφυλισμένες $*$-αναπαραστάσεις της $*$-άλγεβρας Banach $L^1(G)$ σε χώρους Hilbert (βλ. Θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.2), ορίζουμε μια νέα νόρμα στην $L^1(G)$, ως εξής:

Ορισμός 4.1.1. Για κάθε $f \in L^1(G)$, θέτουμε:

$$\|f\|_* = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} |\ \exists(\pi, \mathcal{H}) \text{ unitary αναπαράσταση της } G,\ \alpha = \|\pi(f)\|\}.$$

Με βάση τα Θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.2, έχουμε ισοδύναμα:

$$\|f\|_* = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} |\ \exists(\pi, \mathcal{H}) \text{ μη εκφυλισμένη } *\text{-αναπαρ. της } L^1(G)$$
$$\text{σε ένα χώρο Hilbert } \mathcal{H}, \text{ ώστε } \alpha = \|\pi(f)\|\}.$$

Επειδή κάθε $*$-αναπαράσταση μιας $*$-άλγεβρας Banach σε μια C^*-άλγεβρα είναι συστολή, έχουμε $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$, για κάθε $*$-αναπαράσταση π της $L^1(G)$ και άρα το παραπάνω supremum υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Μάλιστα, ισχύει:

$$\|f\|_* \leq \|f\|_1 \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας τελεστή και τον ορισμό της $\|\cdot\|_*$, βλέπουμε εύκολα ότι η $\|\cdot\|_*$ είναι μια ημινόρμα στον $L^1(G)$, η οποία επιπλέον ικανοποιεί:

$$\|f_1 * f_2\|_* \leq \|f_1\|_* \|f_2\|_* \ , \quad \|f^*\|_* = \|f\|_* \ , \quad \|f^* * f\|_* = \|f\|_*^2$$

για κάθε $f_1, f_2, f \in L^1(G)$. Επίσης, η $\|\cdot\|_*$ είναι πράγματι νόρμα, αφού η αριστερή κανονική αναπαράσταση λ είναι 1-1 στον $L^1(G)$ (βλ. Πρόταση 3.2.3) και απ' τον ορισμό ισχύει:

$$\|\lambda(f)\| \leq \|f\|_* \ , \qquad \forall f \in L^1(G).$$

Άρα, αν $\|f\|_* = 0$, τότε $\|\lambda(f)\| = 0 \iff \lambda(f) = 0$ και επομένως $f = 0$. Με άλλα λόγια, η νορμαρισμένη άλγεβρα $(L^1(G), \|\cdot\|_*)$ έχει όλες τις ιδιότητες μιας C^*-άλγεβρας, εκτός ίσως από την πληρότητα.

Ορισμός 4.1.2. Συμβολίζουμε με $C^*(G)$ την πλήρωση της $*$-άλγεβρας $L^1(G)$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_*$. Η $C^*(G)$ καλείται η **πλήρης $\mathbf{C^*}$-άλγεβρα** της G (full group C^*-algebra) και είναι προφανώς μια C^*-άλγεβρα που περιέχει την $L^1(G)$ ως πυκνή $*$-υπάλγεβρα.

Παρατηρούμε ότι αν $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{H}$ είναι μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, τότε επειδή $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_*$, για κάθε $f \in L^1(G)$, και η $L^1(G)$ είναι πυκνή στην $C^*(G)$, έπεται ότι η π επεκτείνεται μοναδικά σε μια (μη εκφυλισμένη) $*$-αναπαράσταση της $C^*(G)$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.3. Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Τότε, υπάρχουν ένα προς ένα και επί αντιστοιχίες μεταξύ των:

(α) Unitary αναπαραστάσεων της G στον $\mathcal{H}$.

(β) Μη εκφυλισμένων $*$-αναπαραστάσεων της $L^1(G)$ στον $\mathcal{H}$.

(γ) Μη εκφυλισμένων $*$-αναπαραστάσεων της $C^*(G)$ στον $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. Η αντιστοιχία μεταξύ των (α) και (β) προκύπτει ακριβώς από τα Θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.2. Η δε αντιστοιχία μεταξύ των (β) και (γ) προκύπτει αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε (μη εκφυλισμένη) $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$ την μοναδική επέκτασή της στην $C^*(G)$. Μένει μόνο να δείξουμε ότι μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$ επεκτείνεται σε μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $C^*(G)$ και ότι ο περιορισμός κάθε μη εκφυλισμένης $*$-αναπαράστασης της $C^*(G)$ στην $L^1(G)$ είναι μη εκφυλισμένη.
Έστω π μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $L^1(G)$ στον $\mathcal{H}$ και $\widetilde{\pi}$ η μοναδική επέκτασή της στην $C^*(G)$. Αν $u \in \mathcal{H}$ με $\widetilde{\pi}(f)u = 0$, για κάθε $f \in C^*(G)$, τότε προφανώς $\pi(f)u = 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$ και άρα $u = 0$, διότι η π είναι μη εκφυλισμένη. Δηλαδή, η $\widetilde{\pi}$ είναι επίσης μη εκφυλισμένη.
Αντιστρόφως, έστω $\widetilde{\pi}$ μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $C^*(G)$ στον $\mathcal{H}$ και $\pi := \widetilde{\pi}|_{L^1(G)}$. Θεωρούμε $u \in \mathcal{H}$ με $\pi(f)u = 0$, για κάθε $f \in L^1(G)$. Αν $a \in C^*(G)$, τότε υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(G)$, ώστε $\|f_n - a\|_* \longrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$. Επειδή $\pi(f_n)u = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\|\widetilde{\pi}(a)u\| = \|\widetilde{\pi}(a)u - \widetilde{\pi}(f_n)u\| = \|\widetilde{\pi}(a - f_n)u\| \leq \|u\|\|a - f_n\|_* \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Άρα, $\widetilde{\pi}(a)u = 0$, για κάθε $a \in C^*(G)$, συνεπώς $u = 0$. Έτσι, η π είναι επίσης μη εκφυλισμένη.

□

Με άλλα λόγια, το Θεώρημα 4.1.3 μας λέει ότι η θεωρία των unitary αναπαραστάσεων της G είναι ισοδύναμη με την θεωρία των (μη εκφυλισμένων) $*$-αναπαραστάσεων της της αντίστοιχης C^*-άλγεβρας $C^*(G)$. Εν τούτοις, παρά το γεγονός ότι η $C^*(G)$ είναι κατηγορικά πολύ «καλή», με την παραπάνω έννοια, το μειονέκτημά της είναι ότι γενικά για μια $f \in L^1(G)$ ο υπολογισμός της $\|f\|_*$ μπορεί να μην είναι πρακτικά εφικτός.

Η ανηγμένη C^*-άλγεβρα μιας ομάδας

Θα δούμε τώρα ότι, εκτός απ' την $C^*(G)$, μπορούμε να επισυνάψουμε στην G και μια άλλη C^*-άλγεβρα, της οποίας η νόρμα είναι πρακτικά πιο εύκολα υπολογίσιμη.

Έχουμε δει ότι η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda \colon G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ της G επεκτείνεται στην μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση του $L^1(G)$:

$$\lambda \colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))\ ,\ \lambda(f)g = f * g\ , \quad \forall f \in L^1(G), \forall g \in L^2(G).$$

Απ' τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_*$, έχουμε ότι:

$$\|\lambda(f)\| \leq \sup\{\|\pi(f)\| : \ \pi \text{ unitary αναπαράσταση της } G\} = \|f\|_*$$

για κάθε $f \in L^1(G)$. Εφ' όσον ο $L^1(G)$ είναι πυκνός στην $C^*(G)$, έπεται ότι η $\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ έχει μια μοναδική (συνεχή) επέκταση σε μια $*$-αναπαράσταση από την $C^*(G)$ στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(L^2(G))$, την οποία συμβολίζουμε επίσης με λ.

Επειδή η $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι $*$-ομομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών, η εικόνα $\lambda(C^*(G)) \subset \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι κλειστή $*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(G))$ και άρα C^*-υπάλγεβρα αυτής. Επίσης, απ' την συνέχεια της $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$, έχουμε:

$$\lambda\left(\overline{L^1(G)}^{\|\cdot\|_*}\right) \subset \overline{\lambda(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}}$$

και επομένως

$$\overline{\lambda(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}} \subset \lambda(C^*(G)) = \lambda\left(\overline{L^1(G)}^{\|\cdot\|_*}\right) \subset \overline{\lambda(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}}$$

δηλαδή

$$\lambda(C^*(G)) = \overline{\lambda(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}} \subset \mathcal{B}(L^2(G)).$$

Ορισμός 4.1.4. Η C^*-υπάλγεβρα $\lambda(C^*(G))$ της $\mathcal{B}(L^2(G))$ καλείται η **ανηγμένη $\mathbf{C^*}$-άλγεβρα** της G (reduced group C^*-algebra) και συμβολίζεται με $C_r^*(G)$, δηλαδή:

$$C_r^*(G) := \lambda(C^*(G)) = \overline{\lambda(L^1(G))}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}}.$$

Συνεπώς, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(L^2(G))$ ανήκει στην $C_r^*(G)$ αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(G)$ τέτοια, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - \lambda(f_n)\| = 0$, δηλαδή ο T είναι όριο μιας ακολουθίας τελεστών της μορφής $L^2(G) \to L^2(G) : g \longmapsto f * g$, όπου $f \in L^1(G)$ (left convolution operators).

Άρα, ο υπολογισμός της νόρμας ενός στοιχείου της $C_r^*(G)$ ανάγεται στον υπολογισμό των νορμών των τελεστών $\lambda(f)$, για $f \in L^1(G)$, για τους οποίους έχουμε δει ότι ισχύει:

$$\|\lambda(f)\| = \sup\{|\langle h * \tilde{g}, f\rangle| : g, h \in L^2(G),\ \|g\|_2 \le 1,\ \|h\|_2 \le 1\},\ \forall f \in L^1(G).$$

Επιπλέον, έχουμε δείξει ότι η $\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα (βλ. Πρόταση 3.2.3). Έτσι, το ερώτημα που θα μας απασχολήσει στα επόμενα είναι υπό ποιες προϋποθέσεις η επέκταση της λ στην $C^*(G)$ είναι ένα προς ένα. Φυσικά το να είναι η $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ ένα προς ένα είναι ισοδύναμο με το να είναι ισομετρία (αφού ένας $*$-ομομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών είναι 1-1 αν και μόνον αν είναι ισομετρία). Σε αυτήν την περίπτωση οι $C^*(G)$ και $C_r^*(G)$

θα είναι ισομετρικά $*$-ισόμορφες (μέσω της λ). Τέλος, παρατηρούμε ότι το να είναι η $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ ισομετρία είναι ισοδύναμο με την συνθήκη:

$$\|\lambda(f)\| = \|f\|_* \ , \quad \forall f \in L^1(G)$$

αφού ο $L^1(G)$ είναι πυκνός στην $C^*(G)$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε στα επόμενα ότι η $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ισομετρία αν και μόνον αν η G είναι amenable. Σημειώνουμε ότι η ισοδυναμία αυτή αποτελεί ένα αρκετά βαθύ θέμα, για αυτό και η απόδειξή της απαιτεί κάποια προεργασία.

Η von Neumann-άλγεβρα μιας ομάδας

Ορίσαμε την ανηγμένη C^*-άλγεβρα της G ως την $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}$-κλειστή θήκη του συνόλου $\lambda(L^1(G)) = \{\lambda(f) : f \in L^1(G)\}$, το οποίο είναι μια $*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(G))$, αφού η λ είναι $*$-αναπαράσταση του $L^1(G)$ στον $L^2(G)$. Συνεπώς, η WOT-κλειστή θήκη (δηλαδή, ως προς την weak operator topology) της άλγεβρας $\lambda(L^1(G))$ στην $\mathcal{B}(L^2(G))$ είναι μια von Neumann-άλγεβρα, η οποία περιέχει προφανώς την $C_r^*(G)$.

Ορισμός 4.1.5. Η von Neumann-άλγεβρα $\overline{\lambda(L^1(G))}^{WOT} \subset \mathcal{B}(L^2(G))$ καλείται η (αριστερή) **von Neumann-άλγεβρα της G** και συμβολίζεται με $VN(G)$.

Με άλλα λόγια, ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(L^2(G))$ ανήκει στην $VN(G)$ αν και μόνον αν υπάρχει δίκτυο $(f_a)_{a\in A}$ στον $L^1(G)$, ώστε να ισχύει:

$$\langle Tg, h\rangle = \lim_{a\in A}\langle \lambda(f_a)g, h\rangle = \lim_{a\in A}\langle f_a * g, h\rangle \ , \quad \forall g, h \in L^2(G).$$

4.2 Η C^*-άλγεβρα μιας αβελιανής ομάδας

Σε αυτήν την παράγραφο, θα δούμε μια ενδιαφέρουσα περιγραφή της $C^*(G)$ για μια αβελιανή τοπικά συμπαγή ομάδα Hausdorff G, χρησιμοποιώντας το μεταθετικό θεώρημα Gelfand (βλ. [11, Theorem 2.1.10]).

Ας θεωρήσουμε μια αβελιανή τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G. Επειδή η G είναι unimodular, δηλαδή $\Delta_G \equiv 1$, χάρη στις ιδιότητες του μέτρου Haar και την μεταθετικότητα της G, παίρνουμε:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(y^{-1})g(yx)dy$$

$$= \int_G f(xy^{-1})g(y)dy = \int_G g(y)f(y^{-1}x)dy = (g * f)(x),$$

για κάθε $x \in G$ και κάθε $f, g \in L^1(G)$. Δηλαδή, αν η G είναι αβελιανή, τότε η άλγεβρα $L^1(G)$ είναι αβελιανή και κατά συνέπεια το ίδιο και η $C^*(G)$.

Ορισμός 4.2.1. Για μια αβελιανή τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G, θέτουμε:

$$\widehat{G} := \{\xi\colon G \to \mathbb{T} \mid \xi \text{ συνεχής ομομορφισμός ομάδων}\}.$$

Το $\widehat{G}$ καλείται **σύνολο χαρακτήρων** της G.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των χαρακτήρων μιας αβελιανής τοπικά συμπαγούς ομάδας G, είναι στην ουσία το σύνολο των unitary αναπαραστάσεων της G στο $\mathbb{C}$ (αρκεί να κάνουμε τις ταυτίσεις $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ και $\mathcal{U}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{T}$). Έτσι, επειδή ισχύει προφανώς $\langle \xi(x)1, 1\rangle_{\mathbb{C}} = \xi(x)$, για κάθε $x \in G$, απ' την Πρόταση 3.3.3, έπεται ότι

$$\widehat{G} \subset \mathcal{P}_1(G)$$

και $\widehat{G} \neq \varnothing$, αφού περιέχει τουλάχιστον την τετριμμένη αναπαράσταση ι διάστασης 1.

Επιπλέον, απ' το Θεώρημα 4.1.3 υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\widehat{G}$ (των unitary αναπαραστάσεων της G στο $\mathbb{C}$) και του συνόλου των μη εκφυλισμένων $*$-αναπαραστάσεων της $C^*(G)$ στο $\mathbb{C}$, το οποίο είναι ίσο με το φάσμα της $C^*(G)$. Πιο συγκεκριμένα, κάθε $\xi \in \widehat{G}$ ορίζει ένα μοναδικό χαρακτήρα της $C^*(G)$ ως εξής:

$$\xi(f) = \int_G f(x)\xi(x)dx \ , \quad (f \in L^1(G))$$

και αντιστρόφως, κάθε χαρακτήρας προκύπτει όπως παραπάνω.

Επίσης, απ' το Θεώρημα 3.4.4, έπεται ότι το $\widehat{G}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G είναι ομοιομορφικό με το φάσμα της $C^*(G)$, το οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με την w^*-τοπολογία. Ακόμη, απ' το ίδιο θεώρημα, προκύπτει ότι το σύνολο $\widehat{G} \cup \{0\}$ είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $L^\infty(G)$ και άρα w^*-συμπαγές (απ' το Θεώρημα Αλάογλου).

Άρα, έχουμε δείξει την εξής:

Πρόταση 4.2.2. Έστω G αβελιανή τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Τότε, το $\widehat{G}$ με την τοπολογία της σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G ή, ισοδύναμα, με την w^*-τοπολογία που κληρονομεί ως υποσύνολο του $L^\infty(G) = L^1(G)^*$, είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, ομοιομορφικός με το φάσμα της $C^*(G)$, εφοδιασμένο με την w^*-τοπολογία.

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι το $\widehat{G}$ με πράξη τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό είναι αβελιανή ομάδα με μονάδα την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ και επιπλέον η πράξη αυτή είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G. Έτσι, το $\widehat{G}$ είναι μια αβελιανή τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα, η οποία καλείται η **δυϊκή ομάδα** της G.

Επομένως, η Πρόταση 4.2.2, σε συνδυασμό με το μεταθετικό θεώρημα Gelfand, μας δίνει το εξής:

Θεώρημα 4.2.3. Για μια αβελιανή τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G, οι C^*-άλγεβρες $C^*(G)$ και $\left(C_0(\widehat{G}), \|\cdot\|_\infty\right)$ είναι ισομετρικά $*$-ισόμορφες. Ειδικότερα, κάθε $f \in L^1(G)$ ταυτίζεται με την συνάρτηση $\hat{f} \in C_0(\widehat{G})$, όπου

$$\hat{f}(\xi) = \xi(f) = \int_G f(x)\xi(x)dx \ , \quad \forall \xi \in \widehat{G}.$$

4.3 Οι άλγεβρες Fourier και Fourier-Stieltjes μιας ομάδας

Έστω G μια τοπικά συμπαγής Hausdorff ομάδα. Θα δούμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε τον δυϊκό χώρο Banach $C^*(G)^*$ της C^*-άλγεβρας της G, χρησιμοποιώντας τις συνεχείς θετικά ορισμένες συναρτήσεις της G.

Απ' την διάσπαση Jordan (βλ. [11, Theorem 3.3.10 (Jordan decomposition)]) γνωρίζουμε ότι ο δυϊκός χώρος Banach μιας C^*-άλγεβρας παράγεται γραμμικά από τα θετικά γραμμικά συναρτησοειδή της άλγεβρας. Συνεπώς, αρκεί να δούμε την σύνδεση μεταξύ των θετικών γραμμικών συναρτησοειδών της $C^*(G)$ και των θετικά ορισμένων συνεχών συναρτήσεων της G.

Ας θεωρήσουμε ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $u \in C^*(G)^*$. Τότε, προφανώς ισχύει:

$$u(f^* * f) \geq 0 \ , \quad \forall f \in L^1(G)$$

και παρατηρούμε επιπλέον ότι $u|_{L^1(G)} \in (L^1(G), \|\cdot\|_1)^*$, διότι

$$|u(f)| \leq \|u\|\|f\|_* \leq \|u\|\|f\|_1 \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Επομένως, καθώς $L^\infty(G) = L^1(G)^*$, έπεται ότι υπάρχει μοναδική $\phi \in L^\infty(G)$ τέτοια, ώστε

$$u(f) = \langle \phi, f \rangle = \int_G f(x)\phi(x)dx \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Όμως, για $f \in L^1(G)$ έχουμε:

$$\int_G (f^* * f)(x)\phi(x)dx = u(f^* * f) \geq 0$$

και άρα η ϕ είναι θετικού τύπου. Έτσι, απ' το Πόρισμα 3.3.6, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ϕ είναι συνεχής και φραγμένη και άρα θετικά ορισμένη (βλ. και Πρόταση 3.5.2).
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει μοναδική συνεχής φραγμένη και θετικά ορισμένη $\phi\colon G \to \mathbb{C}$, ώστε

$$u(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Αντιστρόφως, αν $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής φραγμένη και θετικά ορισμένη συνάρτηση, τότε η ϕ είναι θετικού τύπου (Πρόταση 3.5.2) και άρα, απ' το Θεώρημα 3.3.5, έπεται ότι υπάρχει unitary αναπαράσταση $(\pi, \mathcal{H})$ της G με κυκλικό διάνυσμα $\xi \in \mathcal{H}$, ώστε:

$$\phi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle \ , \quad \forall x \in G.$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $u_0\colon L^1(G) \to \mathbb{C}$ με $u_0(f) := \int_G f\phi$, για $f \in L^1(G)$, είναι γραμμική και $\|\cdot\|_*$-συνεχής, αφού

$$|u_0(f)| = \left| \int_G f(x)\langle \pi(x)\xi, \xi \rangle dx \right| = |\langle \pi(f)\xi, \xi \rangle| \leq \|\pi(f)\|\|\xi\|^2 \leq \|f\|_*\|\xi\|^2$$

για κάθε $f \in L^1(G)$. Επομένως, επειδή ο $L^1(G)$ είναι πυκνός στην $C^*(G)$, η u_0 επεκτείνεται μοναδικά σε ένα $u \in C^*(G)^*$, για το οποίο ισχύει

$$u(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx \ , \quad \forall f \in L^1(G)$$

και επιπλέον

$$u(f^* * f) = \langle \pi(f^* * f)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(f)^*\pi(f)\xi, \xi \rangle = \|\pi(f)\|^2 \geq 0 \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Συνεπώς, πάλι απ' την πυκνότητα του $L^1(G)$ στην $C^*(G)$, έπεται ότι το u είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές της $C^*(G)$.

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνεχών φραγμένων θετικά ορισμένων συναρτήσεων της G και των θετικών γραμμικών συναρτησοειδών της $C^*(G)$. Άρα, απ' το θεώρημα Hahn-Jordan, έπεται ότι ο $C^*(G)^*$ ταυτίζεται με την γραμμική θήκη του συνόλου των θετικά ορισμένων συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων της G, την οποία στο εξής θα το συμβολίζουμε με $B(G)$. Προφανώς, ο γραμμικός χώρος $B(G)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $C_b(G)$ και εφοδιασμένος με την δυϊκή νόρμα:

$$\|\phi\|_{B(G)} := \sup\{|\langle \phi, f\rangle| : f \in L^1(G),\ \|f\|_* \leq 1\} \text{ ,όπου } \langle \phi, f\rangle := \int_G f\phi,$$

είναι ένας χώρος Banach, ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $C^*(G)^*$.

Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $f \in L^2(G)$, η $f * \tilde{f}$ (όπου $\tilde{f}(x) := \overline{f(x^{-1})}$) είναι συνεχής φραγμένη και θετικά ορισμένη, αφού απ' το Πόρισμα 3.3.4 έχουμε:

$$(f * \tilde{f})(x) = \langle \lambda_x \bar{f}, \bar{f}\rangle \ , \quad \forall x \in G.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δειχθεί ότι, για κάθε $g, h \in L^2(G)$, ισχύει:

$$g * \tilde{h} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (g + i^k h) * (g + i^k h)\tilde{}$$

και άρα $g * \tilde{h} \in B(G)$, για κάθε $g, h \in L^2(G)$.

Πρόταση 4.3.1. Το σύνολο $\{g * \tilde{h} : g, h \in L^2(G)\}$ είναι πυκνή $*$-υπάλγεβρα της αβελιανής C^*-άλγεβρας $(C_0(G), \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων της G που μηδενίζονται στο άπειρο.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.1 παραπέμπουμε στο [21, Κεφάλαιο VII, Λήμμα 3.7]. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη αυτή στηρίζεται στην ιδέα ότι το $\{g * \tilde{h} : g, h \in L^2(G)\}$ μπορεί να ταυτιστεί με τον προδυϊκό χώρο $VN(G)_*$ της von Neumann-άλγεβρας $VN(G)$ της G. Εναλλακτικά, παραπέμπουμε στο paper του P. Eymard, [6, Κεφάλαιο 3, Πρόταση (3.7)].

Ορισμός 4.3.2. Συμβολίζουμε με $A(G)$ την $\|\cdot\|_{B(G)}$-κλειστή θήκη του γραμμικού υπόχωρου $\{g * \tilde{h} : g, h \in L^2(G)\}$ του $B(G)$. Δηλαδή:

$$A(G) := \overline{\{g * \tilde{h} : g, h \in L^2(G)\}}^{\|\cdot\|_{B(G)}} \subset B(G).$$

Απ' την Πρόταση 4.3.1 και το γεγονός ότι $g * \tilde{h} \in B(G)$, για κάθε $g, h \in L^2(G)$, έπεται ότι ο χώρος $A(G)$ είναι πράγματι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $B(G)$. Στο εξής, θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{A(G)}$ την νόρμα που κληρονομεί η $A(G)$ από την $B(G)$, δηλαδή:

$$\|u\|_{A(G)} := \|u\|_{B(G)} \ , \quad \forall u \in A(G).$$

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 4.3.3. Για τους χώρους $A(G)$ και $B(G)$ ισχύουν τα εξής:

(α) Ο χώρος Banach $B(G)$, με την νόρμα $\|\cdot\|_{B(G)}$ που έχει θεωρούμενος ως δυϊκός της $C^*(G)$, είναι $*$-άλγεβρα Banach ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό και ενέλιξη $\phi^*(x) := \overline{\phi(x)}$, για $x \in G$ και $\phi \in B(G)$.

(β) Ο χώρος $A(G)$ είναι κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας $B(G)$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.3 παραπέμπουμε στο [21, Κεφάλαιο VII, Πρόταση 3.24] και στο [6, Κεφάλαιο 3, Πρόταση (3.4)].

Σημειώνουμε ότι η άλγεβρα $A(G)$ ονομάζεται **άλγεβρα Fourier** της G, ενώ η άλγεβρα $B(G)$ καλείται **άλγεβρα Fourier-Stieltjes** της G.

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και χρήσιμη ιδιότητα της άλγεβρας Fourier $A(G)$ είναι ότι ο δυϊκός χώρος Banach $(A(G), \|\cdot\|_{A(G)})^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με την von Neumann-άλγεβρα $VN(G)$ της G. Μάλιστα, έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.4. Για κάθε τελεστή $T \in VN(G)$, υπάρχει μοναδικό $\Phi_T \in A(G)^*$, ώστε

$$\Phi_T(h * \tilde{g}) = \langle T\overline{g}, \overline{h}\rangle \ , \quad \forall g, h \in L^2(G),$$

δηλαδή:

$$\Phi_T(u) = \langle Tg, h\rangle \ , \text{ αν } u \in A(G) \text{ με } u(x) = \langle \lambda_x g, h\rangle \ , \ g, h \in L^2(G), x \in G.$$

Επίσης, η απεικόνιση $VN(G) \to A(G)^* : T \longmapsto \Phi_T$ είναι ισομετρικός γραμμικός ισομορφισμός.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4 παραπέμπουμε πάλι στον P. Eymard, [6, Κεφάλαιο 3, Θεώρημα(3.10)].

Τέλος, ως συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.4, έχουμε:

Πρόταση 4.3.5. Για κάθε $f \in L^1(G)$, ο τελεστής $\lambda(f) \in \mathcal{B}(L^2(G))$ έχει νόρμα:

$$\|\lambda(f)\| = \sup\{|\langle u, f\rangle| : u \in A(G), \ \|u\|_{A(G)} \leq 1\},$$

όπου $\langle u, f\rangle := \int_G f(x)u(x)dx$ ($f \in L^1(G)$, $u \in A(G)$).

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(G)$ και $T := \lambda(f)$. Τότε, απ' τον ορισμό της $VN(G)$, έχουμε ότι $T \in VN(G)$ και επιπλέον, από το Θεώρημα 4.3.4, έπεται ότι:

$$\|\lambda(f)\| = \|\Phi_{\lambda(f)}\|_{A(G)^*} = \sup\{|\Phi_{\lambda(f)}(u)| : u \in A(G), \ \|u\|_{A(G)} \leq 1\}.$$

Έστω $u \in A(G)$ με $u = h * \tilde{g}$, για κάποιες $g, h \in L^2(G)$. Τότε, έχουμε:

$$\Phi_{\lambda(f)}(u) = \langle \lambda(f)\overline{g}, \overline{h}\rangle = \int_G f(x)\langle \lambda_x \overline{g}, \overline{h}\rangle dx = \int_G f(x)(h * \tilde{g})(x)dx$$

$$= \int_G f(x)u(x)dx$$

και επομένως, επειδή το $\{h * \tilde{g} : g, h \in L^2(G)\}$ είναι $\|\cdot\|_{A(G)}$-πυκνό στην $A(G)$, έπεται ότι:

$$\|\lambda(f)\| = \sup\left\{\left|\int_G f(x)u(x)dx\right| : u \in A(G),\ \|u\|_{A(G)} \leq 1\right\}.$$

□

4.4 Χαρακτηρισμός των amenable ομάδων μέσω C^*-αλγεβρών

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε, όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου, ότι μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff G είναι amenable αν και μόνον αν η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα (ισοδύναμα ισομετρία).

Για την απόδειξη της παραπάνω ισοδυναμίας θα χρειασθούμε κάποια πορίσματα απ' την θεωρία των $*$-αναπαραστάσεων C^*-αλγεβρών.

Θεωρούμε γνωστό το Θεώρημα Krein-Milman, το οποίο διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 4.4.1 (Krein-Milman)**.** Έστω C ένα μη κενό κυρτό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού γραμμικού τοπολογικού χώρου Hausdorff X. Τότε, το σύνολο $E := \{x \in C : x = ty + (1-t)z,\ 0 < t < 1,\ y, z \in C \implies x = y = z\}$ των ακραίων σημείων του C είναι μη κενό και ισχύει

$$C = \overline{\mathrm{conv}(E)}.$$

Επιπλέον, αν S είναι ένα κλειστό υποσύνολο του C, ώστε $C = \overline{\mathrm{conv}(S)}$, τότε $E \subset S$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Krein-Milman ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [11, Appendix, Theorem A.14] και [12, Θεώρημα 14.41].

Ορισμός 4.4.2. Έστω A μια C^*-άλγεβρα. Ένα state τ της A καλείται **pure state** αν για κάθε θετικό γραμμικό συναρτησοειδές ρ της A τέτοιο, ώστε $\tau \geq \rho$ (δηλ. το $\tau - \rho$ να είναι θετικό), υπάρχει $t \in [0,1]$ ώστε $\rho = t\tau$. Συμβολίζουμε το σύνολο των pure states της A με $PS(A)$.

Με βάση τον ορισμό αυτό προκύπτει εύκολα το εξής:

Θεώρημα 4.4.3. Αν A είναι μια C^*-άλγεβρα και $S := \{\phi \in A^* : \|\phi\| \leq 1,\ \phi \geq 0\}$, τότε το S είναι κυρτό w^*-συμπαγές υποσύνολο του A^* και το σύνολο των ακραίων σημείων του S ισούται με το $PS(A) \cup \{0\}$, δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από το μηδενικό συναρτησοειδές και τα pure states της A.

Απόδειξη. Προφανώς το S είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του A^* και άρα, απ' το θεώρημα Αλάογλου, w^*-συμπαγές. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι είναι και κυρτό.
Έστω E το σύνολο των ακραίων σημείων του S.
Παρατηρούμε πρώτα ότι $0 \in E$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $0 = t\tau + (1-t)\rho$, με $t \in (0,1)$ και $\tau, \rho \in S$. Αν $a \in A$, τότε $0 \geq -t\tau(a^*a) = (1-t)\rho(a^*a) \geq 0$ και επομένως $\tau = \rho = 0$ στα θετικά στοιχεία της A, άρα και σε όλη την A. Δηλαδή, $0 \in E$.
Δεύτερον, δείχνουμε ότι $PS(A) \subset E$. Πράγματι, αν $\rho \in PS(A)$ και $\rho = t\tau + (1-t)\tau'$, όπου $t \in (0,1)$ και $\tau, \tau' \in S$, τότε $t\tau \geq 0$ και $t\tau \leq \rho$. Επομένως, υπάρχει $t' \in [0,1]$, ώστε $t\tau = t'\rho$. Όμως, έχουμε

$$1 = \|\rho\| = t\|\tau\| + (1-t)\|\tau'\| \implies \|\tau\| = \|\tau'\| = 1$$

$$\implies t = \|t\tau\| = \|t'\rho\| = t' \implies \tau = \rho.$$

Έτσι, προκύπτει $(1-t)\tau' = (1-t)\rho$, και άρα $\tau' = \rho$. Δηλαδή, $\rho \in E$.
Τέλος, υποθέτουμε ότι $\rho \in E \setminus \{0\}$. Επειδή $\rho = \|\rho\|(\rho/\|\rho\|) + (1 - \|\rho\|)0$ και $0, \rho/\|\rho\| \in S$, έπεται ότι $\|\rho\| = 1$, διότι $\rho \in E$. Έτσι, αν τ είναι μη μηδενικό θετικό γραμμικό συναρτησοειδές της A με $\tau \leq \rho$ και $\tau \neq \rho$, τότε για $t := \|\tau\| \in (0,1)$ έχουμε $\rho = t(\tau/\|\tau\|) + (1-t)(\rho - \tau)/\|\rho - \tau\|$, αφού $\|\rho - \tau\| = 1 - t$. Άρα, εφ' όσον $\rho \in E$, έπεται ότι $\rho = \tau/\|\tau\|$ και άρα $\tau = \|\tau\|\rho = t\rho$ και $0 < t < 1$.

□

Πρόταση 4.4.4. Έστω B μια C^*-υπάλγεβρα μιας C^*-άλγεβρας A. Για κάθε $\rho \in PS(B)$ υπάρχει $\rho' \in PS(A)$, με $\rho'|_B = \rho$.

Απόδειξη. Έστω $\rho \in PS(B)$. Θεωρούμε το σύνολο F όλων των states της A που επεκτείνουν το ρ. Τότε, το F είναι μη κενό κυρτό και w^*-συμπαγές υποσύνολο του συνόλου S των θετικών γραμμικών συναρτησοειδών της A με νόρμα ≤ 1. Τότε, απ' το Θεώρημα Krein-Milman (4.4.1), έπεται ότι το F έχει ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο, έστω ρ', το οποίο είναι και ακραίο σημείο του S. Εφ' όσον $\rho' \neq 0$ (διότι $0 \notin F$), απ' το Θεώρημα 4.4.3, έπεται ότι $\rho' \in PS(A)$.

□

Θεώρημα 4.4.5. Έστω A μια C^*-άλγεβρα με μονάδα e_A και $S(A)$ το σύνολο των states της A. Υποθέτουμε ότι S είναι ένα υποσύνολο του $S(A)$ με την ιδιότητα: αν για ένα αυτοσυζυγές $a \in A$ ισχύει $\tau(a) \geq 0$, $\forall \tau \in S$, τότε $a \geq 0$. Τότε, $S(A) = \overline{\mathrm{conv}(S)}^{w^*}$ και $PS(A) \subset \overline{S}^{w^*}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $C := \overline{\mathrm{conv}(S)}^{w^*}$. Απ' το Θεώρημα 4.4.3, έπεται ότι το $PS(A)$ είναι το σύνολο των ακραίων σημείων του $S(A)$ και επομένως, από το Θεώρημα 4.4.1, αν δείξουμε ότι $S(A) = C$, τότε θα έχουμε επίσης ότι $PS(A) \subset \overline{S}^{w^*}$.
Ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $C \neq S(A)$. Τότε, επειδή προφανώς ισχύει $C \subset S(A)$, υπάρχει $\tau \in S(A)$, με $\tau \notin C$. Τότε, απ' το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, προκύπτει ότι υπάρχουν $t \in \mathbb{R}$ και ένα w^*-συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές του A^*, δηλαδή ένα $a \in A$, τέτοια, ώστε:

$$\mathrm{Re}(\tau(a)) > t > \mathrm{Re}(\rho(a)) \ , \quad \forall \rho \in C.$$

Θέτουμε $b := \frac{1}{2}(a^* + a)$. Τότε, $\mathrm{Re}(\rho(a)) = \rho(b)$, για κάθε $\rho \in S(A)$. Συνεπώς, για κάθε $\rho \in C$, έχουμε:

$$\rho(te_A - b) = t\rho(e_A) - \rho(b) = t - \mathrm{Re}(\rho(a)) > 0 \ , \quad \forall \rho \in C$$

και άρα το αυτοσυζυγές στοιχείο $te_A - b$ της A έχει την ιδιότητα: $\rho(te_A - b) \geq 0$, για κάθε $\rho \in S$, αφού $S \subset C$. Επομένως, απ' την υπόθεση για το S, έπεται ότι $te_A - b \geq 0$, άρα $\tau(te_A - b) \geq 0$, δηλαδή $t \geq \tau(b) = \mathrm{Re}(\tau(a)) > t$, το οποίο είναι άτοπο.

□

Συμβολισμός: Για ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και ένα $\xi \in \mathcal{H}$, θέτουμε

$$\omega_\xi \colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \colon \omega_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle.$$

Προφανώς, η απεικόνιση ω_ξ είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές της C^*-άλγεβρας $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, με νόρμα $\|\omega_\xi\| = \|\xi\|^2$. Επομένως, αν $\|\xi\| = 1$, τότε το ω_ξ είναι ένα state της $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Θεώρημα 4.4.6. Έστω A μια C^*-άλγεβρα και $\pi \colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια μη εκφυλισμένη (non degenerate) $*$-αναπαράσταση της A, όπου $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Έστω ακόμη ένα $\rho \in PS(A)$, με την ιδιότητα:

$$\ker \pi \subset \ker \rho.$$

Τότε, $\rho \in \overline{\{\omega_\xi \circ \pi : \xi \in \mathcal{H}, \ \|\xi\| = 1\}}^{w^*}$, δηλαδή το ρ είναι w^*-όριο από states της μορφής:

$$A \to \mathbb{C} : a \longmapsto \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ , \qquad (\xi \in \mathcal{H}, \ \|\xi\| = 1).$$

Απόδειξη. Έστω $S := \{\omega_\xi \circ \pi : \xi \in \mathcal{H},\ \|\xi\| = 1\}$. Παρατηρούμε ότι $S \subset S(A)$, όπου $S(A)$ το σύνολο των states της A.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ker\pi = \{0\}$. Διαφορετικά αντικαθιστούμε την A με την C^*-άλγεβρα πηλίκο $A/\ker\pi$ (ο πυρήνας $\ker\pi$ είναι κλειστό ιδεώδες της A) και την π με την επίσης μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση:

$$\dot{\pi}\colon A/\ker\pi \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \dot{\pi}(a + \ker\pi) = \pi(a) \ , \quad (a \in A).$$

Έστω, λοιπόν, ότι $\ker\pi = \{0\}$, δηλαδή ότι η π είναι ένα προς ένα.
Συμβολίζουμε με $\tilde{A}$ την μοναδοποίηση $A \oplus \mathbb{C}$ της A και με $\tilde{\pi}$ τον (μοναδικό) $*$-ομομορφισμό απ' την $\tilde{A}$ στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ που επεκτείνει την π και ικανοποιεί $\tilde{\pi}((0,1)) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Επίσης, για κάθε state τ της A, συμβολίζουμε με $\tilde{\tau}$ το (μοναδικό) state της $\tilde{A}$ που επεκτείνει το τ. Παρατηρούμε ότι αν $\tau = \omega_\xi \circ \pi \in S$, τότε $\tilde{\tau} = \omega_\xi \circ \tilde{\pi}$.
Ας υποθέσουμε ότι η A δεν έχει μονάδα και έστω $a \in A$ και $\mu \in \mathbb{C}$, ώστε $a + \mu \in \ker\tilde{\pi}$. Τότε, για κάθε $b \in A$, έχουμε $ab + \mu b = 0$. Πράγματι, για κάθε $b \in A$ ισχύει $ab + \mu b \in A$ και $\pi(ab+\mu b) = \tilde{\pi}(ab+\mu b) = 0$, αφού $a + \mu \in \ker\tilde{\pi}$, συνεπώς $ab + \mu b \in \ker\pi = \{0\}$, δηλαδή $ab + \mu b = 0$. Επομένως, αν $\mu \neq 0$, τότε το $\left(\frac{-1}{\mu}\right) a \in A$ θα ήταν μονάδα της A, το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση. Άρα, πρέπει $\mu = 0$. Επομένως, $\ker\tilde{\pi} \subset A$ και άρα αν $x \in \ker\tilde{\pi}$, τότε $x \in A$ και $\pi(x) = \tilde{\pi}(x) = 0$, δηλαδή $x \in \ker\pi = \{0\} \iff x = 0$. Έτσι, δείξαμε ότι αν η A δεν έχει μονάδα, τότε $\ker\tilde{\pi} = \{0\}$.
Με βάση όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι για την απόδειξη του θεωρήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η A έχει μονάδα, αντικαθιστώντας αν χρειάζεται την A με την $\tilde{A}$, την π με την $\tilde{\pi}$ και το ρ με το $\tilde{\rho}$. Παρατηρούμε, επιπλέον, ότι το $\tilde{\rho}$ είναι pure state της $\tilde{A}$, απ' την Πρόταση 4.4.4.
Έστω, λοιπόν, ότι η A έχει μονάδα και ας θεωρήσουμε ένα τυχόν αυτοσυζυγές στοιχείο $a \in A$ τέτοιο, ώστε $\tau(a) \geq 0$, για κάθε $\tau \in S$. Τότε, από τον ορισμό του S, προκύπτει:

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \geq 0 \ , \quad \forall \xi \in \mathcal{H},\ \text{με } \|\xi\| = 1.$$

Επομένως, ο τελεστής $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι θετικός και άρα $a \geq 0$, αφού η π είναι $*$-μονομορφισμός.
Έτσι, από το Θεώρημα 4.4.5, προκύπτει ότι $PS(A) \subset \overline{S}^{w^*}$.

□

Πόρισμα 4.4.7. Έστω A μια C^*-άλγεβρα, $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $\sigma\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ δύο μη εκφυλισμένες $*$-αναπαραστάσεις της A (οι $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ είναι χώροι Hilbert) τέτοιες, ώστε:

$$\ker\pi \subset \ker\sigma.$$

Τότε κάθε pure state ρ της A, της μορφής $\rho(a) = \langle \sigma(a)\eta, \eta \rangle$, για κάθε $a \in A$, όπου $\eta \in \mathcal{K}$ με $\|\eta\| = 1$, είναι w^*-όριο από states της μορφής:

$$A \to \mathbb{C} : a \longmapsto \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ , \qquad (\xi \in \mathcal{H}, \ \|\xi\| = 1).$$

Απόδειξη. Έστω ρ ένα pure state της A με $\rho(a) = \langle \sigma(a)\eta, \eta \rangle$, για κάθε $a \in A$, όπου $\eta \in \mathcal{K}$ με $\|\eta\| = 1$. Τότε, προφανώς $\ker \sigma \subset \ker \rho$. Όμως, εξ υποθέσεως έχουμε ότι $\ker \pi \subset \ker \sigma$ και άρα $\ker \pi \subset \ker \rho$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 4.4.6 έπεται ότι το ρ ανήκει στην w^*-κλειστή θήκη των states της μορφής $a \mapsto \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, όπου $\xi \in \mathcal{H}, \ \|\xi\| = 1$.

□

Σε κάθε τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα G έχουμε επισυνάψει δύο C^*-άλγεβρες, τις $C^*(G)$ και $C_r^*(G)$. Απ' τον ορισμό της, η $C_r^*(G)$ είναι η εικόνα της επέκτασης στην $C^*(G)$ της αριστερής κανονικής αναπαράστασης της G (βλ. Θεώρημα 4.1.3):

$$\lambda \colon C^*(G) \twoheadrightarrow C_r^*(G) \subset \mathcal{B}(L^2(G)) \ , \ \lambda(f)g = f * g, \quad \forall f \in L^1(G).$$

Άρα, η $C_r^*(G)$ είναι ισομετρικά $*$-ισόμορφη με την άλγεβρα πηλίκο $C^*(G) / \ker \lambda$.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, από την μια μεριά, η $C^*(G)$ είναι κατηγορικά καλή, με την έννοια ότι οι unitary αναπαραστάσεις της G σε ένα χώρο Hilbert είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τις μη εκφυλισμένες $*$-αναπαραστάσεις της $C^*(G)$ (Θεώρημα 4.1.3) στον ίδιο χώρο, αλλά αποτελεί ένα αρκετά αφηρημένο αντικείμενο. Από την άλλη, η $C_r^*(G)$ είναι πιο εύκολα χειρίσιμη, καθώς μας επιτρέπει τον υπολογισμό της νόρμας της, αλλά εν γένει οι αναπαραστάσεις της μπορεί να μην είναι αρκετές για την μελέτη των unitary αναπαραστάσεων της G.

Επομένως, το ιδανικό σενάριο για μια ομάδα G, όπως παραπάνω, θα ήταν η $\lambda \colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ να είναι ένα προς ένα (ισοδύναμα ισομετρία), ισοδύναμα να ισχύει $\ker \lambda = \{0\}$. Σε αυτήν την περίπτωση οι $C^*(G)$ και $C_r^*(G)$ ουσιαστικά θα ταυτίζονται.

Έτσι, λοιπόν, τίθεται το ερώτημα «για ποιες ομάδες το παραπάνω σενάριο γίνεται πραγματικότητα;». Η δε απάντηση είναι τόσο αναπάντεχη όσο και ενδιαφέρουσα:

Θεώρημα 4.4.8. Έστω G μια τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η G είναι amenable.

(β) Η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda \colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα.

Απόδειξη. (α)⇒(β): Έστω ότι η G είναι amenable. Τότε, από το Θεώρημα 2.2.1, υπάρχει ένα δίκτυο $(g_a)_{a\in A}$ στον $L^2(G)$, με $\|g_a\|_2 = 1$, για κάθε $a \in A$, τέτοιο, ώστε η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$ να είναι το όριο των $g_a * \tilde{g}_a$, ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της G, δηλαδή, για κάθε $K \subset G$ συμπαγές, ισχύει:

$$\lim_a (g_a * \tilde{g}_a)(x) = 1 \ , \ \text{ομοιόμορφα για } x \in K.$$

Θα δείξουμε ότι η λ είναι ισομετρία στην $C^*(G)$.
Επειδή $\|f\|_* \leq \|f\|_1$, για κάθε $f \in C_c(G) \subset L^1(G)$, έπεται ότι:

$$L^1(G) = \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_1} \subset \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_*}$$

και άρα ο $C_c(G)$ είναι $\|\cdot\|_*$-πυκνός στην $C^*(G)$, αφού ο $L^1(G)$ είναι. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\|f\|_* = \|\lambda(f)\|_{\mathcal{B}(L^2(G))} \ , \quad \forall f \in C_c(G).$$

Αφού ισχύει πάντα $\|\lambda(f)\| \leq \|f\|_*$, αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα.
Έστω, λοιπόν, $f \in C_c(G)$ με $K := \text{supp}(f)$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, έπεται ότι υπάρχει $\phi \in C^*(G)^* = B(G)$, ώστε:

$$\|\phi\|_{B(G)} = 1 \text{ και } \|f\|_* = \langle \phi, f \rangle = \int_G f(x)\phi(x)dx.$$

Εφ' όσον $\lim_a (g_a * \tilde{g}_a)(x) = 1$, ομοιόμορφα για $x \in K$, έχουμε:

$$\langle \phi, f \rangle = \int_G f(x)\phi(x)dx = \lim_a \int_G f(x)\phi(x)(g_a * \tilde{g}_a)(x)dx.$$

Επίσης, καθώς η $A(G)$ είναι ιδεώδες της $B(G)$, έχουμε, για κάθε $a \in A$, $\phi \cdot (g_a * \tilde{g}_a) \in A(G)$ και επιπλέον:

$$\|\phi \cdot (g_a * \tilde{g}_a)\|_{A(G)} \leq \|\phi\|_{B(G)} \|g_a * \tilde{g}_a\|_{A(G)} = \|g_a * \tilde{g}_a\|_{A(G)} =$$

$$= \sup\{|\langle g_a * \tilde{g}_a, h \rangle| : h \in L^1(G), \ \|h\|_* \leq 1\}.$$

Όμως, για κάθε $h \in L^1(G)$, με $\|h\|_* \leq 1$, έχουμε:

$$|\langle g_a * \tilde{g}_a, h \rangle| = \left| \int_G h(x)(g_a * \tilde{g}_a)(x)dx \right| = \left| \int_G h(x)\langle \lambda_x \bar{g}_a, \bar{g}_a \rangle dx \right|$$

$$= |\langle \lambda(h)\bar{g}_a, \bar{g}_a \rangle| \leq \|\lambda(h)\| \|\bar{g}_a\|_2^2 \leq \|h\|_* \leq 1.$$

Άρα, για κάθε $a \in A$, έχουμε:

$$\|\phi \cdot (g_a * \tilde{g}_a)\|_{A(G)} \leq 1.$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\|f\|_* = \langle \phi, f \rangle = \lim_a \int_G f(x)\phi(x)(g_a * \tilde{g}_a)dx \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \left| \int_G f(x)u(x) \right| : u \in A(G),\ \|u\|_{A(G)} \leq 1 \right\}.$$

Απ' την Πρόταση 4.3.5, το τελευταίο supremum είναι ακριβώς ίσο με την νόρμα $\|\lambda(f)\|$ του τελεστή $\lambda(f) \in \mathcal{B}(L^2(G))$. Άρα, δείξαμε ότι $\|f\|_* \leq \|\lambda(f)\|$ και κατά συνέπεια ότι $\|f\|_* = \|\lambda(f)\|$, για κάθε $f \in C_c(G)$, που ήταν το ζητούμενο.

(β)⇒(α): Υποθέτουμε ότι η $\lambda\colon C^*(G) \to C_r^*(G) \subset \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα. Επειδή κάθε $*$-μονομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών είναι ισομετρία, προκύπτει ότι:

$$\|f\|_* = \|\lambda(f)\| \ , \quad \forall f \in C^*(G).$$

Υπενθυμίζουμε ότι η τετριμμένη (unitary) αναπαράσταση της G στο $\mathbb{C}$

$$\iota\colon G \to \mathcal{U}(\mathbb{C}) = \mathbb{T}, \quad \iota(x) = 1 \qquad (x \in G),$$

επεκτείνεται στην μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση του $L^1(G)$:

$$\iota\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad \iota(f)\xi = \int_G f(x)\iota(x)\xi dx = \int_G f(x)dx \cdot \xi.$$

όπου $\xi \in \mathbb{C}$, $f \in L^1(G)$. Η ι ασφαλώς επεκτείνεται μοναδικά σε μια μη εκφυλισμένη $*$-αναπαράσταση της $C^*(G)$ στο $\mathbb{C}$, την οποία συμβολίζουμε επίσης με το γράμμα ι.
Παρατηρούμε ότι, για κάθε $f \in C^*(G)$, έχουμε:

$$\|\iota(f)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C})} \leq \|f\|_* = \|\lambda(f)\|$$

και άρα

$$\ker \lambda \subset \ker \iota.$$

Επομένως, από το Πόρισμα 4.4.7, έχουμε ότι κάθε pure state της $C^*(G)$ της μορφής

$$f \longmapsto \langle \iota(f)\eta, \eta \rangle_{\mathbb{C}} \ , \quad \eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1 \qquad (1)$$

είναι w^*-όριο από states της μορφής

$$f \longmapsto \langle \lambda(f)\xi, \xi \rangle \ , \quad \xi \in L^2(G)\ \ \|\xi\|_2 = 1. \qquad (2)$$

Όμως, για $f \in L^1(G)$ και $\eta \in \mathbb{T}$, υπολογίζουμε:

$$\langle \iota(f)\eta, \eta\rangle_{\mathbb{C}} = \int_G f(x)\langle \iota(x)\eta, \eta\rangle_{\mathbb{C}} dx = \int_G f(x)\iota(x)\eta\overline{\eta} dx = \int_G f(x)dx \cdot |\eta|^2$$

$$= \int_G f(x)dx = \langle \mathbf{1}_G, f\rangle,$$

δηλαδή το μοναδικό pure state της μορφής (1) ταυτίζεται με την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}_G$, ως στοιχείο της άλγεβρας $B(G) = C^*(G)^*$. Παρόμοια, για $f \in L^1(G)$ και $\xi \in L^2(G)$ με $\|\xi\|_2 = 1$, έχουμε:

$$\langle \lambda(f)\xi, \xi\rangle = \int_G f(x)\langle \lambda_x\xi, \xi\rangle dx = \int_G f(x)\overline{(\xi * \tilde{\xi})(x)} dx$$

$$= \int_G f(x)(g * \tilde{g})(x)dx = \langle g * \tilde{g}, f\rangle, \quad \text{όπου } g := \overline{\xi} \in L^2(G).$$

Άρα, κάθε state της μορφής (2) ταυτίζεται, ως στοιχείο της $B(G)$ με μια συνάρτηση της μορφής $g * \tilde{g}$, όπου $g \in L^2(G)$ με $\|g\|_2 = 1$.
Συνεπώς, η $\mathbf{1}_G$ είναι $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-όριο συναρτήσεων της μορφής $g * \tilde{g}$, όπου $g \in L^2(G)$ με $\|g\|_2 = 1$, δηλαδή υπάρχει δίκτυο $(g_a)_{a\in A}$ στον $L^2(G)$ με $\|g_a\|_2 = 1$, για κάθε $a \in A$, ώστε:

$$\lim_a \int_G f(x)(g_a * \tilde{g}_a)(x)dx = \int_G f(x)dx \ , \quad \forall f \in L^1(G).$$

Προφανώς ισχύει $\mathbf{1}_G \in \mathcal{P}_1$, δηλαδή η $\mathbf{1}_G$ είναι θετικά ορισμένη και συνεχής με $\|\mathbf{1}_G\|_\infty = 1$. Επίσης, $g_a * \tilde{g}_a \in \mathcal{P}_1$, για κάθε $a \in A$, διότι από το Πόρισμα 3.3.4 έχουμε $g_a * \tilde{g}_a \in \mathcal{P}$, ενώ από το Πόρισμα 3.3.7 έχουμε ότι $\|g_a * \tilde{g}_a\|_\infty = (g_a * \tilde{g}_a)(e) = \langle \lambda_e \bar{g}_a, \bar{g}_a\rangle = \|g_a\|_2^2 = 1$, και άρα, $g_a * \tilde{g}_a \in \mathcal{P}_1$.
Έτσι, από το Θεώρημα 3.4.4, προκύπτει ότι

$$g_a * \tilde{g}_a \longrightarrow \mathbf{1}_G \ , \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της } G,$$

το οποίο, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.2.1, μας δίνει ότι η G είναι amenable.
$\square$

Ορισμός 4.4.9. Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff και $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$, $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ δύο unitary αναπαραστάσεις της G. Λέμε ότι η π_1 **περιέχεται ασθενώς** (is weakly contained) στην π_2 αν για τις επεκτάσεις $\bar{\pi}_1$ και $\bar{\pi}_2$ στην $C^*(G)$ των π_1 και π_2, αντίστοιχα, ισχύει:

$$\ker \bar{\pi}_2 \subset \ker \bar{\pi}_1.$$

Με αυτήν την ορολογία, αν κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.8, βλέπουμε ότι, για την απόδειξη της κατεύθυνσης (β)⇒(α), στην ουσία δείξαμε ότι αν η τετριμμένη αναπαράσταση ι της G στο $\mathbb{C}$, η οποία είναι και ανάγωγη (βλ. Ορισμό 3.1.3), περιέχεται ασθενώς στην αριστερή κανονική αναπαράσταση της G στον $L^2(G)$, τότε η G είναι amenable. Επίσης, είναι φανερό ότι αν η $\lambda\colon C^*(G) \to C_r^*(G)$ είναι ένα προς ένα, τότε $\ker\lambda = \{0\}$, άρα κάθε (ανάγωγη) unitary αναπαράσταση περιέχεται ασθενώς στην λ.

Έτσι, έχουμε την εξής, πληρέστερη θα λέγαμε, εκδοχή του Θεωρήματος 4.4.8:

Θεώρημα 4.4.10 (Weak Containement Theorem)**.** Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η G είναι amenable.

(β) Η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ είναι ένα προς ένα.

(γ) Κάθε ανάγωγη (irreducible) unitary αναπαράσταση της G περιέχεται ασθενώς στην αριστερή κανονική αναπαράσταση λ της G στον $L^2(G)$.

(δ) Η τετριμμένη αναπαράσταση ι της G στο $\mathbb{C}$ περιέχεται ασθενώς στην αριστερή κανονική αναπαράσταση λ της G στον $L^2(G)$.

Απόδειξη. Η ισοδυναμία (α)⇔(β) είναι το Θεώρημα 4.4.8. Επίσης, οι συνεπαγωγές (β)⇒(γ)⇒(δ) είναι προφανείς (βλ. και σχόλια προηγουμένως). Τέλος, η κατεύθυνση (δ)⇒(α) αποδεικνύεται ακριβώς όπως η κατεύθυνση (β)⇒(α) του Θεωρήματος 4.4.8.

□

Βιβλιογραφία

[1] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan' s Property* (T), Cambridge University Press, 2008, (Part II, sections A, F, G).

[2] N. P. Brown, N. Ozawa, *C^*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, American Mathematical Society, 2008.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, 2nd edition, 2013.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[5] J. Dixmier, *C^*-Algebras*, Translation by Dr. F. Jellett, North-Holland Publishing Company, 1977.

[6] P. Eymard, *L' Algèbre de Fourier d' un Groupe Localement Compact*, Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 181-236.

[7] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 2nd edition, 2016.

[8] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. I Springer-Verlag, 1963.

[9] Α. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών: Σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2014-2015.

[10] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[11] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press Inc., 1990.

[12] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[13] A. L. T. Paterson, *Amenability*, American Mathematical Society, 1988.

[14] G. K. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.

[15] J.-P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups*, Wiley & Sons Inc., 1984.

[16] I. F. Putnam, *Lecture Notes on C^*-Algebras*, unpublished, 2015.

[17] G. Racher, *Two Aspects of Amenability: The fixed point and approximation property*, unpublished lecture notes, 2015.

[18] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., 2nd edition, 1991.

[19] V. Runde, *Lecture Notes on Amenability*, Springer-Verlag, 2002.

[20] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. I, Springer-Verlag, 1979.

[21] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. II, Ch. VII, §3, Springer-Verlag, 2003.

[22] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. III, Ch. XIII, §4, Springer-Verlag, 2003.

[23] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1993.