Σταυρωτά γινόμενα χώρων τελεστών και εφαρμογές στην Αρμονική Ανάλυση των μη μεταθετικών ομάδων

Δημήτριος Ανδρέου

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Επιβλέπων: Αριστείδης Κατάβολος

Ιούνιος 2021

Πρόλογος

Κεντρικό θέμα: Υπό ποιές συνθήκες κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των σταυρωτών γινομένων αλγεβρών von Neumann γενικεύονται για δράσεις ομάδων σε δυϊκούς χώρους τελεστών.

Σταυρωτά γινόμενα για δράσεις ομάδων σε κατηγορίες χώρων τελεστών γενικότερες των αλγεβρών von Neuamnn και των C*-αλγεβρών έχουν μελετηθεί από διάφορους ερευνητές.
Για παράδειγμα:

- Άλγεβρες τελεστών: Κατσούλης-Ramsey
- Συστήματα τελεστών: Amini-Echterhoff-Nikpey, Harris-Kim
- w*-TRO's: Salmi-Skalski
- Χώροι τελεστών: Hamana, Uuye-Zacharias, Crann-Neufang

Η παρούσα εργασία ουσιαστικά συμπληρώνει τις τελευταίες εργασίες στην περίπτωση των δυϊκών χώρων τελεστών.

Περίληψη

1. Τανυστικά γινόμενα (δυϊκών) χώρων τελεστών
2. Άλγεβρες Hopf-von Neumann και comodules
   - Αποδεικνύουμε κάποια γενικά αποτελέσματα για saturated και non-degenerate comodules
   - Δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των ομάδων με την προσεγγιστική ιδιότητα (AP) κατά Haagerup-Kraus χρησιμοποιώντας τις παραπάνω έννοιες
3. Σταυρωτά γινόμενα δυϊκών χώρων τελεστών
   - Χωρικά και Fubini σταυρωτά γινόμενα
   - Περιγράφουμε την σχέση των δύο εννοιών σταυρωτού γινομένου
   - Αποδεικνύουμε ένα χαρακτηρισμό των ομάδων με την AP με την χρήση σταυρωτών γινομένων
4. Ως εφαρμογή των παραπάνω εξετάζονται ορισμένες κλάσεις διπρότυπων πάνω από τις άλγεβρες $L(G)$ και $L^\infty(G)$ υπό το πρίσμα των σταυρωτών γινομένων
5. Ανοικτά προβλήματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Τανυστικά γινόμενα

Ένας δυϊκός χώρος τελεστών είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H.
Εστω $X \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $Y \subseteq \mathcal{B}(K)$ δυϊκοί χώροι τελεστών.

- Το χωρικό (spatial) τανυστικό γινόμενο:

$$X \bar{\otimes} Y = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*} \{x \otimes y : \ x \in X, \ y \in Y\} \subseteq \mathcal{B}(H \otimes K),$$

  όπου $(x \otimes y)(h \otimes k) = (xh) \otimes (yk)$, για $h \in H, \ k \in K$.

- Το τανυστικό γινόμενο Fubini:

$$X \bar{\otimes}_{\mathcal{F}} Y = \{x \in \mathcal{B}(H \otimes K) : (\omega \otimes \mathrm{id})(x) \in Y \text{ και } (\mathrm{id} \otimes \phi)(x) \in X,$$

$$\forall \ \omega \in \mathcal{B}(H)_*, \ \phi \in \mathcal{B}(K)_*\},$$

  $(\omega \otimes \mathrm{id})(a \otimes b) := \omega(a)b$ και $(\mathrm{id} \otimes \phi)(a \otimes b) := \phi(b)a$, $a \in \mathcal{B}(H), \ b \in \mathcal{B}(K)$.
- $X \bar{\otimes} Y \subseteq X \bar{\otimes}_{\mathcal{F}} Y \simeq \left(X_* \widehat{\otimes} Y_*\right)^*$.
- Ο Y έχει την ιδιότητα S_σ αν $X \bar{\otimes} Y = X \bar{\otimes}_{\mathcal{F}} Y$ για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X. Οι *injective* άλγεβρες von Neumann έχουν την ιδιότητα S_σ (Kraus).
- (Tomiyama) Αν M και N είναι άλγεβρες von Neumann, τότε $M \bar{\otimes} N = M \bar{\otimes}_{\mathcal{F}} N$.

Άλγεβρες Hopf-von Neumann

Μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (HvNa) είναι ένα ζεύγος (M, Δ), όπου M είναι μια άλγεβρα von Neumann και $\Delta \colon M \to M \bar{\otimes} M$ ένα συγγινόμενο, δηλαδή μια μοναδιαία w*-συνεχής *-εμφύτευση που είναι συμπροσεταιριστική:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_M) \circ \Delta = (\mathrm{id}_M \otimes \Delta) \circ \Delta$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & M \bar{\otimes} M \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_M"] \\ M \bar{\otimes} M \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes \Delta"] & M \bar{\otimes} M \bar{\otimes} M \end{tikzcd}$$

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα με ένα αριστερό μέτρο Haar.

- Ο $L^\infty(G)$ (οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2(G)$) είναι HvNa με συγγινόμενο $\alpha_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G \times G) \simeq L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(G)$,

$$\alpha_G(f)(s,t) = f(ts), \quad s,t \in G, \ f \in L^\infty(G).$$

- Έστω $\lambda \colon G \to \mathcal{B}(L^2(G))$ η κανονική αριστερή αναπαράσταση της G:

$$\lambda_s \xi(t) = \xi(s^{-1}t), \qquad \xi \in L^2(G).$$

  Η άλγεβρα von Neumann $L(G) := \lambda(G)'' \subseteq \mathcal{B}(L^2(G))$ της G είναι επίσης HvNa με συγγινόμενο $\delta_G \colon L(G) \to L(G) \bar{\otimes} L(G)$,

$$\delta_G(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s, \quad s \in G.$$

Comodules

Έστω (M, Δ) μια HvNa. Ένα M-comodule είναι ένα ζεύγος (X, α), όπου X δυϊκός χώρος τελεστών και $\alpha \colon X \to X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ μια M-δράση στον X, δηλαδή μια w*-συνεχής πλήρης ισομετρία που είναι συμπροσεταιριστική ως προς την Δ:

$$(\alpha \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha = (\mathrm{id}_X \otimes \Delta) \circ \alpha$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \arrow[d, "\alpha \otimes \mathrm{id}_M"] \\ X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes \Delta"] & X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \end{tikzcd}$$

Ο υπόχωρος $X^{\alpha} = \{x \in X : \alpha(x) = x \otimes 1\}$ καλείται χώρος των σταθερών σημείων του X.

Ένα M-subcomodule του X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος $Y \subseteq X$ με $\alpha(Y) \subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$, δηλαδή το $(Y, \alpha|_Y)$ είναι ένα M-comodule.

Ένας M-comodule μορφισμός μεταξύ M-comodules (X, α) και (Z, β) είναι μια w*-συνεχής πλήρης συστολή $\phi \colon X \to Z$, ώστε

$$\beta \circ \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha.$$

Αν η ϕ είναι πλήρης ισομετρία και επί, τότε καλείται M-comodule ισομορφισμός.

Γιατί comodules;

- Κάθε $L^\infty(G)$-δράση α στον X ορίζει μια ισχυρά w*-συνεχή G-δράση $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{ci}}_{\mathrm{w}^*}(X)$ με πλήρως ισομετρικούς w*-αυτομορφισμούς,

$$\gamma_s = \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}\lambda_s) \circ \alpha,\ s \in G.$$

  Μάλιστα, η $L^\infty(G)$-δράση α καθορίζεται μονοσήμαντα από την G-δράση γ ως εξής:

$$\langle \alpha(x), \omega \otimes h \rangle = \int_G \langle \gamma_s^{-1}(x), \omega \rangle h(s)\ \mathrm{d}s,\ x \in X,\ \omega \in X_*,\ h \in L^1(G),$$

  χάρη στον δυϊσμό $X \overline{\otimes} L^\infty(G) \simeq \left(X_* \widehat{\otimes} L^1(G)\right)^*$.
- $(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha = (\mathrm{id} \otimes \alpha_G) \circ \alpha \iff \gamma_s \circ \gamma_t = \gamma_{st}\ \forall s, t \in G$.
- $X^\alpha = \{x \in X : \gamma_s(x) = x\ \forall s \in G\}$.
- Αν η G είναι αβελιανή, τότε $L(G) \simeq L^\infty(\widehat{G})$ όπου $\widehat{G}$ η δυϊκή ομάδα της G.
  Έτσι, οι $\widehat{G}$-δράσεις αντιστοιχούν σε $L(G)$-comodules.
  Επομένως, στην μη αβελιανή περίπτωση που το δυϊκό αντικείμενο $\widehat{G}$ δεν είναι ομάδα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις $\widehat{G}$-δράσεις με $L(G)$-comodules.

Κάθε M-comodule είναι M_*-πρότυπο

Έστω (M, Δ) μια HvNa. Ο προδυϊκός M_* είναι άλγεβρα Banach με το γινόμενο

$$\omega\phi = (\omega \otimes \phi) \circ \Delta, \qquad \omega, \phi \in M_*.$$

Επί πλέον, κάθε M-comodule(X, α) είναι M_*-πρότυπο:

$$\omega \cdot x := (\mathrm{id}_X \otimes \omega)(\alpha(x)), \qquad \omega \in M_*,\ x \in X.$$

Παράδειγμα (Η άλγεβρα Fourier)

Το σύνολο $A(G) := \{u\colon G \to \mathbb{C} :\ \exists\ \xi, \eta \in L^2(G),\ u(s) = \langle \lambda_s \xi | \eta \rangle\ \forall s \in G\}$ είναι μια άλγεβρα Banach ως προς το κατά σημείο γινόμενο

$$(uv)(s) = u(s)v(s), \quad s \in G,\ u, v \in A(G)$$

και την νόρμα $\|u\| := \inf\{\|\xi\|\|\eta\| :\ \xi, \eta \in L^2(G),\ u(s) = \langle \lambda_s \xi | \eta \rangle\}$. Επί πλέον, $A(G) \simeq L(G)_*$ μέσω του δυϊσμού $\langle \lambda_s, u \rangle = u(s)$, $s \in G$. Μάλιστα το κατά σημείο γινόμενο στην $A(G)$ συμπίπτει με αυτό που επάγεται από το συγγινόμενο $\delta_G(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s$ στην $L(G)$.

Non-degeneracy και saturation

Έστω (M, Δ) μια HvNa που δρα σε ένα χώρο Hilbert K και (X, α) ένα M-comodule, με $X \subseteq \mathcal{B}(H)$. Το X καλείται non-degenerate αν

$$X \overline{\otimes} \mathcal{B}(K) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*} \{(1_H \otimes b)\alpha(x) : \ b \in \mathcal{B}(K), \ x \in X\}.$$

Ο δε υπόχωρος:

$$\mathrm{Sat}(X, \alpha) := \{y \in X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M : \ (\mathrm{id}_X \otimes \Delta)(y) = (\alpha \otimes \mathrm{id}_M)(y)\}$$

του τανυστικού γινομένου $X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ καλείται το saturation space του (X, α).
Προφανώς, ισχύει $\alpha(X) \subseteq \mathrm{Sat}(X, \alpha)$.
Αν, επί πλέον, $\alpha(X) = \mathrm{Sat}(X, \alpha)$, τότε το (X, α) καλείται saturated.

Πρόταση (A)

- Αν το (X, α) είναι *non-degenerate* M*-comodule*, τότε $X = \overline{\mathrm{span}}^{w^*} \{M_* \cdot X\}$.
- Αν κάθε M*-comodule* είναι *non-degenerate*, τότε κάθε M*-comodule* είναι *saturated*.

Περί saturation

Έστω M μια άλγεβρα von Neumann. Λέμε ότι ένα δίκτυο $\Phi_i \in CB_\sigma(M)$ (από πλήρως φραγμένες w*-συνεχείς απεικονίσεις της M) συγκλίνει στην $\Phi \in CB_\sigma(M)$ ως προς την stable point-w*-topology αν

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{B}(\ell^2)} \otimes \Phi_i)(x) \xrightarrow{w^*} (\mathrm{id}_{\mathcal{B}(\ell^2)} \otimes \Phi)(x) \text{ για κάθε } x \in \mathcal{B}(\ell^2)\overline{\otimes}M.$$

Πρόταση (Α)

Για μια *HvNa* (M, Δ) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Κάθε M-*comodule* είναι *saturated*.

(β) Για κάθε M-*comodule* (X, α) και κάθε $x \in X$, ισχύει $x \in \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.

(γ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, τέτοιο ώστε $\omega_i \cdot x \xrightarrow{\mathrm{w}^*} x$ για κάθε M-*comodule* X και κάθε $x \in X$.

(δ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, ώστε το δίκτυο $\{(\mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ \Delta\} \subseteq CB_\sigma(M)$ να συγκλίνει στην απεικόνιση id_M ως προς την *stable point-w*-topology*.

Η προσεγγιστική ιδιότητα Haagerup-Kraus

Ορισμός (Haagerup-Kraus)

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την προσεγγιστική ιδιότητα (AP) αν υπάρχει δίκτυο $\{u_i\}$ στην άλγεβρα Fourier $A(G)$, τέτοιο ώστε $u_i \to \mathbf{1}$ ως προς την $\sigma(M_{cb}A(G), Q(G))$-τοπολογία.

Κάθε $u \in A(G) \simeq L(G)_*$ ορίζει μια απεικόνιση $M_u \in CB_\sigma(L(G))$ με

$$M_u(\lambda_s) = u(s)\lambda_s$$

$$M_u = (\mathrm{id} \otimes u) \circ \delta_G : L(G) \xrightarrow{\delta_G} L(G)\overline{\otimes}L(G) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes u} L(G)$$

Θεώρημα (Haagerup-Kraus, 1993)

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την *AP* αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο $\{u_i\}_{i\in I}$ στην $A(G)$, τέτοιο ώστε $M_{u_i} \longrightarrow \mathrm{id}_{L(G)}$ στην *stable point-w*-topology.*

Comodules και AP

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα με την ακόλουθη

Πρόταση (A)

Ένα $L(G)$-*comodule* (Y, δ) είναι *non-degenerate* $\Leftrightarrow$ $Y = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{A(G) \cdot Y\}$.

προκύπτει ο επόμενος χαρακτηρισμός για τις ομάδες με την AP.

Πρόταση (A)

Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Η G έχει την *AP*.
2. Κάθε $L(G)$-*comodule* είναι *saturated*.
3. Κάθε $L(G)$-*comodule* είναι *non-degenerate*.
4. Κάθε *saturated* $L(G)$-*comodule* είναι *non-degenerate*.
5. Για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ) και κάθε $y \in Y$, ισχύει $y \in \overline{A(G) \cdot y}^{w^*}$.
6. Υπάρχει δίκτυο $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq A(G)$, ώστε $u_i \cdot y \xrightarrow{w^*} y$ για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ) και κάθε $y \in Y$.

Χωρικό σταυρωτό γινόμενο

Για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X, α) με $X \subseteq \mathcal{B}(H)$ το χωρικό σταυρωτό γινόμενο του X ως προς την α ορίζεται ως το w*-κλειστό $\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} L(G)$-υποπρότυπο του $X \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G))$ που παράγεται από την $\alpha(X)$, δηλαδή

$$X \overline{\rtimes}_\alpha G = \overline{\mathrm{span}}^{w^*} \{(1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x) : \ s \in G, \ x \in X\}.$$

Παρατήρηση

α) Αν η δράση α είναι τετριμμένη, δηλ. $\alpha(x) = x \otimes 1$ για κάθε $x \in X$, τότε $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \overline{\otimes} L(G)$.

β) Επίσης, αν ο X είναι άλγεβρα von Neumann και η α ο μοναδιαίος *-ομομορφισμός που επάγεται από μια G-δράση γ, τότε από τις σχέσεις (covariance relations)

$$\alpha(\gamma_s(x)) = (1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)(1 \otimes \lambda_s^{-1}) \qquad s \in G, \ x \in X$$

έπεται ότι $X \overline{\rtimes}_\alpha G = \big(\alpha(X) \cup (\mathbb{C}1 \overline{\otimes} L(G))\big)''$, δηλ. έχουμε το σύνηθες σταυρωτό γινόμενο για άλγεβρες von Neumann.

Σταυρωτό γινόμενο Fubini

Έστω $L^\infty(G)$-comodule (X, α) και $\gamma : G \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{ci}}_{\mathrm{w}^*}(X)$ η αντίστοιχη G-δράση στον X. Θεωρούμε την G-δράση στο τανυστικό γινόμενο $X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$

$$s \in G \mapsto \gamma_s \otimes \mathrm{Ad}\rho_s,$$

όπου ρ η δεξιά κανονική αναπαράσταση της G

$$\rho_s\xi(t) = \Delta_G(s)^{1/2}\xi(ts), \qquad \xi \in L^2(G).$$

Ο χώρος των σταθερών σημείων της $\gamma \otimes \mathrm{Ad}\rho$

$$X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G = \{y \in X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) : \ (\gamma_s \otimes \mathrm{Ad}\rho_s)(y) = y \ \forall s \in G\}$$

καλείται σταυρωτό γινόμενο Fubini του X ως προς την α.

Παρατήρηση

- Αν $\alpha(x) = x \otimes 1$ για κάθε $x \in X$, τότε $\gamma_s = \mathrm{id}_X$ για κάθε $s \in G$ και συνεπώς $X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$.
- Το $X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G$ είναι $\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)$-διπρότυπο και $X\overline{\rtimes}_{\alpha}G \subseteq X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G$..

Κάποια σχόλια

Έστω

$$\sigma(a\otimes b) = b\otimes a, \qquad a,b\in\mathcal{B}(L^2(G)),$$

$$U_G f(s,t) = \Delta_G(t)^{1/2} f(st,t), \qquad f\in L^2(G\times G),\ s,t\in G.$$

Έστω $L^\infty(G)$-comodule (X,α) και $\gamma\colon G\to \mathrm{Aut}(X)$ η G-δράση που αντιστοιχεί στην α. Η $L^\infty(G)$-δράση που αντιστοιχεί στην $\gamma\otimes \mathrm{Ad}\rho$ δίνεται από την εξής απεικόνιση $\widetilde{\alpha}\colon X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) \to X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$ με

$$\widetilde{\alpha} := (\mathrm{id}_X\otimes \mathrm{Ad}U_G^*)\circ(\mathrm{id}_X\otimes\sigma)\circ(\alpha\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}(L^2(G))})$$

$$\begin{tikzcd}
X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) \arrow[r, "\alpha\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}(L^2(G))}"] \arrow[drr, dashed, "\widetilde{\alpha}"'] & X\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes\sigma"] & X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G) \arrow[d, "\mathrm{id}_X\otimes \mathrm{Ad}U_G^*"] \\
& & X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)
\end{tikzcd}$$

Άρα,

$$X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = \left(X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}} = \{y\in X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) :\ \widetilde{\alpha}(y) = y\otimes 1\}.$$

$X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$;

Ερώτηση

Έστω G τοπικά συμπαγής ομάδα και (X, α) ένα $L^\infty(G)$-comodule.
Ισχύει $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$;

Η απάντηση είναι θετική όταν ο X έχει κάποια επί πλέον δομή που διατηρείται από την δράση α, π.χ.

1. (Digernes-Takesaki, 1975) Αν ο X είναι άλγεβρα von Neumann και η $L^\infty(G)$-δράση α είναι μοναδιαίος *-ομομορφισμός, τότε $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$.
2. (Salmi-Skalski, 2015) Αν ο X είναι (non-degenerately represented) w*-TRO και η α είναι (non-degenerate) TRO-μορφισμός, τότε $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$.

Παρατήρηση

$X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για κάθε $L^\infty(G)$-comodule $(X, \alpha) \Rightarrow$ η $L(G)$ έχει την ιδιότητα S_σ διότι, αν η α είναι τετριμμένη, τότε $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \overline{\otimes} L(G)$ και $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$.
Αντιπαράδειγμα: Η $L(SL_3(\mathbb{Z}))$ δεν έχει την ιδιότητα S_σ.

Σταυρωτά γινόμενα και η AP

Θεώρημα (Crann-Neufang, 2019)

Αν μια τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την *AP*, τότε $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για κάθε $L^\infty(G)$-*comodule* (X, α).
Αν η G είναι, επί πλέον, *inner amenable* (π.χ. διακριτή), τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Θα δείξουμε ένα κάπως ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα (A)

Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Η G έχει την *AP*.

(β) $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$ για κάθε $L^\infty(G)$-*comodule* (X, α).

(γ) $(Y \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G = (Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$ για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ).

Σταυρωτά γινόμενα για $L(G)$-comodules

Για ένα $L(G)$-comodule (Y, δ) με $Y \subseteq \mathcal{B}(H)$ ορίζουμε το χωρικό σταυρωτό γινόμενο του Y ως προς δ

$$Y \overline{\ltimes}_\delta G = \overline{\mathrm{span}}^{w^*} \{(1_H \otimes f)\, \delta(y) : \ f \in L^\infty(G),\ y \in Y\}$$

καθώς επίσης και το σταυρωτό γινόμενο Fubini

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = \left(Y \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta}},$$

όπου $\widetilde{\delta} \colon Y \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G)) \to (Y \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G))) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$ είναι η $L(G)$-δράση

$$\widetilde{\delta} = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad} W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}(L^2(G))})$$

και

$$W_G \xi(s,t) = \xi(s, st), \quad \xi \in L^2(G \times G),\ s, t \in G.$$

Δυϊκές δράσεις

1. Για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X,α) με $X \subseteq \mathcal{B}(H)$, η απεικόνιση
$$\widehat{\alpha}(T) = (1_H \otimes W_G^*)(T \otimes 1_{L^2(G)})(1_H \otimes W_G), \quad T \in X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)),$$
είναι μια $L(G)$-δράση στο $X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$, τέτοια ώστε τα σταυρωτά γινόμενα $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ και $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ να είναι $L(G)$-subcomodules του $X\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$.
Η $\widehat{\alpha}$ λέγεται δυϊκή της α.
2. Για ένα $L(G)$-comodule (Y,δ) με $Y \subseteq \mathcal{B}(K)$, η απεικόνιση
$$\widehat{\delta}(T) = (1_K \otimes U_G^*)(T \otimes 1_{L^2(G)})(1_K \otimes U_G), \quad T \in Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$$
είναι μια $L^\infty(G)$-δράση στο $Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$, τέτοια ώστε τα $Y\overline{\ltimes}_\delta G$ και $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ να είναι $L^\infty(G)$-subcomodules του $Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))$.
Η $\widehat{\delta}$ λέγεται δυϊκή της δ.
Εναλλακτικά, η $\widehat{\delta}$ είναι η $L^\infty(G)$-δράση που αντιστοιχεί στην G-δράση:
$$s \mapsto \mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}\rho_s, \; s \in G.$$

$L^\infty(G)$-comodules και δυϊκές δράσεις

Πρόταση (A)

Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G κάθε $L^\infty(G)$-*comodule* είναι *saturated* και *non-degenerate*.

Πόρισμα (A)

Για κάθε $L^\infty(G)$-*comodule* (X, α) ισχύουν τα εξής:

- $\alpha(X) = \mathrm{Sat}(X, \alpha) = \left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\alpha}} = (X \overline{\rtimes}_\alpha G)^{\widehat{\alpha}}$.
- Το $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι *non-degenerate* $L(G)$-*comodule*, ενώ το το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι *saturated* $L(G)$-*comodule*.

$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = Y \overline{\ltimes}_\delta G$ για $L(G)$-comodules

Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\mathrm{Sat}(Y, \delta) = \left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}}$.
2. Το $\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta}\right)$ είναι non-degenerate ως $L^\infty(G)$-comodule.

Τα παραπάνω είναι τα βασικά συστατικά της απόδειξης του επόμενου βασικού αποτελέσματος:

Θεώρημα (A)

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ), ισχύει $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = Y \overline{\ltimes}_\delta G$.

Συμβολισμός: Στο εξής θα γράφουμε $Y \ltimes_\delta G$ αντί των $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ ή $Y \overline{\ltimes}_\delta G$.

Δυϊσμός Takesaki για $L^\infty(G)$-comodules

Έστω (X, α) ένα $L^\infty(G)$-comodule.

- Από το γεγονός ότι το (X, α) είναι non-degenerate έπεται ότι $X \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G)) \simeq (X \overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G$.
- Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα του Hamana, έπεται ότι $X \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G)) \simeq \left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G$, επειδή το (X, α) είναι saturated.

Θεώρημα (A)

- $\left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G = (X \overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G \simeq X \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G))$
- $\mathrm{Sat}(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha}) = \mathrm{Sat}(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha}) = \widehat{\alpha}\left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)$
- $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = \{y \in X \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(G)) : \ A(G) \cdot y \subseteq X \overline{\rtimes}_\alpha G\}$
- $X \overline{\rtimes}_\alpha G = \overline{\mathrm{span}}^{w^*} \{A(G) \cdot (X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\}$
- Το $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι το μέγιστο *non-degenerate* $L(G)$*-subcomodule* του $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ και το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι το ελάχιστο *saturated* $L(G)$*-comodule* που περιέχει το $X \overline{\rtimes}_\alpha G$.

Ειδικότερα, $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G \iff (X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ *saturated* $\iff (X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ *non-degenerate.*

Δυϊσμός Takesaki για $L(G)$-comodules

Πρόταση (A)

Για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y,δ), υπάρχει μια w^*-συνεχής πλήρης ισομετρία

$$\phi\colon Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)) \to Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G)),$$

τέτοια ώστε:

1. Το (Y,δ) είναι *non-degenerate* $\iff$ $\phi\left(Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\right) = (Y \ltimes_\delta G)\,\overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$.
2. Το (Y,δ) είναι *saturated* $\iff$ $\phi\left(Y\overline{\otimes}\mathcal{B}(L^2(G))\right) = (Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G$.

Πόρισμα (A)

Αν $(Y \ltimes_\delta G)\,\overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G = (Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G$ για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y,δ), τότε κάθε *saturated* $L(G)$-*comodule* είναι και *non-degenerate*, δηλαδή η G έχει την *AP*.

Το κεντρικό αποτέλεσμα

Πόρισμα (Α)

Αν $(Y \ltimes_\delta G)\overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G = (Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G$ για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ), τότε κάθε *saturated* $L(G)$-*comodule* είναι και *non-degenerate*, δηλαδή η G έχει την *AP*.

Θεώρημα (Α)

Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η G έχει την *AP*.

(β) $X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G = X \overline{\rtimes}_{\alpha} G$ για κάθε $L^\infty(G)$-*comodule* (X, α).

(γ) $(Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G = (Y \ltimes_\delta G)\overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$ για κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ).

Ιδεώδη της $A(G)$ και $L^\infty(G)$-διπρότυπα

Το συγγινόμενο $\delta_G\colon L(G) \to L(G)\overline{\otimes}L(G)$ επεκτείνεται σε μια $L(G)$-δράση στον $\mathcal{B}(L^2(G))$:

$$\delta_G(T) = W_G^*(T \otimes 1)W_G, \qquad T \in \mathcal{B}(L^2(G)),$$

$$\delta_G(f\lambda_s) = f\lambda_s \otimes \lambda_s, \qquad f \in L^\infty(G),\ s \in G$$

Για ένα κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$ με μηδενιστή $J^\perp \subseteq L(G)$, οι Ανούσης, Κατάβολος και Todorov εισήγαγαν δύο $L^\infty(G)$-διπρότυπα στον $\mathcal{B}(L^2(G))$:

$$\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)J^\perp\},$$

$$\ker\widehat{\Theta}(J) := \{T \in \mathcal{B}(L^2(G)) :\ \widehat{\Theta}(u)(T) = 0\ \forall u \in J\},$$

όπου

$$\widehat{\Theta}(u)(T) = u \cdot T = (\mathrm{id} \otimes u) \circ \delta_G(T),$$

δηλ. $u \cdot (f\lambda_s) = u(s)f\lambda_s$ για $f \in L^\infty(G),\ s \in G$.

$\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$

Θεώρημα (Ανούσης-Κατάβολος-Todorov, 2014)

Αν G είναι μια (δεύτερη αριθμήσιμη) τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε

(α) $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$ για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$.

(β) Αν η $A(G)$ έχει προσεγγιστική μονάδα, τότε $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \cap L(G) = J^\perp$ για κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq A(G)$.

Μια εναλλακτική απόδειξη του (α) προκύπτει από το βασικό μας αποτελέσμα:

Θεώρημα (A)

Για μια μια τοπικά συμπαγή ομάδα G και κάθε $L(G)$-*comodule* (Y, δ), ισχύει $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = Y \overline{\ltimes}_\delta G$.

Αν το J είναι ιδεώδες της $A(G)$, τότε $\delta_G(J^\perp) \subseteq J^\perp \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$, δηλ. το $(J^\perp, \delta_G)$ είναι $L(G)$-comodule. Επίσης, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\Phi \colon \mathcal{B}(L^2(G)) \to L(G) \ltimes_{\delta_G} G$, τέτοιος ώστε $\Phi(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)) = J^\perp \overline{\ltimes}_{\delta_G} G$ και $\Phi(\ker \widehat{\Theta}(J)) = J^\perp \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G$. Άρα, $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$.

$\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$

Θεώρημα (Ανούσης-Κατάβολος-Todorov, 2014)

Αν G είναι μια (δεύτερη αριθμήσιμη) τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε

(α) $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$ για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$.

(β) Αν η $A(G)$ έχει προσεγγιστική μονάδα, τότε $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \cap L(G) = J^\perp$ για κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq A(G)$.

Επί πλέον, χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \simeq J^\perp \ltimes_{\delta_G} G$ παίρνουμε το αντίστροφο του ισχυρισμού (β) του παραπάνω θεωρήματος:

Πρόταση (A)

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \cap L(G) = J^\perp \ \forall$ κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$

(ii) $u \in \overline{A(G)u}^{\|\cdot\|} \ \forall \ u \in A(G)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι στιγμής δεν υπάρχουν γνωστά παραδείγματα ομάδων που δεν ικανοποιούν την συνθήκη (ii).

Ιδεώδη του $L^1(G)$ και $L(G)$-διπρότυπα

Ομοίως, για ένα κλειστό (αριστερό) ιδεώδες J του $L^1(G)$ με μηδενιστή $J^\perp \subseteq L^\infty(G)$, έχουμε τα εξής $L(G)$-διπρότυπα στον $\mathcal{B}(L^2(G))$:

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) := \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{L(G)J^\perp\},$$

$$\ker\Theta(J) := \{T \in \mathcal{B}(L^2(G)) : \ \Theta(h)(T) = 0 \ \forall h \in J\},$$

$$\text{όπου} \quad \Theta(h)(T) = \int_G h(s)\mathrm{Ad}\rho_s(T)\, \mathrm{d}s, \quad h \in L^1(G), \ T \in \mathcal{B}(L^2(G)).$$

Θεώρημα (Crann-Neufang 2019)

Αν η G έχει την *AP*, τότε $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \ker\Theta(J)$ για κάθε κλειστό (αριστερό) ιδεώδες J του $L^1(G)$.

Το παραπάνω είχε αποδειχθεί νωρίτερα από τους Ανούση, Κατάβολο και Todorov, στις ειδικές περιπτώσεις που η G είναι αβελιανή ή συμπαγής ή διακριτή weakly amenable.

Τα $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ και $\ker\Theta(J)$ είναι σταυρωτά γινόμενα

- Αν J είναι ένα αριστερό ιδεώδες του $L^1(G)$, τότε $\alpha_G(J^\perp) \subseteq J^\perp \overline{\otimes} L^\infty(G)$, δηλ. το $(J^\perp, \alpha_G)$ είναι ένα $L^\infty(G)$-comodule, και άρα ο $J^\perp$ είναι translation-αναλλοίωτος υπόχωρος του $L^\infty(G)$.
- Υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Psi\colon \mathcal{B}(L^2(G)) \to L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G : \ \lambda_s f \mapsto (1 \otimes \lambda_s)\alpha_G(f),$$

τέτοιος ώστε $J^\perp \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha_G} G = \Psi(\ker\Theta(J))$ και $J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G = \Psi(\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp))$.
- Επίσης, ο Ψ είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός ως προς τις $L(G)$-δράσεις δ_G και $\widehat{\alpha_G}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(L^2(G)) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\delta_G"'] & L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G \arrow[d, "\widehat{\alpha_G}"] \\
\mathcal{B}(L^2(G)) \overline{\otimes} L(G) \arrow[r, "\Psi\otimes\mathrm{id}"] & (L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G) \overline{\otimes} L(G)
\end{tikzcd}$$

Άρα, τα $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ και $\ker\Theta(J)$ είναι $L(G)$-subcomodules του $(\mathcal{B}(L^2(G)), \delta_G)$ και αντιστοίχως ισόμορφα με τα $(J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G, \widehat{\alpha_G})$ και $(J^\perp \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha_G} G, \widehat{\alpha_G})$.

Μια (υποψήφια) εξασθένιση της AP

Πόρισμα (A)

Έστω J κλειστό αριστερό ιδεώδες του $L^1(G)$. Τότε,

1. $\ker\Theta(J) = \{T \in \mathcal{B}(L^2(G)) : \ u \cdot T \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp), \ \forall u \in A(G)\}$.
2. $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{u \cdot T : \ u \in A(G), \ T \in \ker\Theta(J)\}$.

Ειδικότερα, αν ισχύει

$$T \in \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{\lambda_s(u \cdot T)\lambda_t : \ s,t \in G, \ u \in A(G)\} \ \forall T \in \mathcal{B}(L^2(G)), \tag{wAP}$$

τότε $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \ker\Theta(J)$ για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J του $L^1(G)$.

- Θυμηθείτε ότι η G έχει την AP $\Leftrightarrow \exists\{u_i\} \subseteq A(G)$: $u_i \cdot y \xrightarrow{w^*} y$ για κάθε $L(G)$-comodule Y και κάθε $y \in Y$.
- Προφανώς AP $\implies$ wAP.
- Μάλιστα, η G έχει την wAP $\Leftrightarrow \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \ker\Theta(J)$ για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J του $L^1(G)$.

Εν κατακλείδι

- Αλγεβρικές συνθήκες (βλ. saturation) για γενικές Hopf-von Neumann άλγεβρες είναι ισοδύναμες με συγκεκριμένες τοπολογικές (προσεγγιστικές) ιδιότητες.
- Οι ομάδες για τις οποίες ορισμένα από τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας δυϊσμού για σταυρωτά γινόμενα αλγεβρών von Neumann επεκτείνονται στο πλαίσιο των (δυϊκών) χώρων τελεστών είναι ακριβώς οι ομάδες με την AP.
- Σταυρωτά γινόμενα χώρων τελεστών που δεν είναι άλγεβρες von Neumann εμφανίζονται φυσιολογικά στην (μη μεταθετική) Αρμονική Ανάλυση.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

- Είναι η wAP ισοδύναμη με την AP;
- Αν όχι, υπάρχουν ενδιαφέροντα παραδείγματα/αντιπαραδείγματα; Είναι σωστό ότι η $SL_3(\mathbb{Z})$ έχει την wAP ;
- Γενικότερα, για ποια W*-$L^\infty(G)$-comodules (M, α) ισχύει ότι κάθε $T \in M \rtimes_\alpha G$ ανήκει στο w*-κλειστό $\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)$-διπρότυπο που παράγουν οι τελεστές της μορφής $u \cdot T = (\mathrm{id}_{M\rtimes_\alpha G} \otimes u)(\widehat{\alpha}(T))$ για $u \in A(G)$;
- Μπορούν να αποδειχθούν ανάλογα αποτελέσματα για σταυρωτά γινόμενα δράσεων ομάδων σε γενικούς (πλήρεις) χώρους τελεστών; Για παράδειγμα, οι Crann-Neufang έδειξαν επίσης ότι αν η G έχει την AP, τότε ισχύει το ανάλογο της $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για G-αναλλοίωτους υπόχωρους C*-αλγεβρών. Για διακριτή G η παραπάνω συνεπαγωγή είναι ισοδυναμία (Uuye-Zacharias).
- Υπάρχει κάποια σύνδεση με τα σταυρωτά γινόμενα αλγεβρών τελεστών κατά Κατσούλη-Ramsey και τα σταυρωτά γινόμενα συστημάτων τελεστών κατά Harris-Kim και Amini-Echterhoff-Nikpey;

Αναφορές

- M. Amini, S. Echterhoff, H. Nikpey, *C^*-operator systems and crossed products*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 491 (2020), Issue 1, 124308.
- D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces by locally compact groups*, Studia Mathematica **258** (2021), no. 3, 241-267.
- D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces and a characterization of groups with the approximation property,* arXiv.org:2004.07169 (2020)
- M. Anoussis, A. Katavolos, I. G. Todorov, *Ideals of $A(G)$ and bimodules over maximal abelian selfadjoint algebras*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 6473-6500.
- M. Anoussis, A. Katavolos, I. G. Todorov, *Bimodules over $VN(G)$, harmonic operators and the non-commutative Poisson boundary*, Studia Mathematica **249** (2019), 193-213.
- J. Crann, M. Neufang, *A non-commutative Fejér theorem for crossed products, the approximation property, and applications*, Int. Math. Res. Not. IMRN, to appear, arXiv.org:1901.08700.

Αναφορές

- U. Haagerup, J. Kraus, *Approximation properties for group C*-algebras and group von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **344** (1994), no. 2, 667-699.
- S. J. Harris, Se-Jin Kim, *Crossed products of operator systems*, J. Funct. Anal. **276** (2019), 2156–2193.
- M. Hamana, *Injective envelopes of dynamical systems*, Toyama Math. J., **34** (2011), 23-86.
- E. G. Katsoulis, C. Ramsey, *Crossed Products of Operator Algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 258 (2019), no. 1240, DOI: https://doi.org/10.1090/memo/1240.
- P. Salmi, A. Skalski, *Actions of locally compact quantum groups on ternary rings of operators, their crossed products and generalized Poisson boundaries*, Kyoto J. Math., **57** (2017), no. 3, 667-691.
- O. Uuye, J. Zacharias, *The Fubini product and its applications*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **43**, no. 6 (2020), 4041–4061.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας!