Σταυρωτά γινόμενα χώρων τελεστών και εφαρμογές στην Αρμονική Ανάλυση μη μεταθετικών ομάδων

Δημήτριος Ανδρέου

Διδακτορική Διατριβή

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ελλάς
2021

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (επιβλέπων)

Μιχαήλ Ανούσης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Δημήτριος Γατζούρας, Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μιχαήλ Ανούσης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (Σε αντικατάσταση του καθηγητή Δημητρίου Γατζούρα με βάση την απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος Μαθηματικών την 12/1/2021, σύμφωνα με την παρ. 3, αρ. 39, Ν.1185/2017)

Παντελής Δοδός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γεώργιος Ελευθεράκης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ηλίας Κατσούλης, Καθηγητής, East Carolina University

Κωνσταντίνος Τύρος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Αριστείδη Κατάβολο για την συστηματική παρακολούθηση της διατριβής μου και κυρίως για την διαρκή ενθάρρυνση και τις πολύτιμες συμβουλές που τόσο απλόχερα μου προσέφερε.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή Μιχάλη Ανούση για το αμέριστο ενδιαφέρον του και τις παρατηρήσεις του πάνω σε διάφορα ζητήματα σχετικά με την διατριβή μου.

Ευχαριστώ πολύ τους καθηγητές Απόστολο Γιαννόπουλο, Παντελή Δοδό, Γιώργο Ελευθεράκη, Ηλία Κατσούλη και Κωνσταντίνο Τύρο που μου έκαναν την τιμή να κρίνουν την εργασία μου.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την διατριβή αυτή στην μνήμη του καθηγητή Δημήτρη Γατζούρα, ο οποίος έφυγε από κοντά μας νωρίς.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή υποστηρίχθηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και από την Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ), στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛΙΔΕΚ Υποψηφίων Διδακτόρων» (αρ. Σύμβασης 70/3/14525).

Πρόλογος

Η αλληλεπίδραση μεταξύ της Θεωρίας Τελεστών και της Αρμονικής Ανάλυσης των τοπικά συμπαγών ομάδων έχει απασχολήσει τους μαθηματικούς από τις απαρχές της θεωρίας των αλγεβρών τελεστών. Μια από τις σημαντικότερες έννοιες που συνδέουν τις δύο περιοχές είναι η κατασκευή του σταυρωτού γινομένου για δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων μέσω αυτομορφισμών σε άλγεβρες von Neumann, το οποίο αρχικά εισήχθη από τους Murray και von Neumann, προκειμένου να κατασκευασθούν παραδείγματα factors τύπου II ή III. Έκτοτε, η έννοια του σταυρωτού γινομένου έχει μελετηθεί εκτενέστατα, ενώ έχει επεκταθεί επιτυχώς και σε άλλες κατηγορίες όπως οι C*-άλγεβρες.

Κατά τις τελευταίες δεκαετίες, σταυρωτά γινόμενα έχουν εισαχθεί και μελετηθεί στην περίπτωση δράσεων ομάδων σε γενικότερες κατηγορίες χώρων τελεστών, όπως μη αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών, ternary rings of operators, συστήματα τελεστών ακόμη και γενικούς χώρους τελεστών. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στα προαναφερθέντα θέματα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Κατσούλη και Ramsey [29], Salmi και Skalski [44], Amini, Echterhoff και Nikpey [1], Harris και Kim [21], Ng [39], Hamana [19], Uuye και Zacharias [56] και Crann και Neufang [12].

Η ανάγκη να ορισθούν κατάλληλοι τύποι σταυρωτού γινομένου για δράσεις ομάδων σε γενικούς χώρους τελεστών επιβάλλεται από το γεγονός ότι είναι συχνά απαραίτητο να θεωρήσει κανείς δομές χώρων τελεστών πιο χαλαρές από τις άλγεβρες von Neumann ή τις C*-άλγεβρες, προκειμένου να διατυπωθούν και μελετηθούν συγκεκριμένες έννοιες από διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών χρησιμοποιώντας τεχνικές της θεωρίας τελεστών (κβαντοποίηση).

Κίνητρα και στόχοι

Η παρούσα διατριβή εστιάζει στα σταυρωτά γινόμενα που προκύπτουν από δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων μέσω w*-συνεχών πλήρως ισομετρικών ισομορφισμών σε *δυϊκούς* χώρους τελεστών. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο φυσιολογικά, αν και εν γένει διαφορετικά, είδη σταυρωτού γινομένου. Συγκεκριμένα, για μια δράση α μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G σε ένα δυϊκό χώρο τελεστών X, από την μια έχουμε το *σταυρωτό γινόμενο Fubini* $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ και από την άλλη το *χωρικό (spatial) σταυρωτό γινόμενο*

$X\overline{\rtimes}_\alpha G$, ούτως ώστε $X\overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Ανεπίσημα μιλώντας, το σταυρωτό γινόμενο Fubini $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ είναι το κατάλληλο αντικείμενο για την αναπαράσταση και γενίκευση εννοιών της Αρμονικής Ανάλυσης, τα οποία ορίζονται μέσω ιδιοτήτων σταθερού σημείου, όπως οι (*από κοινού*) *αρμονικοί τελεστές* και τα *μη-μεταθετικά σύνορα Poisson*. Από την άλλη, το αντίστοιχο χωρικό σταυρωτό γινόμενο $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ αποτελείται από τα «διαχειρίσιμα» στοιχεία του $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$, δηλαδή εκείνα τα οποία μπορούνα να αναπαρασταθούν με την βοήθεια στοιχείων του X και τελεστών μεταφοράς. Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πρόβημα όσον αφορά τους αρμονικούς τελεστές είναι η εύρεση τουλάχιστον ικανών συνθηκών, ούτως ώστε κάθε τελεστής, που είναι αρμονικός ως προς μια οικογένεια από μέτρα στην G, να περιγράφεται ρητά χρησιμοποιώντας μόνο αρμονικές συναρτήσεις (ως προς την ίδια οικογένεια μέτρων) και τελεστές μεταφοράς.

Εφ' όσον το παρπάνω πρόβλημα ανάγεται (όπως δείχνουμε στο Κεφάλαιο 4) στο ερώτημα κατά πόσον ένα συγκεκριμένο σταυρωτό γινόμενο Fubini συμπίπτει με το αντίστοιχο χωρικό, η σχέση μεταξύ των $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ και $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ αξίζει να μελετηθεί πιο διεξοδικά σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Είναι ήδη γνωστό ότι η ισότητα $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ ισχύει όταν το X είναι άλγεβρα von Neumann (Digernes-Takesaki [53, Chapter X, Corollary 1.22]) ή γενικότερα ένα W*-TRO (Salmi-Skalski [44]). Ωστόσο, για ένα αυθαίρετο δυϊκό χώρο τελεστών X, η ισότητα $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ μπορεί να είναι αναληθής ακόμα και όταν η δράση α είναι τετριμμένη.

Εξ άλλου, οι Crann και Neufang [12] έδειξαν πρόσφατα ότι αν η G έχει την *προσεγγιστική ιδιότητα* (AP) των Haagerup και Kraus, τότε ισχύει $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X και κάθε G-δράση α στον X. Επίσης, παρατήρησαν ότι το αντίστροφο αληθεύει τουλάχιστον αν υποθέσουμε ότι η ομάδα G είναι inner amenable με την έννοια του Paterson [43] (π.χ. διακριτή).

Οι κύριοι στόχοι της παρούσας διατριβής μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Περιγραφή της σχέσης μεταξύ των $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ και $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για μια αυθαίρετη G-δράση α σε κάποιο δυϊκό χώρο τελεστών X και εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών ώστε $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

- Να αποδειχθεί ότι το αντίστροφο του θεωρήματος των Crann και Neufang που προαναφέρθηκε εξακολουθεί να αληθεύει για αυθαίρετες τοπικά συμπαγείς ομάδες (δηλ. χωρίς την υπόθεση της inner amenability).

- Εφαρμογή της γενικής θεωριάς που θα αναπτύξουμε στο πλαίσιο των από κοινού αρμονικών τελεστών.

Η βασική ιδέα για την επίτευξη του πρώτου εκ των ανωτέρω στόχων είναι να επεκτείνουμε τα κύρια στοιχεία της κλασικής θεωρίας δυϊσμού για σταυρωτά γινόμενα αλγεβρών von Neumann ως προς δράσεις τοπικά συμπαγών ομάδων στο πλαίσιο των δυϊκών χώρων τελεστών. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να υιοθετήσουμε την γλώσσα των comodules πάνω από άλγεβρες Hopf-von Neumann, μιας και αυτή παρέχει ένα φυσιολογικό και αποτελεσματικό τρόπο για την μελέτη του δυϊσμού Takesaki (βλέπε ενότητα 3.3) στο πλαίσιο των (όχι απαραίτητα αβελιανών) τοπικά συμπαγών ομάδων.

Όσο για τον δεύτερο στόχο, δηλ. τον χαρακτηρισμό των ομάδων με την προσεγγιστική ιδιότητα μέσω των σταυρωτών γινομένων, η κύρια ιδέα είναι να δείξουμε ότι η προσεγγιστική ιδιότητα για μια ομάδα G μπορεί να μεταφραστεί ισοδύναμα σε μια αλγεβρική συνθήκη (saturation) για την κλάση των comodules πάνω από την (Hopf-)von Neumann άλγεβρα $L(G)$ της ομάδας G. Αυτό θα αποτελέσει και ένα σύνδεσμο μεταξύ της προσεγγιστικής ιδιότητας και της θεωρίας δυϊσμού που θα αναπτύξουμε για τα υπό συζήτηση σταυρωτά γινόμενα.

Τελευταίο, αλλά εξ ίσου σημαντικό, θα αποδείξουμε ότι οι από κοινού αρμονικοί τελεστές προκύπτουν φυσιολογικά ως το σταυρωτό γινόμενο Fubini των από κοινού αρμονικών συναρήσεων με την δράση μεταφοράς, ενώ οι αρμονικοί τελεστές που δέχονται μια ρητή αναπαράσταση χρησιμοποιώντας από κοινού αρμονικές συναρήσεις και τελεστές μεταφοράς αναπαρίστανται από το χωρικό σταυρωτό γινόμενο που αντιστοιχεί στην ίδια δράση. Αυτό το γεγονός θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε τα γενικά μας αποτελέσματα προκειμένου να ρίξουμε λίγο φως στο το πρόβλημα κατά πόσον κάθε αρμονικός τελεστής δέχεται μια αναπαράσταση όπως παραπάνω.

Δομή και αποτελέσματα

Το κύριο σώμα αυτής της διατριβής έχει οργανωθεί σε τέσσερα κεφάλαια. Σε αυτήν την ενότητα συνοψίζεται το περιεχόμενο και τα βασικά αποτελέσματα των Κεφαλαίων 1 έως 4. Για τους ορισμούς που απαιτούνται για την περίληψη εκάστου κεφαλαίου παρακάτω, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1 Εδώ παρουσιάζεται το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο σχετικά με τους δυϊκούς χώρους τελεστών. Ειδικότερα, ανακαλούμε τις βασικές ιδιότητες του χωρικού και Fubini τανυστικού γινομένου δυϊκών χώρων τελεστών, αλλά και των τανυστικών γινομένων απεικονίσεων, καθώς αυτά αποτελούν τα βασικά εργαλεία για την μελέτη των comodules αλγεβρών Hopf-von Neumann και, ειδικότερα, των σταυρωτών γινομένων. Κατόπιν συζητάμε εν συντομία την έννοια της stable point w*-σύγκλισης για δίκτυα από normal πλήρως φραγμένες απεικονίσεις μιας άλγεβρας von Neumann. Αυτή η έννοια είναι καθοριστικής σημασίας προκειμένου να επιτευχθεί η σύνδεση μεταξύ των comodules της άλγεβρας von Neumann μιας ομάδας και της προσεγγιστικής ιδιότητας των Haagerup και Kraus. Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη ανασκόπηση των αλγεβρών von Neumann $L^\infty(G)$ και $L(G)$ που αντιστοιχούν σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα G.

Κεφάλαιο 2 Αυτό το κεφάλαιο ξεκινά εισάγοντας τις βασικές έννοιες αναφορικά με άλγεβρες Hopf-von Neumann και τα σχετικά comodules στο πλαίσιο των δυϊκών χώρων τελεστών. Η προσοχή μας εστιάζεται στις έννοιες *non-degeneracy* και *saturation* για comodules, καθώς αυτές οι δύο έννοιες θα παίξουν καθοριστικό ρόλο για τον χαρακτηρισμό των ομάδων με την προσεγγιστική ιδιότητα, αλλά και για την επέκταση της έννοιας του δυϊσμού για σταυρωτά γινόμενα από την κατηγορία των αλγεβρών von Neumann σε αυτήν των δυϊκών χώρων τελεστών.

Τα κύρια αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2, όσον αφορά τις έννοιες non-degeneracy και saturation, είναι τα ακόλουθα:

Πόρισμα 2.2.7. *Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann. Αν κάθε M-comodule είναι non-degenerate, τότε κάθε M-comodule είναι saturated.*

Πρόταση 2.2.9. *Για μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (M, Δ), οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) Κάθε M-comodule είναι saturated.

(β) Για κάθε M-comodule (X, α) και κάθε $x \in X$, ισχύει $x \in \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.

(γ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, τέτοιο ώστε $\omega_i \cdot x \longrightarrow x$ στην w^*-τοπολογία για κάθε M-comodule X και κάθε $x \in X$.

(δ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, τέτοιο ώστε το δίκτυο $\{(\mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ \Delta\} \subseteq CB_\sigma(M)$ να συγκλίνει ως προς την stable point-w^*-τοπολογία στην ταυτοτική απεικόνιση id_M.

Τα προηγούμενα προετοιμάζουν το έδαφος για την επίτευξη της σύνδεσης ανάμεσα στην προσεγγιστική ιδιότητα (AP) των Haagerup και Kraus και σε ιδιότητες των comodules πάνω από την άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας. Συγκεκριμένα, έχουμε την επόμενη

Πρόταση 2.3.14. *Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) Η G έχει την AP.

(β) Κάθε $L(G)$-comodule είναι saturated.

(γ) Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) και κάθε $y \in Y$, ισχύει $y \in \overline{A(G) \cdot y}^{\mathrm{w}^*}$.

(δ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{u_i\}_{i \in I}$ στην $A(G)$, τέτοιο ώστε για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) και κάθε $y \in Y$ ισχύει $u_i \cdot y \longrightarrow y$ στην w^*-τοπολογία.

(ε) Κάθε $L(G)$-comodule είναι non-degenerate.

Επί πλέον, αποδεικνύουμε ότι η άλγεβρα Hopf-von Neumann $L^\infty(G)$ δέχεται μόνον non-degenerate και saturated comodules, χωρίς καμμία επιπρόσθετη συνθήκη για την ομάδα G.

Λήμμα 2.3.5. *Καθε $L^\infty(G)$-comodule είναι non-degenerate και saturated. Ειδικότερα, για κάθε $L^\infty(G)$-comodule X και κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $x \in \overline{L^1(G) \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.*

Κεφάλαιο 3 Δίνουμε τον ορισμό για το Fubini και χωρικό σταυρωτό γινόμενο $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ και $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ αντιστοίχως για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X, α) [12, 19, 44, 56], καθώς επίσης και για τα «δυϊκά» ανάλογά τους $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ και $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ για ένα $L(G)$-comodule (Y, δ) [19, 44, 3].

οι χώροι $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ και $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ δέχονται μιφυσιολογική δομή $L(G)$-comodule μέσω της δυϊκής $L(G)$-δράσης $\widehat{\alpha}$ της α, καθώς και μια δομή $L(G)$-διπρότυπου. Παρομοίως, τα $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ και $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ γίνονται $L^\infty(G)$-comodules μέσω της δυϊκής $L^\infty(G)$-δράσης $\widehat{\delta}$ και είναι επίσης $L^\infty(G)$-διπρότυπα.

Μια πρώτη ανάλυση των δομών που προαναφέραμε οδηγεί στα δύο πρώτα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου:

Πόρισμα 3.1.9. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X, α) το σταυρωτό γινόμενο Fubini $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι ένα saturated $L(G)$-comodule και το χωρικό σταυρωτό γινόμενο $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι ένα non-degenerate $L(G)$-comodule.*

Θεώρημα 3.2.10. *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) ισχύει:*

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = Y \overline{\ltimes}_\delta G.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.10 στηρίζεται ουσιαστικά στο γεγονός ότι τα $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta})$ και $(Y \overline{\ltimes}_\delta G, \widehat{\delta})$ είναι non-degenerate και saturated ως $L^\infty(G)$-comodules (από το Λήμμα 2.3.5). Επίσης, το Πόρισμα 3.1.9 μας λέει ότι αν η ισότητα $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι αληθής για κάποιο $L^\infty(G)$-comodule (X, α), τότε τα $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ και $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ πρέπει να είναι αμφότερα non-degenerate και saturated $L(G)$-comodules (αυτό συμβαίνει όταν η G έχει την AP, βλ. Πρόταση 2.3.14).

Για το υπόλοιπο του Κεφαλαίου 3, ασχολούμαστε με τα διπλά σταυρωτά γινόμενα που αντιστοιχούν σε ένα $L^\infty(G)$-comodule (X, α) και ένα $L(G)$-comodule (Y, δ), και συγκεκριμένα

- $(X \overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G \subseteq (X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G$,
- $(Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G \subseteq (Y \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G$,

όπου το σύμβολο $\ltimes$ μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως $\ltimes^{\mathcal{F}}$ είτε ως $\overline{\ltimes}$ χάρη στο Θεώρημα 3.2.10.

Θυμηθείτε ότι, στην περίπτωση των σταυρωτών γινομένων αλγεβρών von Neumann, η αρχική άλγεβρα, και πιο σωστά, το τανυστικό της γινόμενο με τον $B(L^2(G))$ μπορεί να ανακτηθεί από το διπλό σταυρωτό γινόμενό της (δυϊσμός Takesaki). Η παρατήρηση-κλειδί είναι ότι αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή η δομή άλγεβρας von Neumann εξασφαλίζει την non-degeneracy και saturation για W*-$L(G)$-comodules. Μάλιστα, προκύπτει ότι η non-degeneracy είναι ισοδύναμη με τον δυϊσμό Takesaki για χωρικά σταυρωτά γινόμενα, ενώ η saturation είναι ισοδύναμη με τον δυϊσμό Takesaki για σταυρωτά γινόμενα Fubini. Αυτό οδηγεί στα δύο επόμενα αποτελέσματα, τα οποία συνοψίζουν τις Προτάσεις 3.3.2, 3.3.3, 3.3.5 και 3.3.6.

Πρόταση. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X,α), τα διπλά σταυρωτά γινόμενα $(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G$ και $(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G$ είναι αμφότερα κανονικά ισόμορφα με το $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$.*

Πρόταση. *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y,δ), υπάρχει μια w*-συνεχής πλήρης ισομετρία $\phi\colon Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\to Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$, τέτοια ώστε:*

1. *Το (Y,δ) είναι non-degenerate αν και μόνον αν*
$$\phi\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)=(Y\ltimes_\delta G)\,\overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}}G.$$

2. *Το (Y,δ) είναι saturated αν και μόνον αν*
$$\phi\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)=(Y\ltimes_\delta G)\rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}}G.$$

Μια πρώτη εφαρμογή των παραπάνω αποτελεσμάτων δυϊσμού παρέχει μια πιο θεκάθαρη εικόνα για την σχέση των $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ και $X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G$ για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X,α).

Πόρισμα 3.3.7. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X,α) ισχύουν τα εξής:*

(i) $(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G=(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G$.

(ii) $\mathrm{Sat}(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha})=\mathrm{Sat}\left(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G,\widehat{\alpha}\right)=\widehat{\alpha}\left(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G\right)$

(iii) $X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G=\{y\in X\overline{\otimes}B(L^2(G)):\ A(G)\cdot y\subseteq X\overline{\rtimes}_\alpha G\}$,
όπου $u\cdot y=(\mathrm{id}_{X\overline{\otimes}B(L^2(G))}\otimes u)\circ(\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)(y)$ *για* $u\in A(G)$ *και* $y\in X\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

(iv) $X\overline{\rtimes}_\alpha G=\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{A(G)\cdot(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G)\}$.

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule. Τότε, το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι το μέγιστο non-degenerate $L(G)$-subcomodule του $(X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G,\widehat{\alpha})$. Επίσης, το $X\rtimes^{\mathcal{F}}_\alpha G$ είναι το ελάχιστο saturated $L(G)$-subcomodule του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)$ που περιέχει το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$. Ειδικότερα, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) $X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_{\alpha} G$.

(β) *Το* $\left(X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha}\right)$ *είναι non-degenerate* $L(G)$*-comodule.*

(γ) *Το* $(X \overline{\rtimes}_{\alpha} G, \widehat{\alpha})$ *είναι saturated* $L(G)$*-comodule.*

Ως μια δεύτερη εφαρμογή του δυϊσμού Takesaki, παίρνουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό των τοπικά συμπαγών ομάδων μετην προσεγγιστική ιδότητα (AP) με την χρήση των συναρτητών που ορίζουν τα σταυρωτά γινομένα.

Θεώρημα 3.3.10. *Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα* G *οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η* G *έχει την AP.*

(ii) $(Y \ltimes_{\delta} G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G = (Y \ltimes_{\delta} G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$, *για κάθε* $L(G)$*-comodule* (Y, δ).

(iii) $X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_{\alpha} G$, *για κάθε* $L^{\infty}(G)$*-comodule* (X, α).

(iv) $((Y \ltimes_{\delta} G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G,\ \widehat{\widehat{\delta}}) \simeq (Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ *για κάθε* $L(G)$*-comodule* (Y, δ).

(v) $((Y \ltimes_{\delta} G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G,\ \widehat{\widehat{\delta}}) \simeq (Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ *για κάθε* $L(G)$*-comodule* (Y, δ).

Κεφάλαιο 4 Στο τελευταίο κεφάλαιο, δίνουμε μια νέα οπτική γύρω από την έννοια των από κοινού αρμονικών τελεστών που εισήχθη από τους Ανούση, Κατάβολο και Todorov [5, 6].

Ας θυμηθούμε τις κανονικές αναπαραστάσεις της άλγεβρας των μέτρων $M(G)$ της ομάδας και της άλγεβρας των πλήρως φραγμένων πολλαπλασιαστών $M_{cb}A(G)$:

$$\Theta\colon M(G) \to CB(B(L^2(G))),$$

$$\Theta(\nu)(T) = \int_G \mathrm{Ad}\rho_s(T)\ d\nu(s), \quad \nu \in M(G),\ T \in B(L^2(G))$$

και

$$\widehat{\Theta}\colon M_{cb}A(G) \to CB(B(L^2(G))),$$

$$\widehat{\Theta}(u)(\lambda_s f) = u(s)\lambda_s f, \quad u \in M_{cb}A(G),\ s \in G,\ f \in L^{\infty}(G).$$

Για αυθαίρετες οικογένειες $\Lambda \subseteq M(G)$ και $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$, έχουμε τις *από κοινού* Λ*-αρμονικές συναρτήσεις*

$$\mathcal{H}(\Lambda) := \{f \in L^{\infty}(G) :\ \Theta(\mu)(f) = f \text{ για κάθε } \mu \in \Lambda\}$$

και τους *από κοινού* Λ*-αρμονικούς τελεστές*

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) := \{T \in B(L^2(G)) :\ \Theta(\mu)(T) = T \text{ για κάθε } \mu \in \Lambda\},$$

καθώς επίσης και τα *από κοινού Σ-αρμονικά συναρτησοειδή*

$$\mathcal{H}_\Sigma := \{T \in L(G) : \widehat{\Theta}(\sigma)(T) = T \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma\}$$

και τους *από κοινού Σ-αρμονικούς τελεστές*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma := \{T \in B(L^2(G)) : \widehat{\Theta}(\sigma)(T) = T \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma\}.$$

Σημειωτέον δε ότι οι ως άνω υπόχωροι του $B(L^2(G))$ δεν είναι κατ' ανάγκην άλγεβρες von Neumann. Ωστόσο, είναι w*-κλειστοί υπόχωροι του $B(L^2(G))$ και συνεπώς (συγκεκριμένοι) δυϊκοί χώροι τελεστών. Επιπ'ροσθέτως, ισχύουν οι προφανείω εγκλεισμοί $\mathcal{H}(\Lambda) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ και $\mathcal{H}_\Sigma \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$. Επίσης, παρατηρείστε ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ είναι ένα $L(G)$-διπρότυπο, ενώ ο $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$ είναι ένα $L^\infty(G)$-διπρότυπο (επειδή οι $\Theta(\mu)$ και $\widehat{\Theta}(\sigma)$ είναι normal μορφισμοί διπροτύπων στον $B(L^2(G))$ πάνω από τις $L(G)$ και $L^\infty(G)$ αντιστοίχως). Επομένως είναι φυσιολογικό το ερώτημα αν τα διπρότυπα που παράγονται από τους $\mathcal{H}(\Lambda)$ και $\mathcal{H}_\Sigma$ περιγράφουν επαρκώς τους $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$ ατιστοίχως, με άλλ λόγια, αν οι ισότητες

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda)) = \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda), \quad \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma) = \widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma \tag{P}$$

ισχύουν για αυθαίρετες οικογένειες $\Lambda \subseteq M(G)$ και $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$.

Η παρατήρηση-κλειδί εδώ είναι ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ συμπίπτει με τον $\ker\Theta(J(\Lambda))$, δηλαδή τον κοινό πυρήνα των απεικονίσεων $\Theta(h)$ για $h \in J(\Lambda)$, όπου $J(\Lambda) = \mathcal{H}(\Lambda)_\perp \subseteq L^1(G)$ (ο προμηδενιστής του $\mathcal{H}(\Lambda)$). Παρομοίως, $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \ker\widehat{\Theta}(J_\Sigma)$ για $J_\Sigma = (\mathcal{H}_\Sigma)_\perp \subseteq A(G)$. Επίσης, οι $J(\Lambda)$ και J_Σ είναι κλειστά (αριστερά) ιδεώδη των $L^1(G)$ και $A(G)$ αντιστοίχως.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός, ο οποίος διατηρεί αμφότερες τις δομές $L^\infty(G)$-comodule και $L^\infty(G)$-διπρότυπου, ούτως ώστε $\ker\widehat{\Theta}(J) \simeq J^\perp \ltimes^{\mathcal{F}}_{\delta_G} G$ και $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \simeq J^\perp \overline{\ltimes}_{\delta_G} G$ για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$ (βλέπε Πρόταση 4.3.1).

Συνεπώς, ως άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.10 παίρνουμε την ακόλουθη, η οποία συνοψίζει την Πρόταση 4.3.1 και το Πόρισμα 4.3.2.

Πρόταση. *Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$, ισχύει*

$$\ker\widehat{\Theta}(J) = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \simeq J^\perp \ltimes_{\delta_G} G.$$

Ειδικότερα, για κάθε οικογένεια $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$ έχουμε

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma) \simeq \mathcal{H}_\Sigma \ltimes_{\delta_G} G.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύει τα [4, Theorem 3.2] και [5, Corollary 2.12], εφ' όσον η δική μας απόδειξη (η οποία είναι αξιοσημείωτα λιγότερο τεχνική) δεν προϋποθέτει η G να είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος όπως στα [4, 5].

Ως υποπροϊόν των σχέσεων $\ker \widehat{\Theta}(J) = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \simeq J^\perp \ltimes_{\delta_G} G$, παίρνουμε ένα χαρακτηρισμό εκείνων των τοπικά συμπαγών ομάδων G, για τις οποίες κάθε subcomodule της $L(G)$ ικανοποιεί ένα «ασθενή δυϊσμό Takesaki» (συνθήκη saturation), υπό την έννοια ότι μπορούμε να ανακτήσουμε κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq A(G)$ ως την τομή $(L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp))_\perp$. Για την ακρίβεια, προκύπτει το επόμενο

Πρόταση 4.3.5. *Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Η G έχει την ιδιότητα Ditkin στο άπειρο, δηλ. για κάθε $u \in A(G)$, ισχύει $u \in \overline{A(G)u}^{\|\cdot\|_{A(G)}}$.

(β) Κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι saturated.

(γ) Κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι non-degenerate.

(δ) Για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$, ισχύει $L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = J^\perp$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα βελτιώνει το [4, Lemma 4.5] και απαντά σε ένα ερώτημα των συγγραφέων του [4, Question 4.8].

Τέλος, αποδεικνύουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα (Πρόταση 4.3.7) για κλειστά αριστερά ιδεώδη J του $L^1(G)$, και συγκεκριμένα ότι

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) \simeq J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G \subseteq J^\perp \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha_G} G \simeq \ker \Theta(J).$$

Αυτό, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3, μας επιτρέπει να περιγράψουμε λεπτομερέστερα την σχέση των $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ και $\ker \Theta(J)$ και, ειδικότερα, την σχέση μεταξύ των $\mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ και $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$, για μια οικογένεια $\Lambda \subseteq M(G)$, παίρνοντας $J = J(\Lambda)$.

Πρόταση 4.3.8. *Για κάθε κλειστό ιδεώδες J του $L^1(G)$, το $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ είναι το μέγιστο non-degenerate $L(G)$-subcomodule του $(B(L^2(G)), \delta_G)$ που περιέχεται στο $\ker \Theta(J)$, δηλ.*

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\widehat{\Theta}(u)(T) : \ u \in A(G), \ T \in \ker \Theta(J)\}$$

και το $\ker \Theta(J)$ είναι το ελάχιστο saturated $L(G)$-subcomodule του $(B(L^2(G)), \delta_G)$ που περιέχει το $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$, δηλ.

$$\ker \Theta(J) = \{T \in B(L^2(G)) : \ \widehat{\Theta}(u)(T) \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp), \ \forall u \in A(G)\}.$$

Συνεπώς, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \ker \Theta(J)$.

(β) *Το* $(\ker\Theta(J), \delta_G)$ *είναι non-degenerate* $L(G)$*-comodule, δηλ.*

$$\ker\Theta(J) = \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\{\widehat{\Theta}(A(G))(\ker\Theta(J))\}.$$

(γ) *Το* $(\operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}), \delta_G)$ *είναι saturated* $L(G)$*-comodule, δηλ. για κάθε* $T \in B(L^2(G))$ *με* $\widehat{\Theta}(u)(T) \in \operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ $\forall u \in A(G)$*, έπεται ότι* $T \in \operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$.

Σημειώνουμε δε ότι αν η G έχει την AP, τότε κάθε $L(G)$-comodule είναι saturated. Επομένως, $\operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}) = \ker\Theta(J)$ για κάθεψ αριστερό κλειστό ιδεώδες J του $L^1(G)$ και άρα $\operatorname{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda)) = \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ για κάθε $\Lambda \subseteq M(G)$.

Η ισότηστα $\operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}) = \ker\Theta(J)$ αποδείχθηκε αρχικά από τους Ανούση, Κατάβολο και Todorov [6] για την περίπτωση που η G είναι είτε αβελιανή, είτε συμπαγής, είτε weakly amenable και διακριτή και για αυθαίρετες τοπικά συμπαγείς ομάδες με την AP από τους Crann και Neufang [12].

Η ως άνω ανάλυση της σχέσης των $\operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ και $\ker\Theta(J)$ μας επιτρέπει τώρα να εισαγάγουμε μια συνθήκη για την G, a priori ασθενέστερη της AP, η οπία εξασφαλίζει επίσης την ορθότητα των ισοτήτων $\operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}) = \ker\Theta(J)$ και $\operatorname{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda)) = \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$.

Πόρισμα 4.3.9. *Αν κάθε τελεστής* $T \in B(L^2(G))$ *ικανοποιεί*

$$T \in \operatorname{Bim}_{L(G)}\{\widehat{\Theta}(u)(T) : \ u \in A(G)\}, \tag{1}$$

τότε $\ker\Theta(J) = \operatorname{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ *για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες* J *του* $L^1(G)$*. Ειδικότερα, αν η συνθήκη* (1) *ικανοποιείται για κάθε* $T \in B(L^2(G))$*, τότε* $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \operatorname{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ *φορ ανψ φαμιλψ* $\Lambda \subseteq M(G)$.

Παρατηρούμε οτι η συνθήκη (1) είναι a priori πολύ ασθενέστερη της AP. Πράγματι, η AP συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα δίκτυο $\{u_i\} \subseteq A(G)$, τέτοιο ώστε

$$\widehat{\Theta}(u_i)(T) \longrightarrow T \text{ στην w*-τοπολογία για κάθε } T \in B(L^2(G))$$

και το δίκτυο $\{u_i\}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του τελεστή $T \in B(L^2(G))$. Από την άλλη δε, η συνθήκη (1) σημαίνει ότι ένας τελεστής $T \in B(L^2(G))$ προσεγγίζεται στην w*-τοπολογία από γραμμικούς συνδυασμούς της μορφής

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{\Theta}(u_j)(T) y_j, \text{ με } u_j \in A(G),\ x_j, y_j \in L(G),$$

όπου πλέον η επιλογή των συναρτήσεων u_j και των τελεστών μεταφοράς x_j και y_j μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή του συγκεκριμένου T.

Μάλιστα, απ' όσο γνωρίζει ο συγγραφέας, παραμένει ακόμα άγνωστο αν υπάρχουν ομάδες για τις οποίες αποτυγχάνει η συνθήκη (1).

Κάποια από τα κύρια αποτελέσματα των Κεφαλαίων 2, 3 και 4 εμφανίζονται στις ακόλουθε εργασίες του συγγραφέα:

1. D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces by locally compact groups*, Studia Mathematica **258** (2021), no. 3, 241-267.

2. D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces and a characterization of groups with the approximation property,* (submitted) arXiv.org:2004.07169 (2020)

Summary

In the present dissertation we deal with crossed products arising from locally compact group actions on *dual* operator spaces by w*-continuous completely isometric isomorphisms. In this case, there are (at least) two natural, yet generally different, kinds of crossed product. In particular, for an action α of a locally compact group G on dual operator space X, one can define a *Fubini crossed product* $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ and a *spatial crossed product* $X \overline{\rtimes}_\alpha G$, such that $X \overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Informally spaeking, the Fubini crossed product $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ is the appropriate object in order to represent, as well as to generalize, concepts form Harmonic Analysis which are defined via fixed point properties, e.g. the *jointly harmonic operators* and the *non-commutative Poisson boundaries*. Moreover, the corresponding spatial crossed product $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ consists of the tractable elements of $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$, i.e. those which admit a representation in terms of elements of X and translation operators.

An extremely interesting problem regarding harmonic operators is to find at least sufficient conditions so that every harmonic operator with respect to a family of measures on G can be represented using only harmonic functions with respect to that family of measures and translation opertaors. Since this problem reduces (as we see in Chapter 4) to whether a certain Fubini crossed product coincides with the respective spatial crossed product, it becomes clear that the relation between the crossed products $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ and $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ deserves to be studied more thoroughly on a more general setting.

Chapter 1: Preliminaries

In section 1.1 we present selected topics from [7, 14, 52] regarding basic concepts from Operator Space and Operator Algebra Theory. In the next section 1.2, for which we refer to [7, 14, 19, 20, 30, 31, 52, 55], we summarize the main properties of spatial and the Fubini tensor products of dual operator spaces, which we will use later. Section 1.3 is a brief, but sufficient for the purpose of this thesis, presentation of the concept of stable point-w*-convergence for completely bounded w*-continuous maps on von Neuamann algebras [13, 22, 32]. Finally, in section 1.4, we summarize the basic properties of locally compact groups, as well as the von Neumann and Banach algebras associated with a locally compact group [15, 16, 23, 46, 47].

Chapter 2: General theory of comodules

In this chapter, following mainly the terminology of [19], we deal with dual operator spaces which are comodules over Hopf-von Neumann algebras (the basic definitions may be found in section 2.1). In section 2.2, we define the notions of *saturated* and *non-degenerate* comodules. On the one hand, we

show that if every comodule over a Hopf-von Neumann algebra M is non-degenerate, then every comodule of M is saturated. On the other hand, we prove that a Hopf-von Neumann algebra M admits only staurated comodules if and only if the identity map id_M can be approximated in the stable point-w*-topology by maps of the form $(\mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ \Delta$, where $\omega \in M_*$ and Δ is comultiplication of M.

In section 2.3, for any locally compact group G, we describe the canonical Hopf-von Neumann algebra structure of the algebras $L^\infty(G)$ and $L(G)$ [46, 49]. Next, we prove that every $L^\infty(G)$-comodule is both non-degenerate and saturated. In addition, we show that every $L(G)$-comodule is non-degenerate if and only if every $L(G)$-comodule is saturated if and only if G has the approximation property (AP) of Haagerup-Kraus [22].

Chapter 3: Crossed products

In this chapter we consider crossed products of dual operator spaces. Let (X, α) be an $L^\infty(G)$-comodule and (Y, δ) be an $L(G)$-comodule. The Fubini crossed products $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ and $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ are defined as the fixed points of some appropriate actions, whereas the corresponding statial crossed products $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ and $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ are defined as follows: the former is the w*-closed $L(G)$-bimodule generated by $\alpha(X)$ and the latter is the w*-closed $L^\infty(G)$-bimodule generated by $\delta(Y)$. Also, $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ and $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ admit an $L(G)$-comodule structure via the dual action $\widehat{\alpha}$, while $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ and $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ become $L^\infty(G)$-comodules via the dual action $\widehat{\delta}$.

Our main idea is that $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ is the smallest saturated $L(G)$-comodule containing $X \overline{\rtimes}_\alpha G$, whereas $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ is the largest non-degenerate $L(G)$- sub-comodule of $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$. As we prove, the same principle applies to the case of the $L^\infty(G)$-comodules $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ and $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ and thus the equality $Y \overline{\ltimes}_\delta G = Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ is always valid, since all $L^\infty(G)$-comodules are saturated and non-degenerate.

Next, we prove that a locally compact group G has the approximation property (AP) of Haagerup-Kraus if and only if $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ for any $L^\infty(G)$-comodule (X, α). The only if part, which was first proved by Crann and Neufang [12] using quite technical arguments, follows immediately from the results we have developped so far. For the if part, the basic tool we use is the following: for an $L(G)$-comodule (Y, δ), we have $(Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G \simeq Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ if and only if Y is non-degenerate, while $(Y \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G \simeq Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ if and only if Y is saturated. Therefore, if $X \overline{\rtimes}_\alpha G = X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ for any $L^\infty(G)$-comodule (X, α), then $(Y \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G = (Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$ for any $L(G)$-comodule (Y, δ). This means that every saturated $L(G)$-comodule is non-degenerate, which in turn, as we prove with a simple argument, implies that every $L(G)$-comodule is non-degenerate, i.e. G has the approximation property (AP).

Chapter 4: Applications to Harmonic Analysis

In the last chapter, we prove that the spaces of jointly harmonic operators $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ kai $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$ [5, 6] for arbitrary subsets $\Lambda \subseteq M(G)$ and $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$ coincide with the (Fubini) crossed products $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) \simeq \mathcal{H}(\Lambda) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha_G} G$ and $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma \simeq \mathcal{H}_\Sigma \ltimes^{\mathcal{F}}_{\delta_G} G$ respectively, where $\mathcal{H}(\Lambda)$ stands for the Λ-harmonic functions on $L^\infty(G)$ and $\mathcal{H}_\Sigma$ is the Σ-harmonic functionals on $L(G)$. Also, via the same isomorphisms, we have $\mathcal{H}(\Lambda)\overline{\rtimes}_{\alpha_G} G \simeq \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ and $\mathcal{H}_\Sigma \overline{\ltimes}_{\delta_G} G \simeq \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma)$.

As an application of the above we generalize some results of [4, 5] for arbitrary (not necessarily second countable) locally compact groups. Moreover, we answer the following question raised by Anoussi, Katavolos and Todorov in [4]: for which groups G it holds that $L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = J^\perp$ for any closed ideal J of $A(G)$? Finally, we generalize some results of [6, 12] by finding conditions, a priori weaker that the approximation property of Haagerup and Kraus (AP), which guarantee the validity of the equlaity $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ for all $\Lambda \subseteq M(G)$.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Χώροι τελεστών

Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση ορισμένων βασικών στοιχείων και εννοιών από την Θεωρία Χώρων Τελεστών και την Θεωρία Αλγεβρών von Neumann. Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων που διατυπώνονται σε αυτήν την ενότητα έχουν παραλειφθεί καθώς τα θέματα που συγκεντρώνονται εδώ υπάρχουν σε αρκετά βιβλία όπως [7, 14, 52].

Για δύο χώρους Hilbert H και K, συμβολίζουμε με $B(K, H)$ τον χώρο των φραγμένων τελεστών από τον K στον H. Επίσης, θα γράφουμε $B(H)$ αντί του $B(H, H)$.

Θα κάνουμε την ακόλουθη σύμβαση όσον αφορά τον συμβολισμό. Συμβολίζουμε την ταυτοτική απεικόνιση του X με id_X (παραλείποντας τον δείκτη X όταν αυτό εννοείται από τα συμφραζόμενα). Επίσης, θα γράφουμε 1_M για το μοναδιαίο στοιχείο μιας άλγεβρας M (πάλι παραλείποντας τον δείκτη αν είναι είναι ξεκάθαρο). Στην δε ειδική περίπτωση $M = B(H)$ για ένα χώρο Hilbert H, θα γράφουμε $1_H := \mathrm{id}_H = 1_{B(H)}$.

Για δύο θετικούς ακεραίους m και n και ένα γραμμικό χώρο V, συμβολίζουμε με $M_{m,n}(V)$ τους $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από τον V. Επί πλέον, γράφουμε $M_n(V) := M_{n,n}(V)$ και $M_{m,n} := M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Ας υποθέσουμε ότι οι X και Y είναι γραμμικοί χώροι και η $u\colon X \to Y$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. Για ένα θετικό ακέραιο n, γράφουμε u_n για την επαγόμενη απεικόνιση

$$u_n\colon M_n(X) \to M_n(Y)\colon [x_{ij}] \mapsto [u(x_{ij})].$$

Αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ως η απεικόνιση $\mathrm{id}_{M_n} \otimes u$ του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου $M_n \otimes X$. Παρομοίως, ορίζεται και η $u_{m,n}\colon M_{m,n}(X) \to M_{m,n}(Y)$. Αν κάθε ένας από τους χώρους πινάκων $M_n(X)$ ανδ $M_n(Y)$ έχει μια δοσμένη νόρμα $\|\cdot\|_n$ και αν η u_n είναι ισομετρία για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι η u είναι *πλήρως ισομετρική*, ή μια *πλήρης ισομετρία*. Ομοίως, η u είναι *πλήρης συστολή* αν κάθε u_n είναι συστολή. Μια απεικόνιση u είναι *πλήρως* *φραγμένη* αν

$$\|u\|_{cb} := \sup\{\|[u(x_{ij})]\|_n : \|[x_{ij}]\|_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Η σύνθεση πλήρως φραγμένων απεικονίσεων είναι πλήρως φραγμένη και ισχύει η αναμενόμενη σχέση

$$\|u \circ v\|_{cb} \leq \|u\|_{cb}\|v\|_{cb}.$$

Αν η $u\colon X \to Y$ είναι ένας πλήρως φραγμένος γραμμικός ισομορφισμός, και αν η αντίστροφή της είναι επίσης πλήρως φραγμένη, τότε θα λέμε ότι η u είναι ένας *πλήρης ισομορφισμός*. Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι οι X και Y είναι *πλήρως ισόμορφοι*.

Αν $m, n \in \mathbb{N}$, και K, H είναι χώροι Hilbert, τότε ο $M_{m,n}(B(K, H))$ κληρονομεί μια νόρμα $\|\cdot\|_{m,n}$ μέσω του φυσιολογικού αλγεβρικού ισομορφισμού

$$M_{m,n}(B(K, H)) \simeq B(K^{(n)}, H^{(m)})$$

ο οποίος γίνεται μια ισομετρία. Θυμηθείτε ότι $H^{(m)}$ είναι το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert m το πλήθος αντιγράφων του H.

Ένας *συγκεκριμένος χώρος τελεστών* είναι ένας norm-κλειστός γραμμικός υπόχωρος X του $B(K, H)$, για χώρους Hilbert H, K (αφού $B(K, H) \subseteq B(H \oplus K)$ αρκεί να θεωρήσει κανείς την περίπτωση $H = K$). Ένας *αφηρημένος χώρος τελεστών* είναι ένα ζεύγος $(X, \{\|\cdot\|_n\}_{n\geq 1})$, αποτελούμενο από ένα γραμμικό χώρο X και μια νόρμα στον $M_n(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε να υπάρχει μια γραμμική πλήρης ισομετρία $u\colon X \to B(K, H)$ για κάποιους χώρους Hilbert H και K. Σε αυτήν την περίπτωση η ακολουθία $\{\|\cdot\|_n\}_{n\geq 1}$ καλείται μια *δομή χώρου τελεστών* στον γραμμικό χώρο X. Μια δομή χώρου τελεστών σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ σημαίνει μια ακολουθία από νόρμες πινάκων όπως παραπάνω, αλλά επί πλέον $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Προφανώς υπόχωροι χώρων τελεστών είναι επίσης χώροι τελεστών. Συχνά ταυτίζουμε δύο χώρους τελεστών αν αυτοί είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφοι.

Οι δομές χώρων τελεστών μπορούν να χαρακτηρισθούν αφηρημένα χάρη στο θεώρημα αναπαράστασης του Ruan.

Θεώρημα 1.1.1 (Ruan). *Υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας γραμμικός χώρος και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε μια δοσμένη νόρμα $\|\cdot\|_n$ στον $M_n(X)$. Τότε ο X είναι γραμμικά πλήρως ισομετρικά ισόμορφος με ένα γραμμικό υπόχωρο του $B(H)$, για κάποιο χώρο Hilbert H, αν και μόνον αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

(R1) $\|\alpha x \beta\|_n \leq \|\alpha\|\|x\|_n\|\beta\|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε* $\alpha, \beta \in M_n$ *και* $x \in M_n(X)$·

(R2) Γι κάθε $x \in M_m(X)$ *και* $y \in M_n(X)$, *ισχύει*

$$\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right\|_{m+n} = \max\{\|x\|_m, \|y\|_n\}.$$

Οι συνθήκες (R1) και (R2) καλούνται συχνά αξιώματα του Ruan.

Αν οι X, Y είναι χώροι τελεστών, τότε ο χώρος $CB(X, Y)$ των πλήρως φραγμένων απεικονίσεων από τον X στον Y, είναι επίσης ένας χώρος τελεστών, ως προς τις νόρμες πινάκων που ορίζονται μέσω του κανονικού ισομορφισμού

$$M_n(CB(X, Y)) \simeq CB(X, M_n(Y)).$$

Ισοδύναμα, αν $[u_{ij}] \in M_n(CB(X, Y))$, τότε

$$\|[u_{ij}]\|_n = \sup\{\|[u_{ij}(x_{kl})]\|_{nm} : [x_{kl}] \in M_m(X),\ \|[x_{kl}]\| \leq 1,\ m \in \mathbb{N}\} \quad (1.1)$$

όπου οι γραμμές του πίνακα $[u_{ij}(x_{kl})]$ είναι αριθμημένες από τα i και k και οι στήλες του από τα j και l. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω αντικαθιστώντας το n με nN, για τον χώρο πινάκων $M_N(M_n(CB(X, Y))) = M_{nN}(CB(X, Y))$, προκύπτει ότι

$$M_n(CB(X, Y)) \simeq CB(X, M_n(Y)) \quad (1.2)$$

πλήρως ισομετρικά.

Επαληθεύεται ότι οι νόρμες (1.1) ορίζουν μια δομή χώρου τελεστών στον $CB(X, Y)$ με μια άμεση εφαρμογή του θεωρήματος του Ruan.

1.1.1 Δυϊκοί χώροι τελεστών

Στην ειδική περίπτωση που $Y = \mathbb{C}$, για κάθε χώρο τελεστών X, παίρνουμε μια δομή χώρου τελεστών στον $X^* = CB(X, \mathbb{C})$. Ο τελευταίος χώρος ταυτίζεται με τον $B(X, \mathbb{C})$ ισομετρικά επειδή κάθε συνεχές συναρτησοειδές ϕ σε ένα χώρο τελεστών X είναι πλήρως φραγμένο με $\|\phi\| = \|\phi\|_{cb}$ (βλέπε π.χ. [7, 1.2.6]). Καλούμε τον X^*, θεωρούμενο ως ένα χώρο τελεστών, κατ' αυτόν τον τρόπον, τον *δυϊκό χώρο τελεστών* του X. Από την (1.2) έπεται

$$M_n(X^*) \simeq CB(X, M_n)$$

πλήρως ισομετρικά.

Ένας χώρος τελεστών Y καλείται *δυϊκός χώρος τελεστών* αν ο Y είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό χώρο τελεστών X^* ενός χώρου τελεστών X. Θα λέμε επίσης ότι ο X είναι ένας *προδυϊκός χώρος τελεστών* του Y και θα συμβολίζουμε τον X με Y_*.

Αν H είναι ένας χώρος Hilbert, τότε ο χώρος $\mathcal{T}(H)$ των *trace class τελεστών* στον H, δηλαδή ο χώρος όλων των $T \in B(H)$ που ικανοποιούν

$$\|T\|_1 := \mathrm{tr}|T| < \infty$$

είναι ένας χώρος Banach ως προς την trace class νόρμα $\|\cdot\|_1$. Το ίχνος tr είναι ένα συναρτησοειδές του $\mathcal{T}(H)$ νόρμας μικρότερης ή ίσης του ένα και μέσω του δυϊσμού $(S, T) \mapsto \mathrm{tr}(ST)$, όπως είναι γνωστό, ισχύει $\mathcal{T}(H)^* \simeq B(H)$ ισομετρικά. Μάλιστα, θεωρώντας τον $\mathcal{T}(H)$ ως ένα χώρο τελεστών με την δομή χώρου τελεστών που κληρονομεί ως υπόχωρος του $B(H)^*$, ο τελευταίος ισομορφισμός είναι πλήρως ισομετρικώς.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο πολλαπλασιαμός στον $B(H)$ είναι χωριστά w*-συνεχής. Δηλαδή, αν $S_i \longrightarrow S$ στην w*-τοπολογία του $B(H)$, τότε $S_iT \longrightarrow ST$ και $TS_i \longrightarrow TS$ στην w*-τοπολογία επίσης. Η w*-τοπολογία στον $B(H)$ καλείται επίσης και η *σ-ασθενή τοπολογία* ή η *υπερασθενής τοπολογία*. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές του $B(H)$ είναι σ-ασθενώς συνεχές αν και μόνον αν είναι της μορφής

$$T \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \langle T\xi_k | \eta_k \rangle$$

για $\xi_k, \eta_k \in H$ με $\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k\|^2$ πεπερασμένα.

Επομένως, μπορούμε να ταυτίζουμε τον $B(H)_*$ με τα σ -ασθενώς συνεχή συναρτησοειδή του $B(H)$.

Η κλάση των w*-κλειστών υπόχωρων του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H συμπίπτει ουσιατικά με την κλάση των δυϊκών χώρων τελεστών. Για την ακρίβεια, έχουμε

Πρόταση 1.1.2. *Κάθε w*-κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $B(H)$ είναι ένας δυϊκός χώρος τελεστών. Αντιστρόφως, Κάθε δυϊκός χώρος τελεστών είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφος, μέσω ενός w*-w*-ομοιομορφισμού, με ένα w*-κλειστό υπόχωρο του $B(H)$, για κάποιο χώρο Hilbert H.*

Για τον λόγο αυτό, στα επόμενα, ο όρος «δυϊκός χώρος τελεστών» θα αναφέρεται σε ένα w*-κλειστό υπόχωρο του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H εφ' όσον οι ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν κατά κύριο λόγο είναι ανεξάρτητες της επιλογής του χώρου Hilbert H.

Επί πλέον, για ένα w*-κλειστό υπόχωρο X του $B(H)$ ένας προδυϊκός χώρος τελεστών X_* (όχι απαραιτήτως και ο μοναδικός) είναι ο χώρος των σ-ασθενώς συνεχών συναρτησοειδών του5 X.

Παρατήρηση 1.1.3. Από το θεώρημα Krein-Smulian, έπεται ότι αν η $u\colon X \to Y$ είναι μια w*-συνεχής ισομετρία μεταξύ δυϊκών χώρων Banach X ανδ Y, τότε η u έχει w*-κλειστή εικόνα και είναι ένας w*-w*-ομοιομορφισμός από τον X επί του $u(X)$.

Συνεπώς, αν οι X και Y είναι επί πλέον δυϊκοί χώροι τελεστών και η $u\colon X \to Y$ είναι μια w*-συνεχής πλήρης ισομετρία, τότε ο $u(X)$ είναι ένας δυϊκός χώρος τελεστών (πλήρως ισομετρικά ισόμορφος και w*-w*-ομοιομορφικός με τον X).

1.1.2 Άλγεβρες von Neumann

Έστω H ένας χώρος Hilbert. Για ένα υποσύνολο M του $B(H)$ συμβολίζουμε με M' τον *μεταθέτη* του M, δηλαδή το σύνολο

$$M' := \{T \in B(H) : \ TS = ST \quad \forall S \in M\}.$$

Επίσης, συμβολίζουμε με M'' τον μεταθέτη $(M')'$ του M'. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $M \subseteq M''$.

Επί πλέον, μπορεί να δει κανείς ότι ο M' είναι πάντα μια υπάλγεβρα του $B(H)$, η οποία περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή 1_H. Ακόμη, από το γεγονός ότι ο πολλαπλασιαμός είναι χωριστά w*-συνεχής έπεται ότι ο M' είναι επίσης μια w*-κλειστή υπάλγεβρα του $B(H)$.

Αν το M είναι, επιπροσθέτως, αυτοσυζυγές, δηλαδή $T^* \in M$ όταν $T \in M$, τότε ο M' είναι επίσης αυτοσυζυγής.

Μια μοναδιαία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα M του $B(H)$, για ένα χώρο Hilbert H, καλείται *άλγεβρα von Neumann* (που δρα στον H) αν $M = M''$.

Εφ' όσον οι μεταθέτες είναι w*-κλειστοί, κάθε άλγεβρα von Neumann είναι w*-κλειστή και επομένως δυϊκός χώρος τελεστών. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές για μια μοναδιαία αυτοσυζυγή υπάλγεβρα του $B(H)$· αυτό είναι το γνωστό θεώρημα δεύτερου μεταθέτη του von Neumann.

Θεώρημα 1.1.4 (von Neumann). *Αν M είναι μια μοναδιαία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $B(H)$ για ένα χώρο Hilbert H, τότε*

$$M'' = \overline{M}^{\mathrm{w}^*}.$$

Συνεπώς οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η M είναι μια άλγεβρα von Neumann, δηλ. $M = M''$·

(ii) Η M είναι w-κλειστή στον $B(H)$.*

1.2 Τανυστικά γινόμενα

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε για το τανυστικό γινόμενο Fubini και το χωρικό τανυστικό γινόμενο (δυϊκών) χώρων τελεστών καθώς επίσης και για τανυστικά γινόμενα απεικονίσεων. Τα παραπάνω αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για την μελέτη των σταυρωτών γινομένων για δράσεις ομάδων σε χώρους τελεστών.

Για περισσότερες λεπτομέρειες, καθώς και για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων που θα αναφερθούν παρακάτω, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [7, 14, 19, 20, 30, 31, 52, 55].

Για οποιουσδήποτε χώρους Hilbert H και K, υπάρχει ένα μοναδικό εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot|\cdot\rangle$ στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $H \odot K$ των H και K, τέτοιο ώστε για κάθε $\xi_1, \xi_2 \in H$ και $\eta_1, \eta_2 \in K$ να ισχύει

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1 | \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle.$$

Συμβολίζουμε με $H \otimes K$ το *τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert* των H και K, δηλαδή τηνπλήρωση του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου $H \odot K$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Επίσης, για οποιουσδήποτε τελεστές $T_1 \in B(H)$ και $T_2 \in B(H)$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $T_0 \in B(H \otimes K)$, τέτοιος ώστε

$$(T_0)(\xi \otimes \eta) = (T_1\xi) \otimes (T_2\eta), \qquad \xi \in H, \ \eta \in K.$$

Συμβολίζουμε τον τελεστή T_0 με $T_1 \otimes T_2$.

Έστω X και Y w*-κλειστοί υπόχωροι του $B(H)$ και του $B(K)$ αντιστοίχως. Το *χωρικό τανυστικό γινόμενο* των X και Y που συμβολίζεται με $X\overline{\otimes}Y$ ορίζεται ως ο w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H \otimes K)$ που παράγεται από τους τελεστές $x \otimes y$ για $x \in X$ και $y \in Y$, δηλαδή

$$X\overline{\otimes}Y := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{x \otimes y : \ x \in X, \ y \in Y\} \subseteq B(H \otimes K).$$

Στην ειδική περίπτωση που $X = B(H)$ καααι $Y = B(K)$, έπεται ότι

$$B(H)\overline{\otimes}B(K) = B(H \otimes K).$$

Αυτό προκύπτει από το θεώρημα δεύτερου μεταθέτη του von Neumann και το θεώρημα μεταθέτη του Tomita για τανυστικά γινόμενα αλγεβρών von Neumann· βλέπε για παράδειγμα [52, Chapter IV, Proposition 1.6 and Theorem 5.9].

Θεώρημα 1.2.1 (Tomita). *Για οποιεσδήποτε άλγεβρες von Neumann M και N ισχύει*

$$(M\overline{\otimes}N)' = M'\overline{\otimes}N'.$$

Για δύο υπερασθενώς συνεχή συναρτησοειδή $\phi \in B(H)_*$ και $\psi \in B(K)_*$ οι γραμμικές απεικονίσεις

$$\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)} \colon B(H) \otimes B(K) \to B(K) : \ a \otimes b \mapsto \phi(a)b$$

και

$$\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \psi \colon B(H) \otimes B(K) \to B(H) : \ a \otimes b \mapsto \psi(b)a$$

έχουν μοναδικές υπερασθενώς συνεχείς επεκτάσεις στον $B(H \otimes K)$ (βλέπε π.χ. [14, Lemma 7.2.2]) τις οποίες συμβολίζουμε επίσης με $\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}$ και $\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \psi$. Ακολουθώντας τον Tomiyama [55], καλούμε την $\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}$ *δεξιά slice απεικόνιση* που επάγεται από το ϕ και την $\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \psi$ *αριστερή slice απεικόνιση* που επάγεται από το ψ.

Συμβολίζουμε με $\phi \otimes \psi$ κάθε μια από τις συνθέσεις $\phi \circ (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \psi)$ και $\psi \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})$ εφ' όσον αυτές προφανώς συμπίπτουν (επειδή συμφωνούν στα στοιχεία της μρφής $a \otimes b$ των οπίων η γραμμική θήκη είναι w*-πυκνή στον $B(H \otimes K)$).

Το *τανυστικό γινόμενο Fubini* των X και Y ορίζεται ως

$$\begin{aligned} X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y := \{T \in B(H \otimes K) : \ &(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \psi)(T) \in X, \\ &(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})(T) \in Y, \ \forall \psi \in B(K)_*, \ \forall \phi \in B(H)_*\}. \end{aligned}$$

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι, για οποιουσδήποτε δυϊκούς χώρους τελεστών X και Y, έχουμε

$$X\overline{\otimes}Y \subseteq X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y,$$

αλλά η ισότητα$X\overline{\otimes}Y = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y$ δεν αληθεύει πάντοτε. Για παράδειγμα, αν H είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Hilbert, τότε υπάρχει δυϊκός χώρος τελεστών X, τέτοιος ώστε $X\overline{\otimes}B(H)^{**} \neq X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}B(H)^{**}$ [31].

Ωστόσο, όπως έχει αποδειχθεί από τον Tomiyama [55, Theorem 2.1], για οποιεσδήποτε άλγεβρες von Neumann M και N ισχύει

$$M\overline{\otimes}N = M\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}N.$$

Μάλιστα αυτό είναι ισοδύναμο με το θεώρημα μεταθέτη του Tomita.

Θυμηθείτε ότι άλγεβρα von Neumann $M \subseteq B(H)$ είναι *εμφυτευτική* αν υπάρχει μια προβολή νόρμας ένα από τον $B(H)$ επί της M (βλέπε π.χ. [54, Chapter XV, §1, Definition 1.2, Corollary 1.3]). Όπως απέδειξε ο Kraus [30, Theorem 1.9], αν η M είναι μια εμφυτευτική άλγεβρα von Neumann, ειδικότερα, αν $M = B(K)$ για κάποιο χώρο Hilbert K ή η M είναι αβελιανή, τότε $X\overline{\otimes}M = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$ για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X.

Παρατηρείστε επίσης ότι από τον ορισμό του τανυστικού γινομένου Fubini έπεται εύκολα ότι για w*-κλειστούς υπόχωρους $X_i \subseteq B(H)$ και $Y_i \subseteq B(K)$, $i = 1, 2$, έχουμε

$$(X_1\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_1) \cap (X_2\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_2) = (X_1 \cap X_2)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}(Y_1 \cap Y_2).$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας αυτό με το παραπάνω θεώρημα του Kraus, έπεται ότι για δύο δυϊκούς χώρους τελεστών $X \subseteq B(H)$ και $Y \subseteq B(K)$ ισχύει

$$X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y = (X\overline{\otimes}B(K)) \cap (B(H)\overline{\otimes}Y). \tag{1.3}$$

Έστω V και W δύο χώροι τελεστών. Για ένα θετικό ακεραιο n και ένα πίνακα $u \in M_n(V \otimes W)$ ορίζεται

$$\|u\|_{\wedge,n} = \inf\{\|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\| : \ u = \alpha(v \otimes w)\beta\},$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις $u = \alpha(v \otimes w)\beta$ με $v \in M_m(V)$, $w \in M_k(W)$, $\alpha \in M_{n,mk}$ και $\beta \in M_{mk,n}$ για αυθαίρετους $m, k \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $\{\|u\|_{\wedge,n}\}_{n\geq 1}$ ορίζει μια δομή χώρου τελεστών στο τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$. Η πλήρωση $V\widehat{\otimes}W$ του $(V \otimes W, \|\cdot\|_{\wedge,1})$ καλείται το *προβολικό τανυστικό γινόμενο χώρων τελεστών* των V και W.

Αν X και Y είναι δυϊκοί χώροι τελεστών με προδυϊκούς X_* και Y_* αντιστοίχως, τότε υπάρχουν w*-ομοιομορφικοί πλήρως ισομετρικοί ισομορφισμοί

$$X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y \simeq (X_*\widehat{\otimes}Y_*)^* \simeq CB(X_*, Y) \simeq CB(Y_*, X). \tag{1.4}$$

Δείτε, για παράδειγμα, [14, Corollary 7.1.5, Theorem 7.2.3].

Για $i = 1, 2$, έστω $X_i \subseteq B(H_i)$ και $Y_i \subseteq B(K_i)$ δυϊκοί χώροι τελεστών και έστω $\Phi\colon X_1 \to X_2$ και $\Psi\colon Y_1 \to Y_2$ πλήρως φραγμένες w*-συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις. Τότε, χρησιμοποιώντας την (1.4) και το γεγονός ότι $X\overline{\otimes}B(H) = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}B(H)$ για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X και κάθε χώρο Hilbert H, ορίζονται οι w*-συνεχείς πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

$$\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(K_i)}\colon X_1\overline{\otimes}B(K_i) \to X_2\overline{\otimes}B(K_i),$$

$$\mathrm{id}_{B(H_i)} \otimes \Psi\colon B(H_i)\overline{\otimes}Y_1 \to B(H_i)\overline{\otimes}Y_2,$$

που είναι αντιστοίχως οι μοναδικές w*-συνεχείς επεκτάσεις των γραμμικών απεικονίσεων $a \otimes b \mapsto \Phi(a) \otimes b$ και $c \otimes d \mapsto c \otimes \Psi(d)$. Συγκεκριμένα, για $x \in X_1\overline{\otimes}B(K_i)$ και $y \in B(H_i)\overline{\otimes}Y_1$, τα στοιχεία $(\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(K_i)})(x)$ και $(\mathrm{id}_{B(H_j)} \otimes \Psi)(y)$ ορίζονται μονοσήμαντα αντιστοίχως από τις

$$\langle(\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(K_i)})(x), f \otimes g\rangle = \langle((f \circ \Phi) \otimes \mathrm{id}_{B(K_i)})(x), g\rangle,$$

για $f \in X_{2*},\ g \in B(K_i)_*$ και

$$\langle(\mathrm{id}_{B(H_j)} \otimes \Psi)(y), h \otimes k\rangle = \langle(\mathrm{id}_{B(H_j)} \otimes (k \circ \Psi))(y), h\rangle,$$

για $h \in B(H_j)_*,\ k \in Y_{2*}$.

Επί πλέον, βλέπουμε ότι οι συνθέσεις $(\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(K_2)}) \circ (\mathrm{id}_{B(H_1)} \otimes \Psi)$ και $(\mathrm{id}_{B(H_2)} \otimes \Psi) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(K_1)})$ συμφωνούν στο $X_1\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_1 = (X_1\overline{\otimes}B(K_1)) \cap (B(H_1)\overline{\otimes}Y_1)$ (βλέπε (1.3)) και ορίζουν μια w*-συνεχή πλήρως φραγμένη απεικόνιση με τιμές στο $X_2\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_2$, η οποία είναι η μοναδική w*-συνεχής επέκταση της απεικόνισης$x_1 \otimes x_2 \mapsto \Phi(x_1) \otimes \Psi(x_2)$ για $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Συμβολίζουμε την υπ' όψιν απεικόνιση με

$$\Phi \otimes \Psi\colon X_1\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_1 \to X_2\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y_2.$$

Ακόμη, αν οι Φ και Ψ είναι πλήρως ισομετρικές (αντιστοίχως επί ή πλήρεις συστολές), τότε το ίδιο είναι και η $\Phi \otimes \Psi$.

1.3 Η stable point w*-τοπολογία

Έστω M μια άλγεβρα von Neumann και ας συμβολίσουμε με $CB_\sigma(M)$ τις w*-συνεχείς πλήρως φραγμένες απεικονίσεις της M. Επίσης, έστω K ένας διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Ακολουθώντας το [13], θα λέμε ότι ένα δίκτυο $\{T_j\}$ στον $CB_\sigma(M)$ συγκλίνει στην *stable point-w*-τοπολογία* στην $T \in CB_\sigma(M)$ αν

$$(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes T_j)(x) \longrightarrow (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes T)(x) \ \sigma\text{-ασθενώς για κάθε } x \in B(K)\overline{\otimes}M.$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα [22, Proposition 1.7] μας λέει ότι η ως άνω έννοια σύγκλισης είναι ανεξάρτητη της επιλογής του χώρου Hilbert K. Η απόδειξή του βασίζεται σε ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιείται για την απόδειξη της [32, Proposition 2.3]. Για την διευκόλυνση του αναγνώστη έχουμε συμπεριλάβει την συγκεκριμένη απόδειξη παρακάτω.

Πρόταση 1.3.1 ([22], Proposition 1.7). *Έστω $M \subseteq B(H)$ μια άλγεβρα von Neumann. Ένα δίκτυο $\{T_j\}$ στον $CB_\sigma(M)$ συγκλίνει στην stable point-w*-τοπολογία στην $T \in CB_\sigma(M)$ αν και μόνον αν, για κάθε άλγεβρα von Neumann N, $(\mathrm{id}_N \otimes T_j)(x) \longrightarrow (\mathrm{id}_N \otimes T)(x)$ σ-ασθενώς για κάθε $x \in N\overline{\otimes}M$.*

Απόδειξη. Έστω T_j, $T \in CB_\sigma(M)$ και ας υποθέσουμε ότι, για ένα διαχωρίσιμο απειροδιάστατο χώρο Hilbert K_1, έχουμε ότι

$$(\mathrm{id}_{B(K_1)} \otimes T_j)(x) \longrightarrow (\mathrm{id}_{B(K_1)} \otimes T)(x) \ \sigma\text{-ασθενώς} \ \forall x \in B(K_1)\overline{\otimes}M. \quad (1.5)$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι ότι το ίδιο ισχύει για κάθε άλγεβρα von Neumann N στην θέση του $B(K_1)$, αρκεί να το δείξουμε για την περίπτωση $N = B(K)$, όπου K ένας αυθαίρετος χώρος Hilbert.

Αν ο K είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε είναι unitarily ισοδύναμος με ένα κλειστό υπόχωρο του K_1 και επομένως το επιθυμητό συμπέρασμα έπεται αφού μπορούμε να θεωρήσουμε τον $B(K)$ ως υπόχωρο του $B(K_1)$. Συνεπώς, μένει να δειχθεί η επιθυμητή σύγκλιση για απειροδιάστατο K.

Το λοιπόν, έστω K απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $\omega \in (B(K)\overline{\otimes}M)_*$. Τότε, εφ' όσον το ω είναι αριθμήσιμο άθροισμα από vector functionals και κάθε διάνυσμα στον $K \otimes H$ είναι στην κλειστή γραμμική θήκη ενός αριθμήσιμου πλήθους διανυσμάτων μιας ορθοκανονικής βάσης, θα υπάρχει μια ορθή προβολή p στον $B(K)$ με το πολύ άπειρης αριθμήσιμης διάστασης εικόνα, τέτοια ώστε

$$\langle (p \otimes 1)x(p \otimes 1), \omega \rangle = \langle x, \omega \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in B(K)\overline{\otimes}M. \quad (1.6)$$

Έστω K_0 η εικόνα της p και έστω ω_0 ο περιορισμός του ω στον $B(K_0)\overline{\otimes}M$. Έπεται από την (1.6) ότι, για κάθε $x \in B(K)\overline{\otimes}M$,

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes T_j)(x), \omega \rangle &= \langle (p \otimes 1)(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes T_j)(x)(p \otimes 1), \omega_0 \rangle \\ &= \langle (\mathrm{id}_{B(K_0)} \otimes T_j)((p \otimes 1)x(p \otimes 1)), \omega_0 \rangle\end{aligned}$$

και η τελευταία ποσότητα συγκλίνει στην $\langle (\mathrm{id}_{B(K_0)} \otimes T)((p \otimes 1)x(p \otimes 1)), \omega_0 \rangle$, η οποία από την (1.6) ισούται με $\langle (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes T)(x), \omega \rangle$. Αυτό προκύπτει από την (1.5) αφού ο K_0 είναι unitarily ισοδύναμος με ένα κλειστό υπόχωρο του K_1. □

1.4 Άλγεβρες ομάδων

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τις συνήθεις άλγεβρες von Neumann που σχετίζονται με μια τοπικά συμπαγή ομάδα και τις βασικές τους ιδιότητες.

Για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων που διατυπόνονται στην ενότητα αυτή ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [15], [16] [23], [46], [47].

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα Hausdorff. Είναι γνωστό ότι υπάρχει ένα μοναδικό (ως προς πολλαπλασιασμό με θετικές σταθερές) μη τετριμμένο κανονικό μέτρο Borel μ στην G, τέτοιο ώστε για κάθε $s \in G$ και κάθε Borel μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq G$ να ισχύει

$$\mu(sA) = \mu(A).$$

Αυτό το μέτρο καλείται ένα *αριστερό μέτρο Haar* στην G.

Ακόμη, υπάρχει ένας συνεχής ομομορφισμός ομάδων $\Delta_G \colon G \to (0, +\infty)$ που ικανοποιεί

$$\mu(As) = \Delta_G(s)\mu(A)$$

για κάθε $s \in G$ και κάθε Borel $A \subseteq G$. Αυτός καλείται *modular function* της G.

Θα γράφουμε ds αντί του $d\mu(s)$. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες για την ολοκλήρωση ως προς το μέτρο Haar

$$d(ts) = ds,$$

$$d(st) = \Delta_G(t)ds \qquad \forall t \in G,$$
$$ds^{-1} = \Delta_G(s)^{-1}ds.$$

Στο εξής, το γράμμα G θα δηλώνει πάντα μια τοπικά συμπαγή ομάδα Hausdorff με ένα σταθεροποιημένο αριστερό μέτρο Haar ds και modular function Δ_G.

Ο χώρος $L^1(G)$ των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς σχεδόν παντού ισότητα των ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων της G είναι μια άλγεβρα Banach με ενέλιξη ως προς την νόρμα

$$\|f\|_1 = \int_G |f(s)|ds, \qquad f \in L^1(G)$$

και γινόμενο (συνέλιξη) και ενέλιξη που ορίζονται αντίστοιχα ως

$$(f * g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)dt$$

$$f^*(s) = \Delta_G(s)^{-1}\overline{f(s^{-1})}.$$

Ένα *τοπικά μηδενικό* σύνολο είναι ένα Borel υποσύνολο A της G ώστε, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K της G, η τομή $A \cap K$ έχει μέτρο Haar μηδέν. Λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει *τοπικά σχεδόν παντού* αν αυτή ισχύει για κάθε $s \in G$ εκτός από ένα τοπικά μηδενικό υποσύνολο της G.

Για μια μετρήσιμη συνάρτηση $f \colon G \to \mathbb{C}$, έστω

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : \ \{s \in G : |f(s)| > M\} \text{ τοπικά μηδενικό}\}$$

το *ουσιώδες supremum* της f. Αν $\|f\|_\infty < \infty$, τότε η f λέγεται *ουσιωδώς φραγμένη*. Επίσης, έστω $L^\infty(G)$ ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς τοπικά σχεδόν παντού ισότητα ουσιωδώς φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων.

Ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ και εφοδιασμένος με τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό

$$(fg)(s) = f(s)g(s) \qquad s \in G$$

και την ενέλιξη που δίνεται από την μιγαδική συζυγία

$$f^*(s) = \overline{f(s)} \qquad s \in G,$$

ο $L^\infty(G)$ είναι μια μοναδιαία C*-άλγεβρα (με μονάδα την σταθερή συνάρτηση 1). Αυτό σημαίνει ότι ο $L^\infty(G)$ είναι μια άλγεβρα Banach με ενέλιξη που έχει επί πλεον την ιδιότητα (*C^*-ιδιότητα*)

$$\|ff^*\|_\infty = \|f\|_\infty^2 \qquad f \in L^\infty(G).$$

Ακόμη, ο $(L^\infty(G), \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό χώρο Banach του $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ μέσω του ισομετρικού ισομορφισμού

$$T\colon L^\infty(G) \to L^1(G)^*$$

$$T(\phi)(f) = \int_G f(s)\phi(s)ds, \qquad \phi \in L^\infty(G),\ f \in L^1(G).$$

Θυμηθείτε ότι ο χώρος $L^2(G)$ των κλάσεων ισοδυναμίας τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή εκείνων των συναρτήσεων $\xi\colon G \to \mathbb{C}$ ώστε

$$\|\xi\|_2 := \int_G |\xi(s)|^2 ds < \infty,$$

είναι ένας χώρος Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμεο $\langle\cdot|\cdot\rangle$ που ορίζεται ως

$$\langle\xi|\eta\rangle = \int_G \xi(s)\overline{\eta(s)}ds \qquad \xi, \eta \in L^2(G).$$

Η γραμμική απεικόνιση $\mathcal{M}\colon L^\infty(G) \to B(L^2(G))$ που ορίζεται ως

$$(\mathcal{M}_\phi\xi)(s) = \phi(s)\xi(s) \qquad \phi \in L^\infty(G),\ \xi \in L^2(G),\ s \in G$$

είναι ένας ισομετρικός *-ομομορφισμός, ο οποίος είναι ομοιομορφισμός ως προς την $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-τοπολογία και την υπερασθενή τοπολογία του $B(L^2(G))$.

Για τον παραπάνω λόγο, στο εξής θα ταυτίζουμε πάντα τον $L^\infty(G)$ με την von Neumann υπάλγεβρα του $B(L^2(G))$ που αποτελείται από τους τελεστές πολλαπλασιασμού $\mathcal{M}_\phi$ με $\phi \in L^\infty(G)$. Επίσης, στα επόμενα θα παραλείπουμε την απεικόνιση $\mathcal{M}$ χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για ένα στοιχείο του $L^\infty(G)$ και τον αντίστοιχο τελεστή πολλαπλασιασμού.

Μια άλλη σημαντική άλγεβρα von Neumann που σχετίζεται με την ομάδα G είναι η *αριστερή άλγεβρα von Neumann* της G, δηλαδή η άλγεβρα von Neumann

$$L(G) := \lambda(G)'' \subseteq B(L^2(G))$$

που παράγεται από την *αριστερή κανονική αναπαράσταση*

$$\lambda\colon G \to B(L^2(G))$$

$$\lambda_s\xi(t) = \xi(s^{-1}t), \qquad \xi \in L^2(G),\ s,t \in G.$$

Παρατηρούμε ότι η λ είναι μια unitary αναπαράσταση, δηλαδή η λ είναι ένας ισχυρά συνεχής (οι απεικόνιση $s \mapsto \lambda_s\xi$ είναι συνεχής για κάθε $\xi \in L^2(G)$) ομομορφισμός ομάδων με τιμές στην ομάδα των unitary τελεστών που δρουν στον $L^2(G)$.

Ως συνήθως, για μια $f \in L^1(G)$ συμβολίζουμε με

$$\lambda(f) = \int_G f(t)\lambda_t\ dt$$

τον μοναδικό τελεστή (συνέλιξης) στον $B(L^2(G))$ που ικανοποιεί

$$\langle \lambda(f)\xi|\eta\rangle = \int_G f(t)\langle \lambda_t\xi|\eta\rangle\ dt, \qquad \xi,\eta \in L^2(G).$$

Αυτός ο τελεστής υπάρχει αφού η απεικόνιση $(\xi,\eta) \mapsto \int_G f(t)\langle\lambda_t\xi|\eta\rangle\ dt$ είναι σαφώς μια φραγμένη sesquilinear μορφή του $L^2(G) \times L^2(G)$. Επίσης, $\lambda(f) \in L(G)$, επειδή αν $x \in L(G)'$, τότε $\lambda(f)x = x\lambda(f)$ και άρα $\lambda(f) \in \lambda(G)'' = L(G)$.

Ακολουθώντας τον Eymard [15] συμβολίζουμε με $A(G)$ τον χώρο των συνεχών φραγμένων συναρτήσεων $u\colon G \to \mathbb{C}$ της μορφής

$$u(s) = \langle \lambda_s\xi|\eta\rangle, \qquad s \in G$$

για κάποια $\xi,\eta \in L^2(G)$. Το σύνολο $A(G)$ εφοδιασμένο με τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρρτήσεων και την νόρμα

$$\|u\| = \inf\{\|\xi\|\|\eta\| :\ \xi,\eta \in L^2(G),\ u(s) = \langle\lambda_s\xi|\eta\rangle\ \forall s \in G\}$$

είναι μια άλγεβρα Banach (η απόδειξη οφείλεται στον Eymard· βλ. [15, Proposition (3.4)]), η οποία καλείται *άλγεβρα Fourier* της G.

Σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα, που έχει αποδειχθεί επίσης από τον Eymard [15, Théorème (3.10)], ο προδυϊκός της $L(G)$ μπορεί να ταυτισθεί με την άλγεβρα Fourier $A(G)$.

Θεώρημα 1.4.1 (Eymard)**.** *Για κάθε τελεστή $T \in L(G)$ υπάρχει ένα μοναδικό φραγμένο συναρτησοειδές $\phi_T \in A(G)^*$, ώστε, αν $u \in A(G)$ και $u(s) = \langle\lambda_s\xi|\eta\rangle$ για $\xi,\eta \in L^2(G)$, τότε έχουμε*

$$\langle u, \phi_T\rangle = \langle T\xi|\eta\rangle.$$

Η απεικόνιση $T \mapsto \phi_T$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός από την $L(G)$ επί του $A(G)^*$ που είναι ομοιομορφισμός ως προς την υπερασθενή τοπολογία της $L(G)$ και την $\sigma(A(G)^*, A(G))$-τοπολογία· τα δε υπερασθενώς συνεχή συναρτησοειδή της $L(G)$ (δηλ. τα στοιχεία του προδυϊκού $L(G)_*$ της $L(G)$) είναι ακριβώς εκείνα της μορφής $T \mapsto \langle u, \phi_T \rangle$ για $u \in A(G)$.

Εκτός της αριστερής κανονικής αναπαράστασης λ ορίζεται και η λεγόμενη *δεξιά κανονική αναπαράσταση* της G, δηλαδή η unitary αναπαράσταση

$$\rho\colon G \to B(L^2(G))$$

που δίνεται από

$$(\rho_s \xi)(t) = \Delta_G(s)^{1/2} \xi(ts) \qquad s, t \in G,\ \xi \in L^2(G).$$

Η άλγεβρα von Neumann $R(G) := \rho(G)''$ που παράγεται από τους unitary τελεστές ρ_s, $s \in G$, καλείται η *δεξιά άλγεβρα von Neumann* της G.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα το γεγονός 'οτι η $L^\infty(G)$ είναι αβελιανή και ότι για κάθε $s, t \in G$ έχουμε $\lambda_s \rho_t = \rho_t \lambda_s$, επαληθεύονται άμεσα οι σχέσεις $L^\infty(G) \subseteq L^\infty(G)'$ και $R(G) \subseteq L(G)'$. Μάλιστα, αυτοί οι εγκλεισμοί είναι στην πραγματικότητα ισότητες, δηλαδή

$$L^\infty(G)' = L^\infty(G), \tag{1.7}$$

και

$$L(G)' = R(G). \tag{1.8}$$

Οι μεταθετικές ιδιότητες (1.7) και (1.8) παραπάνε έπονται από το μεταθετικό θεώρημα για αριστερές άλγεβρες Hilbert (βλ. [47, 10.1] για τον ορισμό των αριστερών αλγεβρών Hilbert) σύμφωνα με το οποίο η αριστερή και δεξιά άλγεβρα von Neumann μιας αριστερής άλγεβρας Hilbert είναι η μια ο μεταθέτης της άλλης· βλ. [47, 10.4 (2)].

Πράγματι, η (1.7) έπεται από το μεταθετικό θεώρημα [47, 10.4 (2)] αφού η $L^\infty(G) \cap L^2(G)$ με τις πράξεις του κατά σημείο πολλαπλασιασμού και της μιγαδικής συζυγίας είναι μια άλγεβρα Hilbert και η αντίστοιχη αριστερή και δεξιά άλγεβρα von Neumann συμπίπτουν αμφότερες με τον $L^\infty(G)$.

Παρόμοια, ο χώρος $C_c(G)$ των συμπαγώς φερομένων συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων της G είναι μια αριστερή άλγεβρα Hilbert με τις πράξεις της συνέλιξης και ενέλιξης

$$(\xi * \eta)(s) = \int_G \xi(t) \eta(t^{-1}s) dt, \quad \xi^*(s) = \Delta_G(s)^{-1} \overline{\xi(s^{-1})},$$

για $\xi, \eta \in C_c(G)$ και $s \in G$. Σε αυτήν την περίπτωση, η αντίστοιχη αριστερή και δεξιά άλγεβρα von Neumann είναι η $L(G)$ και η $R(G)$ αντιστοίχως. Άρα, η (1.8) προκύπτει ομοίως από το [47, 10.4 (2)].

Παρατηρείστε ότι για κάθε $s \in G$ και $\phi \in L^\infty(G)$ (θεωρούμενη ως τελεστής πολλαπλασιασμού) έχουμε

$$\lambda_s \phi \lambda_s^* = l_s \phi, \quad \rho_s \phi \rho_s^* = r_s \phi, \tag{1.9}$$

όπου $(l_s\phi)(t) := \phi(s^{-1}t)$ και $(r_s\phi)(t) = \phi(ts)$ για $t \in G$.

Επομένως, αν ο τελεστής πολλαπλασιασμού που αντιστοιχεί στην $\phi \in L^\infty(G)$ μετατίθεται με την $L(G)$ (αντίστοιχα με την $R(G)$), τότε η ϕ είνα αναλλοίωτη ως προς αριστερές (αντίστοιχα δεξιές) μεταφορές και άρα η ϕ θα είναι (τοικά σχεδόν παντού) σταθερά. Επομένως, από τις (1.7) και (1.8), παίρνουμε

$$B(L^2(G)) = (L^\infty(G) \cup L(G))'' = (L^\infty(G) \cup R(G))''. \tag{1.10}$$

Ακόμη, από το θεώρημα δεύτερου μεταθέτη του von Neumann και την (1.9) έπεται ότι η (1.10) γράφεται ισοδύναμα ως

$$B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\} = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)R(G)\}.^{1} \tag{1.11}$$

[1] Συμβολίζουμε με AB το σύνολο $\{ab : \; a \in A, \; b \in B\}$, για οποιαδήποτε υποσύνολα $A, \; B$ μιας άλγεβρας.

Κεφάλαιο 2

Γενική θεωρία των comodules

2.1 Άλγεβρες Hopf-von Neumann και comodules

Οι άλγεβρες Hopf-von Neumann και τα συσχετισμένα comodules επεκτείνουν την κλάση των τοπικά συμπαγών ομάδων και τα αντίστοιχα δυναμικά συστήματα (δείτε για παράδειγμα τις Προτάσεις 2.3.3 και 2.3.4) παρέχοντας έτσι ένα φυσιολογικό πλαίσιο για την ανάπτυξη μιας κομψής θεωρίας δυϊσμού για δράσεις ομάδων σε χώρους τελεστών, ακόμη και στην περίπτωση που η δρώσα ομάδα είναι μη αβελιανή (βλέπε ενότητα 3.3).

Εδώ παραθέτουμε τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες σχετικά με τις άλγεβρες Hopf-von Neumann και τα comodules στο πλαίσιο των δυϊκών χώρων τελεστών. Η ορολογία μας βασίζεται σε αυτήν του [19] με την διαφορά ότι εμείς θα θεωρήσουμε μόνον comodules στην κατηγορία των δυϊκών χώρων τελεστών με μορφισμούς τις γραμμικές απεικονίσεις που είναι w*-συνεχείς πλήρεις συστολές.

Ορισμός 2.1.1. Μια *άλγεβρα Hopf-von Neumann* είναι ένα ζεύγος (M, Δ), όπου M είναι μια άλγεβρα von Neumann και $\Delta\colon M \to M \overline{\otimes} M$ μια w*-συνεχής μοναδιαία *-εμφύτευση, η οποία είναι *συμπροσεταιριστική*, δηλ. ικανοποιεί

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_M) \circ \Delta = (\mathrm{id}_M \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Ισοδύναμα, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & M \overline{\otimes} M \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_M"] \\ M \overline{\otimes} M \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes \Delta"] & M \overline{\otimes} M \overline{\otimes} M \end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση Δ λέγεται *συγγινόμενο* της M.

Ορισμός 2.1.2. Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann . Ένα *M-comodule* είναι ένα ζεύγος (X, α) αποτελούμενο από ένα δυϊκό χώρο τελεστών X και μια w*-συνεχή πλήρη ισομετρία $\alpha\colon X \to X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ που είναι *συμπροσεταιριστική ως προς* την Δ, δηλ. ισχύει ότι

$$(\alpha \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha = (\mathrm{id}_X \otimes \Delta) \circ \alpha.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε το μεταθικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha\otimes\mathrm{id}_M} \\ X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M & \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\Delta} & X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \end{array}$$

Στην περίπτωση αυτή, καλούμε την α μια *δράση* της M στον X ή μια *M-δράση* στον X.

Ένας w*-κλειστός υπόχωρος Y του X λέγεται *M-subcomodule* του X αν $\alpha(Y) \subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$. Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $Y \leq X$ και ο Y είναι πράγματι ένα M-comodule για την δράση $\alpha|_Y$.

Ένας *M-comodule μορφισμός* μεταξύ δύο M-comodules (X, α) και (Y, β) είναι μια w*-w*-συνεχής πλήρης συστολή $\phi\colon X \to Y$, τέτοια ώστε

$$\beta \circ \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha.$$

Ένας M-comodule μορφισμός καλείται *M-comodule μονομορφισμός* (αντίστοιχα ισομορφισμός) αν είναι πλήρης ισομετρία (αντ. πλήρης ισομετρία και επί) και θα γράφουμε $X \simeq Y$ για ισόμορφα M-comodules.

Αν N είναι μια άλγεβρα von Neumann, τότε μια M-δράση $\pi\colon N \to N \overline{\otimes} M$ στην N που είναι επί πλέον και w*-μοναδιαία *-εμφύτευση θα λέγεται W*-*M-δράση* στην N (ή W*-*δράση* της M στην N) και το (N, π) θα λέγεται W*-*M-comodule*. Οι όροι W*-*M-subcomodule*, W*-*M-comodule μορφισμός* κλπ, ορίζονται αναλόγως.

Αν Y είναι ένας οιοσδήποτε δυϊκός χώρος τελεστών, τότε το τανυστικό γινόμενο Fubini $Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ είναι ένα M-comodule, το οποίο ονομάζεται *κανονικό* M-comodule, ως προς την δράση

$$\mathrm{id}_Y \otimes \Delta\colon Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \to Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M.$$

Γενικότερα, για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών Y και κάθε M-comodule (X, α), η απεικόνιση $\mathrm{id}_Y \otimes \alpha$ ορίζει μια M-δράση στο τανυστικό γινόμενο Fubini $Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} X$. Ομοίως, η απεικόνιση $(\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_Y)$ είναι μια M-δράση στο $X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} Y$ (όπου $\sigma\colon M \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} Y \to Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ είναι ο ισομορφισμός flip).

Παρατήρηση 2.1.3. Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann . Κάθε M-comodule (X, α) είναι ισόμορφο με ένα M-subcomodule ενός κανονικού

M-comodule, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής $(B(H)\overline{\otimes}M, \mathrm{id}_{B(H)}\otimes\Delta)$ για κάποιο χώρο Hilbert H.

Πράγματι, η εικόνα $\alpha(X)$ του X μέσω της δράσης α είναι ένα M-subcomodule του κανονικού M-comodule $X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$, διότι:

$$(\mathrm{id}_X\otimes\Delta)\circ\alpha(X) = (\alpha\otimes\mathrm{id}_M)\circ\alpha(X) \subseteq \alpha(X)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$$

και η α είναι ένας M-comodule ισομορφισμός από τον X επί του $\alpha(X)$ και επομένως

$$X \simeq \alpha(X) \leq X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M.$$

Ακόμη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και άρα $X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M \leq B(H)\overline{\otimes}M$.

Παρατήρηση 2.1.4. Για κάθε άλγεβρα Hopf-von Neumann (M,Δ), ο προδυϊκός M_* της M με την φυσιολογική δομή χώρου Banach και τον πολλαπλασιασμό που οριζεται ως

$$\omega\varphi = (\omega\otimes\varphi)\circ\Delta, \qquad \omega,\varphi\in M_*$$

γίνεται μια άλγεβρα Banach. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την συμπροσεταιριστικότητα της Δ, για κάθε $\omega,\phi,\psi\in M_*$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\omega\phi)\psi &= ((\omega\phi)\otimes\psi)\circ\Delta\\ &= [((\omega\otimes\phi)\circ\Delta)\otimes\psi]\circ\Delta\\ &= (\omega\otimes\phi\otimes\psi)\circ(\Delta\otimes\mathrm{id}_M)\circ\Delta\\ &= (\omega\otimes\phi\otimes\psi)\circ(\mathrm{id}_M\otimes\Delta)\circ\Delta\\ &= [\omega\otimes((\phi\otimes\psi)\circ\Delta)]\circ\Delta\\ &= \omega(\phi\psi)\end{aligned}$$

συνεπώς το παραπάνω γινόμενο είναι προσεταιριστικό. Επίσης, η νόρμα στον M_* είναι υποπολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\|\omega\phi\| \leq \|\omega\|\|\phi\|, \qquad \omega,\phi\in M_*$$

αφού η Δ είναι ισομετρία και $\|\omega\otimes\phi\| \leq \|\omega\|\|\phi\|$ για κάθε $\omega,\ \phi\in M_*$ (δείτε για παράδειγμα [14, Theorems 7.1.1 and 7.2.4]).

Ομοίως, ένα M-comodule (X,α) με την δομή προτύπου που ορίζεται από

$$\omega\cdot x = (\mathrm{id}_X\otimes\omega)\circ\alpha(x), \quad \omega\in M_*,\ x\in X$$

είναι ένα M_*-πρότυπο Banach (βλέπε [19, Lemma 2.3 (i)] για τις λεπτομέρειες).

Για την ακρίβεια, τα M-subcomodules του X συμπίπτουν ακριβώς με τα M_*-υποπρότυπα του X ως προς την ως άνω M_*-δράση προτύπου (βλ. [19, Lemma 2.3 (ii)]).

Επίσης, μια w*-συνεχής πλήρης συστολή $\phi\colon X\to Y$ μεταξύ δύο M-comodules X και Y είναι M-comodule μορφισμός αν και μόνον αν η ϕ είναι μορφισμός M_*-προτύπων (βλ. [19, Proposition 2.2, Lemma 2.3 (iii)]).

Η έννοια των σταθερών σημείων είναι εξαιρετικής σημασίας για την μελέτη των comodules μιας άλγεβρας Hopf-von Neumann, καθώς και για την μελέτη των σταυρωτών γινομένων όπως θα δούμε στις επόμενες ενότητες.

Ορισμός 2.1.5. Έστω (X, α) ένα M-comodule πάνω από μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (M, Δ). Ο *χώρος των σταθερών σημείων* του X είναι ο χώρος τελεστών

$$X^{\alpha} = \{x \in X : \ \alpha(x) = x \otimes 1_M\}.$$

Σημειώνουμε ότι ο X^{α} είναι προφανώς ένα M-subcomodule του X.

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση είναι η ακόλουθη: για ένα M-comodule (X, α) και ένα δυϊκό χώρο τελεστών Y, οι χώροι των σταθερών σημείων των M-comodules $(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} X, \mathrm{id}_Y \otimes \alpha)$ και $(X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} Y, (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_Y))$ δίνονται από τις

$$(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} X)^{\mathrm{id}_Y \otimes \alpha} = Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} X^{\alpha}$$

και

$$(X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} Y)^{(\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_Y)} = X^{\alpha} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} Y.$$

Επί πλέον, κάθε M-comodule ισομορφισμός $\phi \colon X \to Y$ μεταξύ δύο M-comodules (X, α) και (Y, β) απεικονίζει τον X^{α} επί του Y^{β}.

Πράγματι, εφ' όσον $\beta \circ \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha$, για κάθε $x \in X^{\alpha}$ έπεται

$$\begin{aligned} \beta(\phi(x)) &= (\phi \otimes \mathrm{id})(\alpha(x)) \\ &= (\phi \otimes \mathrm{id})(x \otimes 1) \\ &= \phi(x) \otimes 1 \end{aligned}$$

δηλαδή $\phi(x) \in Y^{\beta}$ και άρα $\phi(X^{\alpha}) \subseteq Y^{\beta}$.

Αντίστροφα, αν $y \in Y^{\beta}$, τότε καθώς η ϕ είναι επί θα υπάρχει ένα $x \in X$, τέτοιο ώστε $\phi(x) = y$. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \mathrm{id})(\alpha(x)) &= \beta(\phi(x)) \\ &= \beta(y) \\ &= y \otimes 1 \\ &= \phi(x) \otimes 1 \\ &= (\phi \otimes \mathrm{id})(x \otimes 1) \end{aligned}$$

και επομένως $\alpha(x) = x \otimes 1$, διότι η $\phi \otimes \mathrm{id}$ είναι ισομετρία (αφού η ϕ είναι επίσης ισομετρία). Από αυτό προκύπτει ο εγκλεισμός $Y^{\beta} \subseteq \phi(X^{\alpha})$.

Μια άλλη σημαντική έννοια όσον αφορά τις δράσεις αλγεβρών Hopf-von Neumann είναι η *μεταθετικότητα δράσεων*:

Ορισμός 2.1.6. Έστω (M_1, Δ_1) και (M_2, Δ_2) δύο έλγεβρες Hopf-von Neumann και α_1, α_2 δράσεις των M_1 και M_2 αντίστοιχα στον ίδιο χώρο τελεστών X. Θα λέμε ότι οι α_1 και α_2 *μετατίθενται* αν

$$(\alpha_1 \otimes \mathrm{id}_{M_2}) \circ \alpha_2 = (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha_2 \otimes \mathrm{id}_{M_1}) \circ \alpha_1,$$

όπου $\sigma \colon M_2 \overline{\otimes} M_1 \to M_1 \overline{\otimes} M_2 : \ x \otimes y \mapsto y \otimes x$ ο ισομορφισμός flip.

Το επόμενο λήμμα που οφείλεται στον Hamana μας λέει ότι ο χώρος των σταθερών σημείων X^α ενός δοθέντος comodule (X,α) είναι επίσης ένα comodule ως προς κάθε δράση στον X η οποία μετατίθεται με την α.

Λήμμα 2.1.7 ([19], Lemma 5.2)**.** *Αν α_1 και α_2 είναι αντίστοιχα δράσεις δύο αλγεβρών Hopf-von Neumann M_1 και M_2 πάνω στον ίδιο χώρο τελεστών X, οι οποίες μετατίθενται (Ορισμός 2.1.6), τότε ο χώρος των σταθερών σημείων X^{α_1} είναι ένα M_2-subcomodule του (X,α_2), δηλαδή ο περιορισμός $\alpha_2|_{X^{\alpha_1}}$ είναι μια δράση της M_2 στον X^{α_1}.*

2.2 Saturated και non-degenerate comodules

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε τις έννοιες *non-degeneracy* και *saturation* για γενικά M-comodules μιας άλγεβρας Hopf-von Neumann M. Όπως θα δούμε και στην ενότητα 3.3 οι δύο αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες με τον δυϊσμό Takesaki για τα σταυρωτά γινόμενα που ορίζονται από comodules πάνω από τις $L^\infty(G)$ και $L(G)$.

Προκειμένου να διαπιστωθεί η χρησιμότητα των εννοιών αυτών στην κλασική θεωρία δυϊσμού των σταυρωτών γινομένων αλγεβρών von Neumann ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [35], [37], [38], [48], [49], [50], [51] και [57].

Ο όρος saturation εισήχθη στο [48] για W*-comodules, ενώ ο όρος non-degeneracy πιθανότατα χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στο [34, σελ. 256].

Ορισμός 2.2.1. Έστω (M,Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann που δρα σε ένα χώρο Hilbert K και (X,α) ένα M-comodule με το X να είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Τότε, το (X,α) λέγεται *non-degenerate* αν ισχύει

$$X\overline{\otimes}B(K)=\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H\otimes b)\alpha(x):\ x\in X,\ b\in B(K)\}.$$

Παρατήρηση 2.2.2. Ας υποθέσουμε ότι (M,Δ) και (X,α) είναι όπως στον Ορισμό 2.2.1 και έστω (Y,β) ένα M-comodule με το Y να είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(L)$ για κάποιο χώρο Hilbert L. Αν η $\phi\colon X\to Y$ είναι ένας M-comodule ισομορφισμός και το X είναι non-degenerate, τότε και το Y είναι non-degenerate.

Πράγματι, αφού η $\phi\colon X\to Y$ είναι w*-αμφισυνεχής πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός, το ίδιο ισχύει και για την απεικόνιση $\psi:=\phi\otimes\mathrm{id}\colon X\overline{\otimes}B(K)\to Y\overline{\otimes}B(K)$ και προφανώς η ψ ικανοποιεί το ακόλουθο:

$$\psi((1_H\otimes b)z)=(1_L\otimes b)\psi(z),\qquad \text{για κάθε } z\in X\overline{\otimes}B(K) \text{ ανδ } b\in B(K).$$

Επίσης, εφ' όσον $\beta\circ\phi=(\phi\otimes\mathrm{id})\circ\alpha$ και $\phi(X)=Y$ έπεται ότι $\psi(\alpha(X))=\beta(Y)$. Επομένως αν το X είναι non-degenerate, τότε το ίδιο ισχύει για το Y.

Ειδικότερα, το να είναι το (X,α) non-degenerate δεν εξαρτάται από τον χώρο Hilbert H στον οποιο έχει αναπαρασταθεί ο X.

Πρόταση 2.2.3. *Αν (M,Δ) είναι μια άλγεβρα Hopf-von Neumann που δρα σε ένα χώρο Hilbert K και (X,α) ένα non-degenerate M-comodule, τότε*

$$X = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{M_* \cdot X\}.$$

Απόδειξη. Έστω $\phi \in X_*$, τέτοιο ώστε $\phi(\omega \cdot x) = 0$, για κάθε $\omega \in M_*$ και $x \in X$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\phi \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega) \circ \alpha(x) = 0, \quad \forall \omega \in M_*,\ \forall x \in X \\
\Longrightarrow\ &\omega \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}) \circ \alpha(x) = 0, \quad \forall \omega \in M_*,\ \forall x \in X \\
\Longrightarrow\ &(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}) \circ \alpha(x) = 0, \quad \forall x \in X \\
\Longrightarrow\ &b(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}) \circ \alpha(x) = 0, \quad \forall b \in B(K),\ \forall x \in X \\
\Longrightarrow\ &(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})\,((1_H \otimes b)\alpha(x)) = 0, \quad \forall b \in B(K),\ \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Επειδή το (X,α) είναι non-degenerate, η τελευταία συνθήκη συνεπάγεται ότι

$$(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in X \overline{\otimes} B(K),$$

άρα $\phi(x)1 = (\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})(x \otimes 1) = 0$ για κάθε $x \in X$ και επομένως $\phi = 0$. Συνεπώς το ζητούμενο συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα Hahn-Banach. □

Δεν γνωρίζουμε αν το αντίστροφο της Πρότασης 2.2.3 παραπάνω ισχύει για αυθαίρετες άλγεβρες Hopf-von Neumann . Ωστόσο, είναι αληθές τουλάχιστον όταν η υπό συζήτηση άλγεβρα Hopf-von Neumann είναι είτε η $(L^\infty(G), \alpha_G)$ είτε η $(L(G), \delta_G)$ για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G (βλ. ενότητα 2.3 για τους ορισμούς)· αυτό έπεται από το Λήμμα 2.3.5 και το Πόρισμα 2.3.8.

Ορισμός 2.2.4. Έστω (M,Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann και (X,α) ένα M-comodule. Το *saturation space* του (X,α) είναι ο χώρος

$$\mathrm{Sat}(X,\alpha) := \{y \in X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M : \ (\mathrm{id}_X \otimes \Delta)(y) = (\alpha \otimes \mathrm{id}_M)(y)\}.$$

Προφανώς, $\alpha(X) \subseteq \mathrm{Sat}(X,\alpha)$. Θα λέμε ότι το$(X,\alpha)$ είναι *saturated* αν ισχύει $\alpha(X) = \mathrm{Sat}(X,\alpha)$.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω (M,Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann και (X,α) ένα M-comodule. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(i) Το saturation space $\mathrm{Sat}(X,\alpha)$ είναι ένα M-subcomodule του κανονικού M-comodule $(X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M, \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$.

(ii) Για την M_*-δράση προτύπου στον $\mathrm{Sat}(X,\alpha)$ που ορίζεται από την κανονική M-δράση $\mathrm{id}_X \otimes \Delta$, ισχύει ότι $M_* \cdot \mathrm{Sat}(X,\alpha) \subseteq \alpha(X)$.

(iii) Το M-comodule $(\mathrm{Sat}(X,\alpha), \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$ είναι non-degenerate αν και μόνον αν το (X,α) είναι non-degenerate και saturated.

Απόδειξη. (i) Έστω $y \in \mathrm{Sat}(X,\alpha)$. Τότε, $(\mathrm{id}_X \otimes \Delta)(y) = (\alpha \otimes \mathrm{id}_M)(y) \in \alpha(X)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \subseteq \mathrm{Sat}(X,\alpha)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$. Άρα, το $\mathrm{Sat}(X,\alpha)$ είναι ένα M-subcomodule του $(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M, \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$.

(ii) Έστω $\omega \in M_*$ και $y \in \mathrm{Sat}(X,\alpha)$. Επειδή $\mathrm{Sat}(X,\alpha) \subseteq X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$, έπεται ότι $(\mathrm{id}_X \otimes \omega)(y) \in X$. Επομένως, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \omega \cdot y &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \Delta)(y) \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_M)(y) \\ &= \alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega)(y) \in \alpha(X), \end{aligned}$$

άρα $M_* \cdot \mathrm{Sat}(X,\alpha) \subseteq \alpha(X)$.

(iii) Ας υποθέσουμε ότι το $(\mathrm{Sat}(X,\alpha), \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$ είναι non-degenerate. Τότε, από την Πρόταση 2.2.3 και την Πρόταση 2.2.5 (ii), έπεται αμέσως ότι

$$\mathrm{Sat}(X,\alpha) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{M_* \cdot \mathrm{Sat}(X,\alpha)\} \subseteq \alpha(X),$$

συνεπώς $\mathrm{Sat}(X,\alpha) = \alpha(X)$, δηλ. το (X,α) είναι saturated. Από την άλλη μεριά, το (X,α) είναι ισομόρφο με το $(\alpha(X), \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$, που είναι non-degenerate αφού $\mathrm{Sat}(X,\alpha) = \alpha(X)$. Άρα, το (X,α) είναι non-degenerate.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το (X,α) είναι non-degenerate και saturated. Τότε, καθώς $(X,\alpha) \simeq (\alpha(X), \mathrm{id}_X \otimes \Delta) = (\mathrm{Sat}(X,\alpha), \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$, έπεται ότι το $(\mathrm{Sat}(X,\alpha), \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$ είναι non-degenerate. □

Παρατήρηση 2.2.6. Έστω (M,Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann και έστω (Y_i,δ_i) για $i = 1,2$ δύο M-comodules. Επίσης, έστω $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ ένας M-comodule ισομορφισμός. Τότε, η απεικόνιση $\phi \otimes \mathrm{id}_M\colon Y_1\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \to Y_2\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ είναι M-comodule ισομορφισμός για τις κανονικές δράσεις $\mathrm{id}_{Y_i} \otimes \Delta$, $i = 1,2$. Επί πλέον, ο $\phi \otimes \mathrm{id}_M$ απεικονίζει το $\mathrm{Sat}(Y_1,\delta_1)$ επί του $\mathrm{Sat}(Y_2,\delta_2)$. Επομένως, η ιδιότητα saturation διατηρείται από comodule ισομορφισμούς.

Πράγματι, για κάθε $x \in Y_1\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$, έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\phi \otimes \mathrm{id}_M)(x) \in \mathrm{Sat}(Y_2,\delta_2) \\ \Longleftrightarrow\ & (\delta_2 \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_M)(x) = (\mathrm{id}_{Y_2} \otimes \Delta) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_M)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & ((\delta_2 \circ \phi) \otimes \mathrm{id}_M)(x) = (\phi \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_{Y_1} \otimes \Delta)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & [((\phi \otimes \mathrm{id}_M) \circ \delta_1) \otimes \mathrm{id}_M](x) = (\phi \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_{Y_1} \otimes \Delta)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & (\phi \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\delta_1 \otimes \mathrm{id}_M)(x) = \\ & (\phi \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_{Y_1} \otimes \Delta)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & (\delta_1 \otimes \mathrm{id}_M)(x) = (\mathrm{id}_{Y_1} \otimes \Delta)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & x \in \mathrm{Sat}(Y_1,\delta_1). \end{aligned}$$

Επειδή η $\phi \otimes \mathrm{id}_M$ είναι επί του $Y_2\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$, οι παραπάνω ισοδυναμίες δείχνουν ότι αυτή απεικονίζει το $\mathrm{Sat}(Y_1,\delta_1)$ επί του $\mathrm{Sat}(Y_2,\delta_2)$.

Το απόμενο πόρισμα έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.2.5 (iii).

Πόρισμα 2.2.7. *Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann. Αν κάθε M-comodule είναι non-degenerate, τότε κάθε M-comodule είναι saturated.*

Παρατήρηση 2.2.8. Παρατηρήστε ότι δεν έπεται από το Πόρισμα 2.2.7 ή την απόδειξή του ότι κάθε non-degenerate M-comodule είναι κατ' ανάγκη saturated και πράγματι αυτό δεν είναι εν γένει αληθές. Για παράδειγμα, αν G είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα, τότε η άλγεβρα von Neumann $L(G)$ της ομάδας εφοδιάζεται με ένα συγγινόμενο δ_G (βλ. ενότητα 2.3 παρακάτω). Αν επί πλέον η G δεν έχει την προσεγγιστική ιδιότητα με την έννοια των Haagerup-Kraus, τότε υπάρχουν non-degenerate $L(G)$-comodules που δεν είναι saturated καθώς επίσης και saturated $L(G)$-comodules που δεν είναι non-degenerate (βλ. Πρόταση 2.3.14). Για την ακρίβεια, τέτοια παραδείγματα προκύπτουν ως σταυρωτά γινόμενα ομάδων δίχως την προσεγγιστική ιδιότητα που δρουν πάνω σε δυϊκούς χώρους τελεστών (βλ. Πόρισμα 3.1.9 και τα Θεωρήματα 3.3.8 και 3.3.10)

Σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα, για μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (M, Δ), η συνθήκη ότι κάθε M-comodule είναι saturated (που είναι εξ ορισμού μια αλγεβρική συνθήκη) είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός (όχι απαραίτητα norm-φραγμένου) δικτύου $\{\omega_i\}$ στον M_*, ούτως ώστε, για κάθε M-comodule (X, α), κάθε στοιχείο $x \in X$ είναι το w*-όριο του δικτύου $\{\omega_i \cdot x\}$, όπου η M_*-δράση προτύπου στον X δίνεται από την

$$(\omega, x) \mapsto \omega \cdot x = (\mathrm{id}_X \otimes \omega)(\alpha(x))$$

(βλ. Πρόταση 2.2.9). Ειδικότερα, έπεται ότι το ως άνω δίκτυο $\{\omega_i\}$ είναι μια ασθενής προσεγγιστική μονάδα για την M_* θεωρούμενη ως άλγεβρα Banach ως προς το γινόμενο

$$(\omega, \phi) \mapsto \omega\phi = (\omega \otimes \phi) \circ \Delta.$$

Πρόταση 2.2.9. *Για μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (M, Δ) οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) Κάθε M-comodule είναι saturated.

(β) Για κάθε M-comodule (X, α), κάθε M-subcomodule Z του X και κάθε $x \in X$, ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\alpha(x) \in Z \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \implies x \in Z.$$

(γ) Για κάθε M-comodule (X, α) και κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $x \in \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.

(δ) Υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, τέτοιο ώστε $\omega_i \cdot x \longrightarrow x$ στην w^*-τοπολογία για κάθε M-comodule X και κάθε $x \in X$.

(ε) *Υπάρχει ένα δίκτυο* $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, *τέτοιο ώστε το δίκτυο* $\{(\mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ \Delta\} \subseteq CB_\sigma(M)$ *να συγκλίνει ως προς την stable point-w*-τοπολογία στην ταυτοτική απεικόνιση* id_M.

Επί πλέον, αν οιαδήποτε εκ των ανωτέρω συνθηκών ικανοποιείται, τότε η M_*, *θεωρούμενη ως άλγεβρα Banach με το γινόμενο που επάγει η* Δ, *έχει μια (δεξιά) ασθενή προσεγγιστική μονάδα. Δηλαδή, υπάρχει ένα δίκτυο* $\{\omega_i\} \subseteq M_*$, *τέτοιο ώστε*

$$\langle x, \omega\omega_i\rangle \longrightarrow \langle x, \omega\rangle \qquad \text{για κάθε } \omega \in M_* \text{ και } x \in M.$$

Επομένως, για κάθε $\omega \in M_*$, *έπεται ότι* $\omega \in \overline{\omega M_*}^{\|\cdot\|}$.

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β): Ας υποθέσουμε ότι κάθε M-comodule είναι saturated. Έστω (X, α) ένα M-comodule, Z ένα M-subcomodule του X και $x \in X$ ώστε $\alpha(x) \in Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$. Εξ υποθέσεως, η α περιορίζεται σε μια M-δράση στο Z και αφού $\alpha(x) \in Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$ και $(\alpha \otimes \mathrm{id})(\alpha(x)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\alpha(x))$ έπεται ότι $\alpha(x) \in \mathrm{Sat}(Z, \alpha|_Z)$. Όμως, το $(Z, \alpha|_Z)$ είναι saturated από την υπόθεσή μας και άρα $\alpha(x) \in \alpha(Z)$. Επομένως, $x \in Z$, διότι η α είναι ισομετρία.

(β) $\Longrightarrow$ (γ): Έστω (X, α) ένα M-comodule και $x \in X$ και έστω $Z := \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$. Τότε, από την Παρατήρηση 2.1.4, έπεται ότι το Z είναι ένα M-subcomodule του X εφ' όσον αυτό είναι εξ ορισμού ένα M_*-πρότυπο.

Επίσης, έχουμε ότι $\alpha(x) \in Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$. Πράγματι, από τον ορισμό του τανυστικού γινομένου Fubini, η συνθήκη $\alpha(x) \in Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M$ ισοδυναμεί με την ακόλουθη

$$\omega \cdot x = (\mathrm{id} \otimes \omega)(\alpha(x)) \in Z, \quad \forall \omega \in M_*,$$

η οποία αληθεύει από τον ορισμό του Z. Επομένως, η υπόθεση ότι η (β) ισχύει συνεπάγεται ότι $x \in Z$, δηλαδή $x \in \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.

(γ) $\Longrightarrow$ (α): Ας υποθέσουμε ότι η (γ) αληθεύει και ας πάρουμε ένα M-comodule (Y, β). Θεωρούμε το M-comodule (X, α) με $X := \mathrm{Sat}(Y, \beta)$ και $\alpha = \mathrm{id}_Y \otimes \Delta$. Τότε, από την (γ), έπεται ότι $z \in \overline{M_* \cdot z}^{\mathrm{w}^*} \subseteq \overline{M_* \cdot \mathrm{Sat}(Y, \beta)}^{\mathrm{w}^*}$, για κάθε $z \in \mathrm{Sat}(Y, \beta)$. Όμως, από την Πρόταση 2.2.5 (ii), έχουμε ότι $M_* \cdot \mathrm{Sat}(Y, \beta) \subseteq \beta(Y)$ και συνεπώς $z \in \beta(Y)$, για κάθε $z \in \mathrm{Sat}(Y, \beta)$, δηλαδή το (Y, β) είναι saturated.

(δ) $\Longrightarrow$ (γ): Αυτή η κατεύθυνση είναι προφανής.

(ε) $\Longrightarrow$ (δ): Έστω (X, α) ένα M-comodule με το X να είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Αρχικά, παρατηρούμε ότι, για κάθε $\omega \in M_*$, έχουμε την ακόλουθη:

$$(\mathrm{id}_X \otimes \Phi_\omega) \circ \alpha = \alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega) \circ \alpha, \tag{2.1}$$

όπου $\Phi_\omega := (\mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ \Delta$.

Πράγματι, επειδή

$$\alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega) = (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_M),$$

και
$$(\alpha \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha = (\mathrm{id}_X \otimes \Delta) \circ \alpha,$$
παίρνουμε:
$$\begin{aligned}\alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega) \circ \alpha &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_M) \circ \alpha \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \Delta) \circ \alpha \\ &= [\mathrm{id}_X \otimes ((\mathrm{id}_M \otimes \omega) \circ \Delta)] \circ \alpha \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \Phi_\omega) \circ \alpha.\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 1.3.1 και την υπόθεση ότι η (ε) ισχύει ιέπεται ότι, για κάθε $x \in X$ έχουμε:
$$(\mathrm{id}_X \otimes \Phi_{\omega_i})(\alpha(x)) \longrightarrow \alpha(x) \quad \text{υπερασθενώς},$$
διότι $\alpha(X) \subseteq X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M \subseteq B(H) \overline{\otimes} M$. Επομένως, η (2.1) συνεπάγεται ότι
$$\alpha \circ (\mathrm{id}_X \otimes \omega_i) \circ \alpha(x) \longrightarrow \alpha(x) \quad \text{υπερασθενώς}.$$
Από την άλλη μεριά, η α είναι w*-συνεχής ισομετρία, συνεπώς είναι και w*-w*-ομοιομορφισμός από τον X απί του $\alpha(X)$ (βλ. 1.1.3) και άρα
$$\omega_i \cdot x = (\mathrm{id}_X \otimes \omega_i) \circ \alpha(x) \longrightarrow x \quad \text{υπερασθενώς}.$$

(γ) $\Longrightarrow$ (ε): Έστω ότι, για κάθε M-comodule (X, α) και κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $x \in \overline{M_* \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$. Έστω H ένας χώρος Hilbert. Επομένως, παίρνοντας $X = B(H) \overline{\otimes} M$ και $\alpha = \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \Delta$, προκύπτει ότι, για κάθε $x \in B(H) \overline{\otimes} M$, υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\}$ στον M_*, το οποίο μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή του x, τέτοιο ώστε
$$(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \Delta)(x) \longrightarrow x \text{ υπερασθενώς}.$$
Συνεπώς, εφ' όσον
$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \Delta) &= \mathrm{id}_{B(H)} \otimes ((\mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ \Delta) \\ &= \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \Phi_{\omega_i},\end{aligned}$$
όπου $\Phi_\omega := (\mathrm{id}_M \otimes \omega_i) \circ \Delta$ για $\omega \in M_*$, έπεται ότι για κάθε χώρο Hilbert H και κάθε $x \in B(H) \overline{\otimes} M$ υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\}$ στον M_*, τέτοιο ώστε $(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \Phi_{\omega_i})(x) \longrightarrow x$ υπερασθενώς.

Ας Θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα διαχωρίσιμο απειροδιάστατο χώρο Hilbert K και έστω $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $B(K) \overline{\otimes} M$. Τότε, το $x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο του $B(K^{(n)}) \overline{\otimes} M$, όπου $K^{(n)}$ το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων του K. Έτσι, εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα για τον $K^{(n)}$ στην θέση του H, έπεται ότι υπάρχει ένα δίκτυο $\{\omega_i\}$ στον M_*, τέτοιο ώστε $(\mathrm{id}_{B(K^{(n)})} \otimes \Phi_{\omega_i})(x) \longrightarrow x$ υπερασθενώς και άρα έπεται ότι $(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \Phi_{\omega_i})(y) \longrightarrow y$ υπερασθενώς για κάθε $y \in F$. Επομένως, αν F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $B(K)\overline{\otimes}M$ και $\mathfrak{N}$ μια υπερασθενής περιοχή του 0, τότε βρίσκουμε ένα στοιχείο $\omega_{(F,\mathfrak{N})} \in M_*$, τέτοιο ώστε

$$(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \Phi_{\omega_{(F,\mathfrak{N})}})(y) \in y + \mathfrak{N}, \quad \forall y \in F.$$

Συνεπώς, το σύνολο όλων των ζευγών $(F, \mathfrak{N})$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο ως προς την μερική διάταξη που ορίζεται από $(F_1, \mathfrak{N}_1) \leq (F_2, \mathfrak{N}_2)$ αν $F_1 \subseteq F_2$ και $\mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1$. Είναι δε σαφές ότι

$$(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \Phi_{\omega_{(F,\mathfrak{N})}})(y) \longrightarrow y \ \text{ υπερασθενώς για κάθε } y \in B(K)\overline{\otimes}M,$$

δηλαδή το δίκτυο $\{\Phi_{\omega_{(F,\mathfrak{N})}}\}$ συγκλίνει ως προς την stable point-w*-τοπολογία στην id_M.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό της πρότασης, παρατηρούμε ότι αν, για παράδειγμα, ισχύει η συνθήκη (ε), τότε για κάθε $x \in M$ και $\omega \in M_*$ έχουμε

$$\langle x, \omega\omega_i \rangle = \langle \Delta(x), \omega \otimes \omega_i \rangle = \langle (\mathrm{id}_M \otimes \omega_i)(\Delta(x)), \omega \rangle \longrightarrow \langle x, \omega \rangle.$$

Επομένως, αφού ο ωM_* είναι γραμμικός υπόχωρος του M_* (και άρα κυρτός), από το θεώρημα Hahn-Banach έπεται ότι $\omega \in \overline{\omega M_*}^{\|\cdot\|}$. □

Τα επόμενα δύο λήμματα περιγράφουν δύο βασικούς τρόπους κατασκευής καινούργιων saturated comodules.

Λήμμα 2.2.10. *Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann και (Y, β) ένα saturated M-comodule. Τότε, το $(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y, \mathrm{id}_X \otimes \beta)$ είναι saturated M-comodule για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X.*

Απόδειξη. Έστω X δυϊκός χώρος τελεστών. Αρχικά πρέπει να ελέγξουμε ότι το $(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y, \mathrm{id}_X \otimes \beta)$ είναι M-comodule. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_X \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \beta) &= \mathrm{id}_X \otimes [(\beta \otimes \mathrm{id}_M) \circ \beta] \\ &= \mathrm{id}_X \otimes [(\mathrm{id}_Y \otimes \Delta) \circ \beta] \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y \otimes \Delta) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \beta).\end{aligned}$$

Τώρα, ας πάρουμε ένα $z \in \mathrm{Sat}(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y, \mathrm{id}_X \otimes \beta)$. Θα δείξουμε ότι

$$z \in (\mathrm{id}_X \otimes \beta)(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y) = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}\beta(Y).$$

Πράγματι, αφού $z \in \mathrm{Sat}(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}Y, \mathrm{id}_X \otimes \beta)$ έχουμε:

$$(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y \otimes \Delta)(z) = (\mathrm{id}_X \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_M)(z).$$

Άρα, για κάθε $\omega \in X_*$, παίρνουμε:

$$(\omega \otimes \mathrm{id}_{Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y \otimes \Delta)(z) = (\omega \otimes \mathrm{id}_{Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}M}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_M)(z)$$

δηλαδή

$$(\mathrm{id}_Y \otimes \Delta) \circ (\omega \otimes \mathrm{id}_{Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M})(z) = (\beta \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\omega \otimes \mathrm{id}_{Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M})(z).$$

Επομένως $(\omega \otimes \mathrm{id}_{Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M})(z) \in \mathrm{Sat}(Y, \beta) = \beta(Y)$ για όλα τα $\omega \in X_*$ και έτσι $z \in X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} \beta(Y)$. □

Λήμμα 2.2.11. *Έστω M_1 και M_2 δύο άλγεβρες Hopf-von Neumann και έστω α_1 και α_2 δράσεις των M_1 και M_2 αντίστοιχα στον ίδιο δυϊκό χώρο τελεστών X. Υποθέτουμε ότι το (X, α_2) είναι saturated M_2-comodule και ότι οι α_1 και α_2 μετατίθενται, δηλαδή*

$$(\alpha_1 \otimes \mathrm{id}_{M_2}) \circ \alpha_2 = (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha_2 \otimes \mathrm{id}_{M_1}) \circ \alpha_1,$$

όπου $\sigma\colon M_2 \overline{\otimes} M_1 \to M_1 \overline{\otimes} M_2 : \ x \otimes y \mapsto y \otimes x$ ο ισομορφισμός flip. Τότε, ο χώρος των σταθερών σημείων $(X^{\alpha_1}, \alpha_2|_{X^{\alpha_1}})$ είναι saturated M_2-comodule.

Απόδειξη. Εφ' όσον οι δράσεις α_1 και α_2 μετατίθενται, το X^{α_1} είναι ένα M_2-subcomodule του (X, α_2) απ' το Λήμμα 2.1.7. Επίσης, αφού το (X, α_2) είναι saturated, δηλ. $\mathrm{Sat}(X, \alpha_2) = \alpha_2(X)$, έπεται

$$\begin{aligned} \mathrm{Sat}(X^{\alpha_1}, \alpha_2|_{X^{\alpha_1}}) &= (X^{\alpha_1} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M) \cap \mathrm{Sat}(X, \alpha_2) \\ &= (X^{\alpha_1} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M) \cap \alpha_2(X). \end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $(X^{\alpha_1} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M_2) \cap \alpha_2(X) \subseteq \alpha_2(X^{\alpha_1})$.

Έστω $y \in (X^{\alpha_1} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M_2) \cap \alpha_2(X)$. Τότε, $y = \alpha_2(x)$ για κάποιο $x \in X$ και έτσι αρκεί να δειχθεί ότι $x \in X^{\alpha_1}$, δηλ. $\alpha_1(x) = x \otimes 1$. Πράγματι, αφού $y \in X^{\alpha_1} \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M_2$ έπεται ότι

$$(\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha_1 \otimes \mathrm{id}_{M_2})(y) = y \otimes 1$$

και άρα

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \otimes \mathrm{id}_{M_1})(x \otimes 1) &= \alpha_2(x) \otimes 1 \\ &= y \otimes 1 \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha_1 \otimes \mathrm{id}_{M_2})(y) \\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha_1 \otimes \mathrm{id}_{M_2})(\alpha_2(x)) \\ &= (\alpha_2 \otimes \mathrm{id}_{M_1})(\alpha_1(x)), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την μεταθετικότητα των δράσεων α_1 και α_2. Εφ' όσον η $\alpha_2 \otimes \mathrm{id}_{M_1}$ είναι ισομετρία έπεται ότι $\alpha_1(x) = x \otimes 1$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

2.3 Hopf-von Neumann άλγεβρες ομάδων

2.3.1 Συμβολισμοί και βασικές ιδιότητες

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα (Hausdorff) με αριστερό μέτρο Haar ds και modular function Δ_G.

Για κάθε $\xi, \eta \in L^2(G)$, ταυτίζουμε το $\xi \otimes \eta \in L^2(G \times G)$ με την συνάρτηση $(s,t) \mapsto \xi(s)\eta(t),\ s,t \in G$. Αυτή η ταύτιση δίνει ένα ισομορφισμό μεταξύ των χώρων Hilbert $L^2(G) \otimes L^2(G)$ και $L^2(G \times G)$.

Συνεπώς παίρνουμε επίσης ένα κανονικό (μοναδιαίο w*-συνεχή) *-ισομορφισμό

$$B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)) = B(L^2(G) \otimes L^2(G)) \simeq B(L^2(G \times G)),$$

ο οποίος περιορίζεται σε ένα *-ισομορφισμό $L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G) \simeq L^\infty(G \times G)$. Δηλαδή, για κάθε $f, g \in L^\infty(G)$ ο ως άνω ισομορφισμός ταυτίζει το $f \otimes g$ με τον τελεστή πολλαπλασιασμού στον $L^2(G \times G)$ ο οποίος δίνεται από την συνάρτηση $(s,t) \mapsto f(s)g(t),\ s,t \in G$.

Θεωρούμε τους (θεμελιώδεις) unitary τελεστές στον $L^2(G \times G)$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$V_G\xi(s,t) = \xi(t^{-1}s, t),$$

$$W_G\xi(s,t) = \xi(s, st),$$

$$U_G\xi(s,t) = \Delta_G(t)^{1/2}\xi(st, t),$$

για $\xi \in L^2(G \times G)$ και $s,t \in G$.

Το γεγονός ότι οι V_G, W_G και U_G είναι unitaries (ισοδύναμα ότι διατηρούν τα εσωτερικά γινόμενα) έπεται άμεσα από το θεώρημα Fubini (βλ. [9, Theorem 7.6.7, Lemma 9.4.2]) και από το ότι το μέτρο Haar ικανοποιεί $d(ts) = ds$ και $d(st) = \Delta_G(t)^{-1}ds$.Για παράδειγμα, για $\xi, \eta \in L^2(G \times G)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle V_G\xi | V_G\eta \rangle &= \iint V_G\xi(s,t)\overline{V_G\eta(s,t)}\ ds\ dt \\
&= \iint \xi(t^{-1}s,t)\overline{\eta(t^{-1}s,t)}\ ds\ dt \\
&= \iint \xi(s,t)\overline{\eta(s,t)}\ ds\ dt \qquad (d(t^{-1}s) = ds) \\
&= \langle \xi | \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Ομοίως, παίρνουμε ότι οι W_G και U_G είναι επίσης unitaries.

Επί πλέον, χρησιμοποιώντας τις μεταθετικές σχέσεις $L^\infty(G)' = L^\infty(G)$ και $L(G)' = R(G)$ (βλ. (1.7), (1.8)) μπορεί να δει κανείς ότι

$$V_G \in L(G)\overline{\otimes}L^\infty(G),\ W_G \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G),\ U_G \in L^\infty(G)\overline{\otimes}R(G),$$

θεωρώντας τους V_G, W_G και U_G ως στοιχεία του $B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

Η απεικόνιση $\alpha_G \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ που ορίζεται ως

$$\alpha_G(f) = V_G^*(f \otimes 1)V_G, \qquad f \in L^\infty(G),$$

είναι ένα συγγινόμενο στον $L^\infty(G)$. Παρατηρούμε ότι ο $\alpha_G(f)$ είναι ο τελεστής πολλαπλασιασμού στον $L^2(G \times G)$ που δίνεται από την συνάρτηση

$$\alpha_G(f)(s,t) = f(ts), \qquad s,t \in G.$$

Επίσης, ελέγχεται ότι η α_G είναι πράγματι ένα συγγινόμενο παρατηρώντας ότι η συμπροσεταιριστική ιδιότητα

$$(\alpha_G \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha_G = (\mathrm{id} \otimes \alpha_G) \circ \alpha_G$$

είναι στην ουσία ισοδύναμη με την προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό της G (δηλ. $(st)r = s(tr)$ για $s,t,r \in G$).

Επί πλέον, για κάθε $h,k \in L^1(G)$ και $f \in L^\infty(G)$, έχουμε

$$\langle \alpha_G(f), h \otimes k\rangle = \langle f, k * h\rangle,$$

όπου

$$(k*h)(t) = \int_G k(s)h(s^{-1}t)\, ds, \quad t \in G,$$

η συνήθης συνέλιξη στον $L^1(G)$.

Επομένως το γινόμενο που ορίζεται από το συγγινόμενο α_G στον προδυϊκό $L^1(G) \simeq L^\infty(G)_*$, δηλαδή $hk = (h \otimes k) \circ \alpha_G$ για $h,\ k \in L^\infty(G)_*$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.4) συμπίπτει με την (αντίθετη) συνέλιξη στον $L^1(G)$

$$hk = k * h, \quad \forall h,k \in L^1(G).$$

Αν $\sigma \colon B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)) : \ x \otimes y \mapsto y \otimes x$ είναι ο ισομορφισμός flip, τότε έχουμε

$$\alpha'_G(f) := \sigma \circ \alpha_G(f) = U_G(f \otimes 1)U_G^*, \qquad f \in L^\infty(G).$$

Ισοδύναμα, ο $\alpha'_G(f)$ είναι ο τελεστής πολλαπλασιασμού στον $L^2(G \times G)$ που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $(s,t) \mapsto f(st)$ για $s,t \in G$. Ακόμη, η απεικόνιση $\alpha'_G := \sigma \circ \alpha_G$ είναι ένα άλλο συγγινόμενο στον $L^\infty(G)$ (καλείται δε η *αντίθετη* της α_G).

Σχόλιο 2.3.1. Δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά στο να δουλεύει κανείς είτε με την α_G ή την α'_G στον $L^\infty(G)$. Για παράδειγμα, κάθε (δεξιά) δράση $\alpha \colon X \to X\overline{\otimes}L^\infty(G)$ της $(L^\infty(G), \alpha_G)$ στον X καθορίζεται μονοσήμαντα από την αριστερή δράση $\beta := \sigma \circ \alpha \colon X \to L^\infty(G)\overline{\otimes}X$ της $(L^\infty(G), \alpha'_G)$ στον X. Με τον όρο αριστερή δράση εννοούμε ότι η β ικανοποιεί την συνθήκη $(\alpha'_G \otimes \mathrm{id}) \circ \beta = (\mathrm{id} \otimes \beta) \circ \beta$, η οποία είναι σαφώς ισοδύναμη με την $(\mathrm{id} \otimes \alpha_G) \circ \alpha = (\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha$ αφού $\beta = \sigma \circ \alpha$ και λόγω του ορισμού της απεικόνισης flip σ.

Παρομοίως, η άλγεβρα von Neumann $L(G)$ της ομάδας ιείναι επίσης μια άλγεβρα Hopf-von Neumann με συγγινόμενο $\delta_G \colon L(G) \to L(G)\overline{\otimes}L(G)$ που ορίζεται ως

$$\delta_G(x) = W_G^*(x \otimes 1)W_G, \qquad x \in L(G).$$

Αυτό είναι πράγματι ένα συγγινόμενο αφού, για κάθε $s \in G$, έχουμε

$$\delta_G(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s$$

και άρα οι συνθέσεις $(\delta_G \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_G$ και $(\mathrm{id} \otimes \delta_G) \circ \delta_G$ απεικονίζουν αμπφότερες το λ_s στο $\lambda_s \otimes \lambda_s \otimes \lambda_s$. Επομένως $(\delta_G \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_G = (\mathrm{id} \otimes \delta_G) \circ \delta_G$ διότι $L(G) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{\lambda(G)\}$.

Ο κατά σημείο πολλαπλασιασμός στην $A(G)$ συμπίπτει με εκείνον που επάγεται στον προδυϊκό $L(G)_*$ από το συγγινόμενο δ_G της $L(G)$ (βλ. παρατήρηση 2.1.4), καθώς:

$$\langle \lambda_s, uv \rangle = u(s)v(s) = \langle \lambda_s, u \rangle \langle \lambda_s, v \rangle = \langle \lambda_s \otimes \lambda_s, u \otimes v \rangle = \langle \delta_G(\lambda_s), u \otimes v \rangle.$$

Οι ορισμοί των α_G και δ_G μπορούν να επεκταθούν ορίζοντας αντίστοιχα δύο W*-δράσεις των αλγεβρών Hopf-von Neumann $(L^\infty(G), \alpha_G)$ και $(L(G), \delta_G)$ στον $B(L^2(G))$ τις οποίες συμβολίζουμε επίσης με

$$\alpha_G \colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

και

$$\delta_G \colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G))\overline{\otimes}L(G),$$

και συγκεκριμένα

$$\alpha_G(x) = V_G^*(x \otimes 1)V_G, \qquad x \in B(L^2(G))$$

και

$$\delta_G(x) = W_G^*(x \otimes 1)W_G, \qquad x \in B(L^2(G)).$$

Έχουμε, επίσης, την W*-δράση της $(L^\infty(G), \alpha_G)$ στον $B(L^2(G))$ που επάγεται από τον unitary U_G, δηλαδή

$$\beta_G \colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G),$$

$$\beta_G(x) = U_G^*(x \otimes 1)U_G, \qquad x \in B(L^2(G)).$$

Εφ' όσον $L^\infty(G)' = L^\infty(G)$ και $L(G)' = R(G)$ εύκολα επαληθεύονται τα ακόλουθα

$$B(L^2(G))^{\alpha_G} = R(G),$$
$$B(L^2(G))^{\delta_G} = L^\infty(G),$$
$$B(L^2(G))^{\beta_G} = L(G).$$

Ας δείξουμε, για παράδειγμα, την σχέση $B(L^2(G))^{\alpha_G} = R(G)$. Αρχικά, εφ' όσον $V_G \in L(G)\overline{\otimes}L^\infty(G) = (R(G)\overline{\otimes}L^\infty(G))'$ έπεται ότι $V_G^*(\rho_t \otimes 1)V_G = V_G^*V_G(\rho_t\otimes 1) = \rho_t\otimes 1$ και συνεπώς έχουμε τον εγκλεισμό $R(G) \subseteq B(L^2(G))^{\alpha_G}$.

Έπειτα δείχνουμε ότι $B(L^2(G))^{\alpha_G} \subseteq R(G)$. Έστω ότι $x \in B(L^2(G))^{\alpha_G}$, δηλαδή $V_G(x \otimes 1) = (x \otimes 1)V_G$. Για κάθε $\xi, \eta, \phi, \psi \in C_c(G)$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\langle V_G(x\otimes 1)(\xi\otimes\eta)|\phi\otimes\psi\rangle = \langle (x\otimes 1)V_G(\xi\otimes\eta)|\phi\otimes\psi\rangle\\
\Rightarrow&\langle (x\otimes 1)(\xi\otimes\eta)|V_G^*(\phi\otimes\psi)\rangle = \langle V_G(\xi\otimes\eta)|(x^*\phi)\otimes\psi\rangle\\
\Rightarrow&\iint (x\xi)(s)\eta(t)\overline{\phi(ts)\psi(t)}\,ds\,dt = \iint \xi(t^{-1}s)\eta(t)\overline{(x^*\phi)(s)\psi(t)}\,ds\,dt\\
\Rightarrow&\int\left(\int (x\xi)(t^{-1}s)\overline{\phi(s)}\,ds\right)\eta(t)\overline{\psi(t)}\,dt =\\
&= \int\left(\int \xi(t^{-1}s)\overline{(x^*\phi)(s)}\,ds\right)\eta(t)\overline{\psi(t)}\,dt\\
\Rightarrow&\int\langle\lambda_t(x\xi)|\phi\rangle\eta(t)\overline{\psi(t)}\,dt = \int\langle\lambda_t\xi|x^*\phi\rangle\eta(t)\overline{\psi(t)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\langle\lambda_t(x\xi)|\phi\rangle = \langle x\lambda_t\xi|\phi\rangle \quad \forall\xi,\phi\in C_c(G),\ \forall t\in G$$

και αφού ο $C_c(G)$ είναι πυκνός στον $L^2(G)$ έπεται ότι $x\lambda_t = \lambda_t x$ για κάθε $t \in G$. Άρα $x \in L(G)' = R(G)$.

Οι σχέσεις $B(L^2(G))^{\delta_G} = L^\infty(G)$ και $B(L^2(G))^{\beta_G} = L(G)$ αποδεικνύονται παρόμοια.

Στα επόμενα, οι $L^\infty(G)$ και $L(G)$ θα θεωρούνται πάντα ως άλγεβρες Hopf-von Neumann ως προς τις α_G και δ_G αντίστοιχα.

2.3.2 $L^\infty(G)$-comodules

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε δύο εξαιρετικά ενδιαφέρουσες ιδιότητες της άλγεβρας Hopf-von Neumann $(L^\infty(G), \alpha_G)$, οι οποίες αμφότερες γενικεύουν αποτελέσματα ήδη γνωστά για W*-δυναμικά συστήματα.

Η μεν πρώτη είναι ότι η κλάση των δυναμικών συστημάτων, που ορίζονται μέσω δράσεων της G σε δυϊκούς χώρους τελεστών με w*-συνεχείς πλήρως ισομετρικούς αυτομορφισμούς, συμπίπτει με την κλάση των $L^\infty(G)$-comodules. Επομένως, η έννοιες μιας άλγεβρας Hopf-von Neumann και των αντίστοιχων comodules παρέχουν ένα φυσιολογικό πλαίσιο για την μελέτη δυναμικών συστημάτων.

Δεύτερον, αποδεικνύουμε ότι κάθε $L^\infty(G)$-comodule είναι non-degenerate και saturated (βλ. Λήμμα 2.3.5 παρακάτω). Αυτό είναι και το συστατικό-κλειδί για τις αποδείξεις ορισμένων από τα κύριά μας αποτελέσματα στα επόμενα (βλ. για παράδειγμα, Πρόταση 3.2.9, Θεώρημα 3.2.10, Πρόταση 3.3.2 και 3.3.5).

Ας αρχίσουμε με κάποιους ορισμούς. Ένα *G-δυναμικό σύστημα* είναι μια τριάδα (X, G, γ) όπου X ένας δυϊκός χώρος τελεστών και $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut(X)}$ μια

G-δράση στον X. Δηλαδή, η γ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων από την G στην ομάδα Aut(X) των w*-συνεχών πλήρως ισομετρικών αυτομορφισμών του X, δηλαδή

$$\gamma_s \circ \gamma_t = \gamma_{st} \qquad \forall\ s,t \in G$$

και για κάθε $\omega \in X_*$ και κάθε $x \in X$ η συνάρτηση

$$s \mapsto \langle \gamma_s(x), \omega \rangle, \quad s \in G,$$

είναι συνεχής. Ένας w*-κλειστός υπόχωρος Y του X λέγεται *G-αναλλοίωτος* αν $\gamma_s(Y) \subseteq Y$ γαι κάθε $s \in G$.

Στην περίπτωση που ο X είναι μια άλγεβρα von Neumann, θα υποθέτουμε ότι, για κάθε $s \in G$, ο αυτομορφισμός γ_s είναι επί πλέον μοναδιαίος *-ομομορφισμός. Τότε, το (X, G, γ) λέγεται W*-*δυναμικό σύστημα* και η γ καλείται W*-*G-δράση* στον X.

Οι αποδείξεις των επόμενων τριών αποτελεσμάτων, δηλαδή του Λήμματος 2.3.2 και των Προτάσεων 2.3.3 και 2.3.4, είναι περισσότερο ή λιγότερο γνωστά τουλάχιστον στο πλαίσιο των W*-δυναμικών συστημάτων (βλ. για παράδειγμα [46, Lemma 1/§13.1, §18.6]). Ωστόσο, έχουμε συμπεριλάβει τις αποδείξεις τους (με ορισμένες αλλαγές), τόσο για την διευκόλυνση του αναγνώστη, όσο και για να καταστήσουμε σαφές ότι για την εγκυρότητα των αντίστοιχων ισχυρισμών δεν είναι αναγκαία η δομή άλγεβρας von Neumann.

Το ακόλουθο θα χρειαστεί για την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3.

Λήμμα 2.3.2. *Αν X είναι ένας δυϊκός χώρος τελεστών και $F\colon G \to X$ μια w*-συνεχής και norm-φραγμένη συνάρτηση, τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $T \in X \overline{\otimes} L^\infty(G)$, τέτοιο ώστε*

$$\langle T, \omega \otimes h \rangle = \int_G \langle F(s), \omega \rangle h(s)\ ds, \quad \forall \omega \in X_*,\ \forall h \in L^1(G).$$

Απόδειξη. Επειδή η $L^\infty(G)$ είναι αβελιανή, έχουμε

$$X \overline{\otimes} L^\infty(G) = X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L^\infty(G) \simeq (X_* \widehat{\otimes} L^1(G))^* \simeq CB(X_*, L^\infty(G)).$$

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\Phi\colon X_* \to L^\infty(G)$ που ορίζεται ως

$$\Phi(\omega) = \omega \circ F, \quad \omega \in X_*$$

και παρατηρούμε ότι η Φ είναι πλήρως φραγμένη εφ' όσον η F είναι norm-φραγμένη. Άρα, επειδή ο ισομορφισμός $\varphi\colon (X_* \widehat{\otimes} L^1(G))^* \to CB(X_*, L^\infty(G))$ δίνεται ως εξής

$$\langle \varphi(u)(\omega), h \rangle = \langle u, \omega \otimes h \rangle, \quad \omega \in X_*,\ h \in L^1(G),\ u \in (X_* \widehat{\otimes} L^1(G))^*,$$

έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $T \in X \overline{\otimes} L^\infty(G) \simeq (X_* \widehat{\otimes} L^1(G))^*$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\omega \in X_*$ και $h \in L^1(G)$, έχουμε

$$\langle T, \omega \otimes h \rangle = \langle \Phi(\omega), h \rangle = \langle \omega \circ F, h \rangle = \int_G \langle F(s), \omega \rangle h(s)\ ds.$$

□

Πρόταση 2.3.3. *Έστω (X, G, γ) ένα δυναμικό σύστημα. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\pi_\gamma(x) \in X \overline{\otimes} L^\infty(G)$, τέτοιο ώστε*

$$\langle \pi_\gamma(x), \omega \otimes h \rangle = \int_G \langle \gamma_s^{-1}(x), \omega \rangle h(s)\, ds, \quad \forall \omega \in X_*,\ \forall h \in L^1(G). \tag{2.2}$$

Η απεικόνιση $\pi_\gamma \colon X \to X \overline{\otimes} L^\infty(G)$ είναι $L^\infty(G)$-δράση στον X, δηλαδή η π_γ είναι w^*-συνεχής πλήρης ισομετρία και ικανοποιεί

$$(\pi_\gamma \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ \pi_\gamma = (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_G) \circ \pi_\gamma. \tag{2.3}$$

Επίσης, έχουμε

$$X^{\pi_\gamma} = \{x \in X : \ \gamma_s(x) = x,\ \forall s \in G\} \tag{2.4}$$

και τα $L^\infty(G)$-subcomodules του X είναι ακριβώς οι G-αναλλοίωτοι w^*-κλειστοί υπόχωροι του X. Ακόμη, αν ο X είναι w^*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$, τότε η π_γ ικανοποιεί τις λεγόμενες σχέσεις συναλλοιώτου, δηλαδή

$$\pi_\gamma(\gamma_s(x)) = (1_H \otimes \lambda_s)\pi_\gamma(x)(1_H \otimes \lambda_s^{-1}), \qquad s \in G,\ x \in X. \tag{2.5}$$

Τέλος, αν (X, G, γ) είναι ένα W^*-δυναμικό σύστημα, τότε το (X, π_γ) είναι ένα W^*-$L^\infty(G)$-comodule.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, η συνάρτηση $s \mapsto \gamma_{s^{-1}}(x)$ είναι w*-συνεχής και φραγμένη από $\|x\|$ και άρα, από το Λήμμα 2.3.2, έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $\pi_\gamma(x) \in X \overline{\otimes} L^\infty(G)$ που ικανοποιεί την (2.2).

Από τον ορισμό της π_γ, δηλ. (2.2), εύκολα προκύπτει ότι η π_γ είναι w*-συνεχής και πλήρης ισομετρία και ότι αν ο X είναι, επί πλέον, άλγεβρα von Neumann και κάθε γ_s είναι *-αυτομορφισμός του X, τότε η π_γ είναι επί πλέον μοναδιαίος *-ομομορφισμός.

Θα δείξουμε τώρα την (2.3). Πράγματι, για $x \in X$, $\omega \in X_*$ και $k, h \in L^1(G)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle (\pi_\gamma \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})(\pi_\gamma(x)), \omega \otimes h \otimes k \rangle &= \langle \pi_\gamma(x), ((\omega \otimes h) \circ \pi_\gamma) \otimes k \rangle \\
&= \int \langle \pi_\gamma(\gamma_t^{-1}(x)), \omega \otimes h \rangle k(t)\, dt \\
&= \iint \langle \gamma_s^{-1}(\gamma_t^{-1}(x)), \omega \rangle h(s) k(t)\, ds\, dt \\
&= \iint \langle \gamma_{ts}^{-1}(x), \omega \rangle h(s) k(t)\, ds\, dt \\
&= \iint \langle \gamma_s^{-1}(x), \omega \rangle h(t^{-1}s) k(t)\, ds\, dt
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\langle(\mathrm{id}_X\otimes\alpha_G)(\pi_\gamma(x)),\omega\otimes h\otimes k\rangle &= \langle\pi_\gamma(x),\omega\otimes(h\otimes k)\circ\alpha_G\rangle\\
&= \langle\pi_\gamma(x),\omega\otimes(hk)\rangle\\
&= \langle\pi_\gamma(x),\omega\otimes(k*h)\rangle\\
&= \int\langle\gamma_s^{-1}(x),\omega\rangle(k*h)(s)\;ds\\
&= \iint\langle\gamma_s^{-1}(x),\omega\rangle k(t)h(t^{-1}s)\;dt\;ds
\end{aligned}$$

όπου τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι ίσα από το θεώρημα Fubini.

Έπειτα, αποδεικνύουμε την (2.4), δηλαδή ότι για $x\in X$ έχουμε

$$\pi_\gamma(x)=x\otimes 1\iff\gamma_s(x)=x\ \forall s\in G.$$

Πράγματι, αν $\gamma_s(x)=x\ \forall s\in G$, τότε για κάθε $\omega\in X_*$ και $h\in L^1(G)$ έχουμε

$$\langle\pi_\gamma(x),\omega\otimes h\rangle=\int\langle x,\omega\rangle h(s)\;ds=\langle x,\omega\rangle\langle 1,h\rangle=\langle x\otimes 1,\omega\otimes h\rangle$$

και άρα $\pi_\gamma(x)=x\otimes 1$. Αντιστρόφως, αν $\pi_\gamma(x)=x\otimes 1$, τότε για κάθε $\omega\in X_*$ και $h\in L^1(G)$ έχουμε

$$\int\langle\gamma_s^{-1}(x),\omega\rangle h(s)\;ds=\int\langle x,\omega\rangle h(s)\;ds$$

και συνεπώς η συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $s\mapsto\langle\gamma_s^{-1}(x),\omega\rangle$ είναι σχεδόν παντού ίση με την σταθερά $\langle x,\omega\rangle$. Επομένως, $\langle\gamma_s^{-1}(x),\omega\rangle=\langle x,\omega\rangle$ για κάθε $s\in G$ και $\omega\in X_*$, δηλαδή $\gamma_s(x)=x$ για κάθε $s\in G$.

Για να δείξουμε την (2.5), αρχικά παρατηρούμε ότι, για $h\in L^\infty(G)_*\simeq L^1(G)$, το στοιχείο $h\circ\mathrm{Ad}\lambda_s\in L^\infty(G)_*$ θεωρούμενο ως στοιχείο του $L^1(G)$ γράφεται ως εξής

$$(h\circ\mathrm{Ad}\lambda_s)(t)=h(st),\qquad t\in G$$

και άρα, για $\omega\in X_*$ και $h\in L^1(G)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle(1_H\otimes\lambda_s)\pi_\gamma(x)(1_H\otimes\lambda_s^{-1}),\omega\otimes h\rangle &= \langle\pi_\gamma(x),\omega\otimes(h\circ\mathrm{Ad}\lambda_s)\rangle\\
&= \int_G\langle\gamma_t^{-1}(x),\omega\rangle h(st)\;dt\\
&= \int_G\langle\gamma_{t^{-1}s}(x),\omega\rangle h(t)\;dt\\
&= \int_G\langle\gamma_t^{-1}(\gamma_s(x)),\omega\rangle h(t)\;dt\\
&= \langle\pi_\gamma(\gamma_s(x)),\omega\otimes h\rangle.
\end{aligned}$$

Τέλος, αν Y είναι ένας G-αναλλοίωτος (w*-κλειστός) υπόχωρος του X, τότε, από τον ορισμό της π_γ, είναι σαφές ότι $\pi_\gamma(Y) \subseteq Y \overline{\otimes} L^\infty(G)$. Αντιστρόφως, αν το Y είναι ένα $L^\infty(G)$-subcomodule του (X, π_γ), τότε $L^1(G) \cdot Y \subseteq Y$, όπου $h \cdot y = (\mathrm{id} \otimes h) \circ \pi_\gamma(y)$ για $h \in L^1(G)$, $y \in Y$. Έτσι, για $y \in Y$, $h \in L^1(G)$ και $s \in G$, από την (2.5) έπεται

$$\gamma_s(h \cdot y) = \gamma_s((\mathrm{id} \otimes h) \circ \pi_\gamma(y)) = (\mathrm{id} \otimes h) \circ \gamma_s \circ \pi_\gamma(y)$$

$$= (\mathrm{id} \otimes h)\left((1 \otimes \lambda_s)\pi_\gamma(y)(1 \otimes \lambda_s^{-1})\right) = (\mathrm{id} \otimes (\Delta_G(s) r_s h)) \circ \pi_\gamma(y)$$

$$= \Delta_G(s)((r_s h) \cdot y) \in L^1(G) \cdot Y \subseteq Y,$$

όπου $r_s h(t) := h(ts)$. Επομένως $\gamma_s(L^1(G) \cdot y) \subseteq Y$ και αφού $y \in \overline{L^1(G) \cdot y}^{\mathrm{w}^*}$ (βλ. Λήμμα 2.3.5 παρακάτω), έπεται ότι $\gamma_s(y) \in Y$ για κάθε $s \in G$. Συνεπώς ο Y είναι G-αναλλοίωτος. □

Πρόταση 2.3.4. *Για κάθε $L^\infty(G)$-δράση $\alpha \colon X \to X \overline{\otimes} L^\infty(G)$ σε ένα δυϊκό χώρο τελεστών X, υπάρχει μια μοναδική G-δράση $\gamma \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{X})$, τέτοια ώστε $\alpha = \pi_\gamma$. Συγκεκριμένα, $\gamma_s = \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}\lambda_s) \circ \alpha$ για $s \in G$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η $L^\infty(G)$-δράση

$$\alpha_G \colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G)) \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

συμπίπτει με την $\pi_{\mathrm{Ad}\lambda}$, όπου

$$\mathrm{Ad}\lambda \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))),$$

$$\mathrm{Ad}\lambda_s(T) = \lambda_s T \lambda_s^{-1}.$$

Πράγματι, για $x \in R(G)$ έχουμε $\alpha_G(x) = x \otimes 1 = \pi_{\mathrm{Ad}\lambda}(x)$. Επίσης, για $f \in L^\infty(G)$ και $k, h \in L^1(G)$, από τους ορισμούς των $\pi_{\mathrm{Ad}\lambda}$ και α_G, έχουμε:

$$\langle \pi_{\mathrm{Ad}\lambda}(f), k \otimes h \rangle = \int_G \langle \lambda_t^{-1} f \lambda_t, k \rangle h(t)\, dt$$

$$= \int_G \left(\int_G f(ts) k(s)\, ds \right) h(t)\, dt = \langle \alpha_G(f), k \otimes h \rangle.$$

Επομένως, παίρνουμε ότι η $L^\infty(G)$-δράση

$$\mathrm{id}_X \otimes \alpha_G \colon X \overline{\otimes} B(L^2(G)) \to X \overline{\otimes} B(L^2(G)) \overline{\otimes} L^\infty(G)$$

ισούται με την $\pi_{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}\lambda}$, όπου $(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}\lambda)_s(T) = (1_H \otimes \lambda_s) T (1_H \otimes \lambda_s^{-1})$ για $s \in G$ και $T \in X \overline{\otimes} B(L^2(G))$.

Δεύτερον, αν ένα $L^\infty(G)$-comodule (Y,β) είναι ισόμορφο με ένα $L^\infty(G)$-comodule της μορφής (Z,π_γ), τότε η β θα είναι επίσης της μορφής $\pi_{\gamma'}$. Πράγματι, αν $\phi\colon Y\to Z$ είναι ένας ισομορφισμός ανάμεσα στα comodules (Y,β) και (Z,π_γ), μπορούμε να θεωρήσουμε την $\gamma'_s := \phi^{-1}\circ\gamma_s\circ\phi$ για $s\in G$.

Τέλος, αφού το (X,α) είναι ισόμορφο με το $(\alpha(X),\mathrm{id}\otimes\alpha_G)$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.3) που είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\mathrm{id}\otimes\alpha_G)$ και εφ' όσον κάθε $L^\infty(G)$-subcomodule είναι G-αναλλοίωτο (από την Πρόταση 2.3.3), έπεται από όλα τα παραπάνω ότι $\alpha=\pi_\gamma$, όπου γ είναι η G-δράση στον X που δίνεται από $\gamma_s=\alpha^{-1}\circ(\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{Ad}\lambda_s)\circ\alpha,\ s\in G$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα παρατηρούμε ότι αν γ και γ' είναι δύο G-δράσεις στον X με $\pi_\gamma=\pi_{\gamma'}$, τότε από την (2.5), για κάθε $x\in X$ και $s\in G$, έχουμε:

$$\pi_\gamma(\gamma_s(x)) = (1_H\otimes\lambda_s)\pi_\gamma(x)(1_H\otimes\lambda_s^{-1}) = (1_H\otimes\lambda_s)\pi_{\gamma'}(x)(1_H\otimes\lambda_s^{-1})$$
$$= \pi_{\gamma'}(\gamma'_s(x)) = \pi_\gamma(\gamma'_s(x))$$

και άρα $\gamma_s(x)=\gamma'_s(x)$ διότι η π_γ είναι ένα προς ένα. Συνεπώς $\gamma=\gamma'$. □

Λήμμα 2.3.5. *Κάθε $L^\infty(G)$-comodule είναι non-degenerate και saturated. Ειδικότερα, για κάθε $L^\infty(G)$-comodule X και κάθε $x\in X$, ισχύει ότι $x\in\overline{L^1(G)\cdot x}^{\mathrm{w}^*}$.*

Απόδειξη. Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule με τον X να είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H.

Από την Παρατήρηση 2.1.3, έχουμε ότι το $\alpha(X)$ είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του W*-$L^\infty(G)$-comodule (N,β) με $N=B(H)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ και $\beta=\mathrm{id}_{B(H)}\otimes\alpha_G$.

Θεωρούμε τις w*-συνεχείς *-εμφυτεύσεις $\pi_1,\ \pi_2\colon N\to N\overline{\otimes}L^\infty(G)$ που ορίζονται ως εξής:

$$\langle\pi_1(y),\omega\otimes f\rangle = \int_G\langle\mathrm{Ad}(1_H\otimes\lambda_s^{-1})(y),\omega\rangle f(s)\,ds,$$
$$\langle\pi_2(y),\omega\otimes f\rangle = \int_G\langle\mathrm{Ad}(1_H\otimes\lambda_s)(y),\omega\rangle f(s)\,ds,$$

για $y\in N$, $\omega\in N_*$ και $f\in L^1(G)$. Εύκολα επαληθεύεται ότι για κάθε $y\in N$ ισχύουν οι:

$$\pi_1(y) = (1_H\otimes V_G^*)(y\otimes 1)(1_H\otimes V_G) = \beta(y),$$
$$\pi_2(y) = (1_H\otimes V_G)(y\otimes 1)(1_H\otimes V_G^*).$$

Επομένως, αφού $\pi_1(\alpha(X))=\beta(\alpha(X))\subseteq\alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G)$, έπεται ότι για κάθε $s\in G$ έχουμε

$$\mathrm{Ad}(1_H\otimes\lambda_s^{-1})(\alpha(X))=\alpha(X),$$

δηλαδή
$$\mathrm{Ad}(1_H \otimes \lambda_t)(\alpha(X)) = \alpha(X), \text{ για κάθε } t \in G$$
και άρα
$$\pi_2(\alpha(X)) \subseteq \alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G).$$

Συνεπώς, αφού $1_H \otimes V_G \in \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ και $L^\infty(G)' = L^\infty(G)$, έπεται ότι οι $\mathrm{Ad}(1_H \otimes V_G^*)$ και $\mathrm{Ad}(1_H \otimes V_G)$ απεικονίζουν το $\alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ στο $\alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ και άρα ο περιορισμός της $\mathrm{Ad}(1_H \otimes V_G^*)$ στο $\alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ είναι πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός του $\alpha(X)\overline{\otimes}L^\infty(G)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η απεικόνιση $\theta\colon X\overline{\otimes}L^\infty(G) \to X\overline{\otimes}L^\infty(G)$ που ορίζεται ως εξής
$$\theta = (\alpha^{-1} \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ \mathrm{Ad}(1_H \otimes V_G^*) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})$$
είναι ένας καλά ορισμένος w*-συνεχής πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός του $X\overline{\otimes}L^\infty(G)$. Επίσης, από τον ορισμό του θ, προκύπτει ότι
$$\theta(x \otimes 1) = \alpha(x), \qquad x \in X$$
και
$$\theta((1_H \otimes f)y) = (1_H \otimes f)\theta(y), \qquad f \in L^\infty(G),\ y \in X\overline{\otimes}L^\infty(G).$$
Συνεπώς, έπεται ότι
$$X\overline{\otimes}L^\infty(G) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H \otimes f)\alpha(x) :\ x \in X,\ f \in L^\infty(G)\},$$
το οποίο μαζί με την (1.11) συνεπάγεται ότι
$$X\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H \otimes b)\alpha(x) :\ x \in X,\ b \in B(L^2(G))\},$$
δηλαδή ότι το (X, α) είναι non-degenerate.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε $L^\infty(G)$-comodule είναι non-degenerate. Από αυτό έπεται (Πόρισμα 2.2.7) ότι κάθε $L^\infty(G)$-comodule e'inai saturated και non-degenerate.

Έτσι, αφού κάθε $L^\infty(G)$-comodule X είναι saturated έπεται (απ' την Πρόταση 2.2.9) ότι $x \in \overline{L^1(G) \cdot x}^{\mathrm{w}^*}$ για κάθε $x \in X$. □

2.3.3 $L(G)$-comodules και η προσεγγιστική ιδιότητα

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την κλάση των $L(G)$-comodules ως προς τις έννοιες non-degeneracy και saturation.

Αρχικά, δείχνουμε ότι ένα $L(G)$-comodule (Y, δ) είναι non-degenerate αν και μόνον αν το Y ισούται με την w*-κλειστή γραμμική θήκη του $A(G) \cdot Y$, δηλαδή ότι το αντίστροφο της Πρότασης 2.2.3 αληθεύει για την άλγεβρα Hopf-von Neumann $(L(G), \delta_G)$.

Από το παραπάνω αποτέλεσμα, έπεται ότι κάθε $L(G)$-comodule είναι saturated αν και μόνον αν κάθε $L(G)$-comodule είναι non-degenerate, δηλαδή ότι το αντίστροφο του Πορίσματος 2.2.7 ισχύει για την $(L(G), \delta_G)$.

Για μια άλγεβρα Hopf-von Neumann (M, Δ), θυμηθείτε ότι αν κάθε M-comodule είναι saturated, τότε η M_* έχει μια ασθενή προσεγγιστική μονάδα (Πρόταση 2.2.9). Θα αποδείξουμε εδώ ότι η ύπαρξη μιας a priori ισχυρότερης έννοιας προσεγγιστικής μονάδας στην άλγεβρα Fourier $A(G)$, την οποία εισήγαγαν οι Haagerup και Kraus [22] (βλ. Ορισμό 2.3.11) είναι ικανή και αναγκαία προκειμένου κάθε $L(G)$-comodule να είναι saturated.

Τα δύο επόμενα αποτελέσματα, δηλαδή το Λήμμα 2.3.6 και το Πόρισμα 2.3.7, αποδείχθηκαν αρχικά στο [50] για W*-$L(G)$-comodules (βλ. Lemma II.1.4 και Corollary II.1.5 στο [50]). Ωστόσο, ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα όπως στις αποδείξεις των Lemma II.1.4 και Corollary II.1.5 του [50] δουλεύουν για $L(G)$-comodules που δεν είναι απαραιτήτως άλγεβρες von Neumann. Έχουμε συμπεριλάβει τις αποδείξεις και των δύο, τόσο χάριν πληρότητας, όσο και προκειμένου να καταστεί σαφές στον αναγνώστη ότι η δομή άλγεβρας von Neumann είναι περιττή.

Λήμμα 2.3.6. *Έστω $\delta\colon Y \to Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ μια $L(G)$-δράση σε ένα w^*-κλειστό υπόχωρο Y του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Για κάθε $y \in Y$ και κάθε $f, k \in A(G)$ με συμπαγή φορέα, έχουμε*

$$\int_G \Delta_G(s)^{-1}(1_H \otimes \lambda_s)\delta((f_s k)\cdot y)\, ds = (k\cdot y)\otimes \lambda(\Delta_G^{-1} f), \tag{2.6}$$

όπου $f_s(t) = f(st)$ και το ολοκλήρωμα λαμβάνεται ως προς την w^*-τοπολογία του $Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G) \simeq (Y_*\widehat{\otimes}A(G))^*$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$G \ni s \mapsto \Delta_G(s)^{-1}(1_H \otimes \lambda_s)\delta((f_s k)\cdot y) \in Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$$

είναι w*-συνεχής και έχει συμπαγή φορέα, επειδή η συνάρτηση $f_s k$ μηδενίζεται εκτός του συνόλου (supp(f))(supp(k))$^{-1}$ το οποίο είναι συμπαγές. Επομένως, το ολοκλήρωμα στην (2.6) είναι καλώς ορισμένο και αναπαριστά ένα (μοναδικό) στοιχείο του $Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$.

Επί πλέον, για κάθε $\phi \in Y_*$ και κάθε $h \in A(G)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \int_G \Delta_G(s)^{-1}(1_H \otimes \lambda_s)\delta((f_s k)\cdot y)\ ds, \phi\otimes h \right\rangle = \\
&= \int_G \langle (1_H \otimes \lambda_s)\delta((f_s k)\cdot y), \phi\otimes h\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \int_G \langle \delta((f_s k)\cdot y), \phi\otimes h_s\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \int_G \langle h_s \cdot ((f_s k)\cdot y), \phi\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \int_G \langle (h_s f_s k)\cdot y), \phi\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \int_G \langle \delta(y), \phi\otimes (hf)_s k\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \left\langle \delta(y), \phi\otimes \int_G (hf)_s k \Delta_G(s)^{-1}\ ds \right\rangle.
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_G (hf)_s k\Delta_G(s)^{-1}\ ds$ έχει νόημα στην $\sigma(A(G), L(G))$-τοπολογία και ορίζει ένα μοναδικό στοιχείο $b \in A(G)$. Για κάθε $t \in G$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
b(t) = \langle \lambda_t, b\rangle &= \left\langle \lambda_t, \int_G (hf)_s k \Delta_G(s)^{-1}\ ds \right\rangle \\
&= \int_G \langle \lambda_t, (hf)_s k\rangle \Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \int_G h(st)f(st)k(t)\Delta_G(s)^{-1}\ ds \\
&= \left(\int_G h(s)f(s)\Delta_G(s)^{-1}\ ds \right) k(t) \\
&= \langle \lambda(f\Delta_G^{-1}), h\rangle k(t),
\end{aligned}$$

άρα $b = \langle \lambda(f\Delta_G^{-1}), h\rangle k$ και η αρχική ακολουθία ισοτήτων μπορεί να συνεχιστεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
\langle \delta(y), \phi\otimes k\rangle \langle \lambda(\Delta_G^{-1} f), h\rangle &= \langle k\cdot y, \phi\rangle \langle \lambda(\Delta_G^{-1} f), h\rangle \\
&= \langle (k\cdot y)\otimes \lambda(\Delta_G^{-1} f), \phi\otimes h\rangle
\end{aligned}$$

και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 2.3.7. *Αν $\delta\colon Y \to Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$ είναι μια $L(G)$-δράση σε ένα w^*-κλειστό υπόχωρο Y του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H, τότε για κάθε $y \in Y$ και κάθε $k \in A(G)$, έχουμε:*

$$(k\cdot y)\otimes 1_{L^2(G)} \in \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\{(1_H \otimes \lambda_s)\delta((hk)\cdot y) :\ s\in G,\ h\in A(G)\}, \quad (2.7)$$

όπου $k\cdot y = (\mathrm{id}_Y \otimes k)(\delta(y))$, για $k \in A(G)$ και $y \in Y$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.3.6 έπεται ότι

$$(k \cdot y) \otimes \lambda(\Delta_G^{-1} f) \in \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H \otimes \lambda_s)\delta((hk) \cdot x) : \ s \in G, \ h \in A(G)\} \quad (2.8)$$

για κάθε $y \in Y$ και κάθε $k, f \in A(G)$ που και οι δύο έχουν συμπαγή φορέα. Από το [15, Lemme (3.2)], έχουμε ότι ο $L^1(G)$ περιέχει μια φραγμένη προσεγγιστική μονάδα της μορφής $\{\Delta_G^{-1} f_i\}_{i \in I}$, όπου $f_i \in A(G)$ είναι συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Επομένως, $\lambda(\Delta_G^{-1} f_i) \longrightarrow 1_{L^2(G)}$ υπερασθενώς και άρα από την (2.8), έπεται η (2.7) για $k \in A(G)$ με συμπαγή φορέα. Εφ' όσον οι συναρτήσεις της $A(G)$ που έχουν συμπαγή φορέα είναι norm-πυκνές στην $A(G)$ (από [15, Proposition (3.26)]), προκύπτει ότι η (2.7) ισχύει για κάθε $k \in A(G)$. □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο μπορούμε να δείξουμε ότι το αντίστροφο της Πρότασης 2.2.3 αληθεύει για την άλγεβρα Hopf-von Neumann $(L(G), \delta_G)$.

Πόρισμα 2.3.8. *Έστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule όπου Y w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Y = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{h \cdot y : \ h \in A(G), \ y \in Y\}$,

(ii) *Το (Y, δ) είναι non-degenerate,*

(iii) $Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H \otimes b)\delta(y)(1_H \otimes c) : y \in Y, b, c \in B(L^2(G))\}$,

όπου $h \cdot y = (\mathrm{id}_Y \otimes h)(\delta(y))$, για $h \in A(G)$ και $y \in Y$.

Απόδειξη. (iii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω $\phi \in Y_*$, τέτοιο ώστε $\phi(h \cdot y) = 0$, για κάθε $h \in A(G)$ και $y \in Y$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\phi \circ (\mathrm{id}_Y \otimes h) \circ \delta(x) = 0, \quad \forall h \in A(G), \ \forall y \in Y \\
\Longrightarrow\ &\langle (\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}) \circ \delta(x), h \rangle = 0, \quad \forall h \in A(G), \ \forall y \in Y \\
\Longrightarrow\ &(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}) \circ \delta(x) = 0, \quad \forall y \in Y \\
\Longrightarrow\ &b(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})(\delta(x))c = 0, \quad \forall b, c \in B(K), \ \forall y \in Y \\
\Longrightarrow\ &(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})\left((1_H \otimes b)\delta(x)(1_H \otimes c)\right) = 0, \quad \forall b, c \in B(K), \ \forall y \in Y.
\end{aligned}$$

Επειδή ισχύει η (iii), η τελευταία συνθήκη συνεπάγεται ότι

$$(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(z) = 0, \qquad \forall z \in Y \overline{\otimes} B(L^2(G)),$$

επομένως $\phi(y)1 = (\phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(y \otimes 1) = 0$ για κάθε $y \in Y$ και άρα $\phi = 0$. Συνεπώς το ζητούμενο συμπέρασμα, δηλαδή η συνθήκη (i), έπεται από το θεώρημα Hahn-Banach.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Αυτή προκύπτει από τον προφανή εγκλεισμό

$$\begin{aligned}
&\{(1_H \otimes b)\delta(y) : \ y \in Y, \ b \in B(L^2(G))\} \subseteq \\
&\subseteq \{(1_H \otimes b)\delta(y)(1_H \otimes c) : \ y \in Y, \ b, c \in B(L^2(G))\}.
\end{aligned}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ας υποθέσουμε ότι $Y = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{h \cdot y : \ h \in A(G), \ y \in Y\}$. Από το Πόρισμα 2.3.7 παραπάνω έπεται ότι, για κάθε $z \in Y$, έχουμε

$$z \otimes 1_{L^2(G)} \in \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{(1_H \otimes b)\delta(y) : \ b \in B(L^2(G)), \ y \in Y\}.$$

Επομένως, για κάθε $z \in Y$ και $c \in B(L^2(G))$, προκύπτει ότι

$$z \otimes c = (1_H \otimes c)(z \otimes 1_{L^2(G)}) \in \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{(1_H \otimes b)\delta(y) : \ b \in B(L^2(G)), \ y \in Y\},$$

επειδή ο πολλαπλασιασμός στον $B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι χωριστά w*-συνεχής. Άρα, έχουμε ότι

$$Y\overline{\otimes}B(L^2(G)) \subseteq \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{(1_H \otimes b)\delta(y) : \ b \in B(L^2(G)), \ y \in Y\}$$

και συνεπώς ότι το Y είναι non-degenerate αφού ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι τετριμμένος. $\square$

Σχόλιο 2.3.9. Παρατηρείστε ότι, για ένα $L(G)$-comodule (Y, δ), ο υπόχωρος

$$Z := \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{A(G) \cdot Y\} \subseteq Y$$

είναι το μεγαλύτερο non-degenerate $L(G)$-subcomodule του Y.

Πράγματι, ο Z είναι σαφώς ένα $L(G)$-subcomodule του Y διότι είναι ένα $A(G)$-υποπρότυπο του Y. Επίσης, ο Z είναι non-degenerate από το Πόρισμα 2.3.7 (χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό της της απόδειξης της συνεπαγωγής (i) $\Longrightarrow$ (ii) του Πορίσματος 2.3.8). Τέλος, αν Z_0 είναι ένα non-degenerate $L(G)$-subcomodule του Y, τότε $Z_0 = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{A(G) \cdot Z_0\}$ (απ' την Πρόταση 2.2.3) και άρα θα έχουμε ότι

$$Z_0 = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{A(G) \cdot Z_0\} \subseteq \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{A(G) \cdot Y\} = Z.$$

Σύμφωνα με τα [8], [11] και [22], έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 2.3.10. Μια μιγαδική συνάρτηση $u \colon G \to \mathbb{C}$ καλείται *πολλαπλασιαστής* της άλγεβρας Fourier $A(G)$ αν η γραμμική απεικόνιση $m_u(v) = uv$ απεικονίζει την $A(G)$ στον εαυτό της. Στην περίπτωση αυτή, μια άμεση εφαρμογή του θεωρήματος κλειστού γραφήματος μας δείχνει ότι ο m_u είναι φραγμένος τελεστής. Για ένα πολλαπλασιαστή u συμβολίζουμε με $M_u \colon L(G) \to L(G)$ τον συζυγή τελεστή m_u^* του m_u. Η συνάρτηση u θα λέγεται *πλήρως φραγμένος πολλαπλασιαστής* αν ο M_u είναι πλήρως φραγμένος. Ο χώρος όλων των πλήρως φραγμένων πολλαπλασιαστών συμβολίζεται με $M_{cb}A(G)$.

Όπως είναι γνωστό (βλέπε π.χ. [8]) ο χώρος $M_{cb}A(G)$ είναι μια άλγεβρα Banach ως προς την νόρμα $||u||_{M_{cb}} = ||M_u||_{cb}$ και τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό. Ακόμη, $A(G) \subseteq M_{cb}A(G)$ (βλ. [8]) και ο $M_{cb}A(G)$ είναι ο δυϊκός χώρος Banach του χώρου Banach $Q(G)$, που ορίζεται ως η πλήρωση του $L^1(G)$ ως προς την νόρμα

$$\|f\|_Q = \sup\left\{\left|\int_G f(s)u(s)ds\right| : \ u \in M_{cb}A(G), \ \|u\|_{M_{cb}} \leq 1\right\}.$$

Ορισμός 2.3.11 (Haagerup-Kraus, [22])**.** Λέμε ότι μια τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την *προσεγγιστική ιδιότητα* (ή την AP) αν υπάρχει ένα δίκτυο $\{u_i\}_{i\in I}$ στην $A(G)$, τέτοιο ώστε $u_i \to 1$ ως προς την $\sigma(M_{cb}A(G), Q(G))$-τοπολογία.

Σημειώνουμε ότι η προσεγγιστική ιδιότητα είναι μια έννοια ασθενέστερη από την amenability καθώς η amenability σημαίνει ακριβώς ότι η άλγεβρα Fourier $A(G)$ έχει μια (norm) φραγμένη προσεγγιστική μονάδα (βλέπε [36]).

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τους πλήρως φραγμένους πολλαπλασιαστές και την προσεγγιστική ιδιότητα δείτε, για παράδειγμα, τα [8], [11] και [22].

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα των Haagerup και Kraus ([22, Theorem 1.9]).

Θεώρημα 2.3.12 (Haagerup-Kraus)**.** *Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η G έχει την AP,*

(ii) *Υπάρχει ένα δίκτυο $\{u_i\} \subseteq A(G)$, τέτοιο ώστε το δίκτυο $\{M_{u_i}\} \subseteq CB_\sigma(L(G))$ να συγκλίνει στην $\mathrm{id}_{L(G)}$ ως προς την stable point-w*-τοπολογία.*

Παρατήρηση 2.3.13. Παρατηρούμε ότι για κάθε $u, h \in A(G)$ και $y \in L(G)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle M_u(y), h\rangle &= \langle y, m_u(h)\rangle \\ &= \langle y, hu\rangle \\ &= \langle \delta_G(y), h\otimes u\rangle \\ &= \langle (\mathrm{id}_{L(G)}\otimes u)\circ\delta_G(y), h\rangle,\end{aligned}$$

επομένως

$$M_u = (\mathrm{id}_{L(G)}\otimes u)\circ\delta_G, \quad \text{για κάθε } u\in A(G). \tag{2.9}$$

Πρόταση 2.3.14. *Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) *Η G έχει την AP.*

(β) *Κάθε $L(G)$-comodule είναι saturated*

(γ) *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y,δ), κάθε $L(G)$-subcomodule Z του Y και κάθε $y\in Y$, έχουμε ότι αν $\delta(y)\in Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$, τότε $y\in Z$.*

(δ) *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y,δ) και κάθε $y\in Y$, έχουμε $y\in\overline{A(G)\cdot y}^{\mathrm{w}^*}$.*

(ε) *Υπάρχει ένα δίκτυο $\{u_i\}_{i\in I}$ στην $A(G)$, τέτοιο ώστε για κάθε $L(G)$-comodule (Y,δ) και κάθε $y \in Y$ να ισχύει ότι $u_i \cdot y \longrightarrow y$ υπερασθενώς.*

(στ) *Κάθε $L(G)$-comodule είναι non-degenerate.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία μεταξύ των συνθηκών (α) έως και (ε) προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.2.9, το Θεώρημα 2.3.12 και την σχέση (2.9). Η συνεπαγωγή (στ) $\Longrightarrow$ (β) έπεται από το Πόρισμα 2.2.7, ενώ η συνεπαγωγή (δ) $\Longrightarrow$ (στ) προκύπτει από το Πόρισμα 2.3.8. □

Παρατήρηση 2.3.15. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.14, αν η G έχει την AP, τότε κάθε $L(G)$-comodule e'inai saturated και non-degenerate.

Από την άλλη μεριά, αν η G δεν έχει την AP, τότε η Πρόταση 2.3.14 εγγυάται την ύπαρξη $L(G)$-comodules που δεν είναι saturated, καθώς και την ύπαρξη $L(G)$-comodules που δεν είναι non-degenerate. Ωστόσο, ο συγγραφέας δεν γνωρίζει κάποιο παράδειγμα ομάδας G (απαραίτητα χωρίς την AP), τέτοιας ώστε να υπάρχει ένα συγκεκριμένο $L(G)$-comodule που να μην είναι ούτε saturated, αλλά ούτε και non-degenerate.

Κεφάλαιο 3

Σταυρωτά γινόμενα

3.1 Σταυρωτά γινόμενα για $L^\infty(G)$-comodules

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη των σταυρωτών γινομένων για $L^\infty(G)$- comodules, ας θυμηθούμε κάποια γνωστά αποτελέσματα ταπό την θεωρία των σταυρωτών γινομένων αλγεβρών von Neumann.

Έστω M μια άλγεβρα von Neumann και έστω $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$ μια W*-G-δράση στην M, δηλαδή ένας ομομορφισμός ομάδων από την G στην ομάδα των μοναδιαίων w*-συνεχών *-αυτομορφισμών της M, τέτοιος ώστε η συνάρτηση

$$G \ni s \mapsto \gamma_s(x) \in M$$

να είναι w*-συνεχής για κάθε $x \in M$. Τότε, από την Πρόταση 2.3.3, έχουμε μια W*-$L^\infty(G)$-δράση $\alpha\colon M \to M\overline{\otimes}L^\infty(G)$ που ορίζεται ως εξής

$$\langle \alpha(x), \omega \otimes f\rangle = \int_G \langle \gamma_{s^{-1}}(x), \omega\rangle f(s)\, ds, \quad x \in M,\ \omega \in M_*, f \in L^1(G).$$

Θυμηθείτε ότι τα σταθερά σημεία της δράσης γ είναι ακριβώς ο υπόχωρος των σταθερών σημείων M^α, δηλαδή ένα $x \in M$ ικανοποιεί την $\alpha(x) = x \otimes 1$ αν και μόνον αν $\gamma_s(x) = x$ για κάθε $s \in G$ (βλ. Πρόταση 2.3.3).

Το (σύνηθες) *σταυρωτό γινόμενο* $M \rtimes_\alpha G$ (ή $M \rtimes_\gamma G$) ορίζεται ως η von Neumann υπάλγεβρα της $M\overline{\otimes}B(L^2(G))$ που παράγεται από την $\alpha(M)$ και την $\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)$, η οποία από το θεώρημα δεύτερου μεταθέτη του von Neumann ισούται με

$$M \rtimes_\alpha G = (\alpha(M) \cup (\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)))''.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Digernes-Takesaki (βλ.για παράδειγμα [53, Chapter X, Corollary 1.22]) έχουμε ότι το $M \rtimes_\alpha G$ ισούται με την άλγεβρα των σταθερών σημείων της W*-G-δράσης β στο $M\overline{\otimes}B(L^2(G))$ που ορίζεται ως εξής

$$\beta_s = \gamma_s \otimes \mathrm{Ad}\rho_s, \quad s \in G.$$

Επί πλέον, (βλέπε επίσης [38] σελίδα 9) η W*-$L^\infty(G)$-δράση που αντιστοιχεί στην G-δράση $\beta = \gamma \otimes \mathrm{Ad}\rho$, την οποία συμβολίζουμε με $\widetilde{\alpha}$, δίνεται απευθείας από την α μέσω της σχέσης:

$$\widetilde{\alpha} = (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$$

όπου σ ο ισομορφισμός flip του $B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$, δηλαδή $\sigma(x\otimes y) = y\otimes x$. Επομένως, το θεώρημα Digernes-Takesaki μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής

$$M \rtimes_\alpha G = \left(M\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω, ο Hamana [19] εισήγαγε τους Ορισμούς 3.1.1 και 3.1.3 παρακάτω. Ωστόσο, χάριν συνέπειας, η ορολογία και οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε εμείς διαφέρουν ελαφρώς από τα αντίστοιχα του Hamana (βλ. Παρατήρηση 3.1.5).

Ορισμός 3.1.1. Για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X, α), ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{\alpha}\colon X\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

ως

$$\widetilde{\alpha} = (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}),$$

όπου σ ο ισομορφισμός flip στον $B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

$$\begin{tikzcd}
X\overline{\otimes}B(L^2(G)) \arrow[r, "\alpha\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))}"] \arrow[rdd, dashed, bend right, "\widetilde{\alpha}"'] & X\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G)) \arrow[d, "\mathrm{id}_X\otimes\sigma"] \\
 & X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G) \arrow[d, "\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{Ad}U_G^*"] \\
 & X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)
\end{tikzcd}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά το ίδιο με το [19, Lemma 5.3 (i)] με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, καθώς ο Hamana θεωρεί στον $L^\infty(G)$ το (αντίθετο) συγγινόμενο $\sigma \circ \alpha_G$ ενώ χρησιμοποιεί την δεξιά άλγεβρα von Neumann $R(G)$ της ομάδας αντί της $L(G)$ σαν το δυϊκό αντικείμενο της $L^\infty(G)$.

Πρόταση 3.1.2 (Hamana [19])**.** *Αν το (X, α) είναι ένα $L^\infty(G)$-comodule, τότε η $\widetilde{\alpha}$ είναι μια $L^\infty(G)$-δράση στο $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ που μετατίθεται με την $L(G)$-δράση $\mathrm{id}_X \otimes \delta_G$ στο $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$.*

Απόδειξη. Απ' την Παρατήρηση 2.1.3 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος μιας άλγεβρας von Neumann N της μορφής $N = B(H)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και $\alpha = \varepsilon|_X$, όπου $\varepsilon = \mathrm{id}_{B(H)}\otimes\alpha_G$. Τότε προφανώς $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\varepsilon}|_{X\overline{\otimes}B(L^2(G))}$ και η $\widetilde{\varepsilon}$ είνα μια W*-$L^\infty(G)$-δράση στην

$N\overline{\otimes}B(L^2(G))$. Αφού η $\widetilde{\varepsilon}$ είναι w*-συνεχής *-μονομορφισμός, ο τελευταίος ισχυρισμός επαληθεύεται εύκολα ελέγχοντας την σχέση

$$(\widetilde{\varepsilon}\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ\widetilde{\varepsilon} = (\mathrm{id}_N\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\alpha_G)\circ\widetilde{\varepsilon}$$

στους γεννήτορες της $N\overline{\otimes}B(L^2(G))$, δηλαδή στα στοιχεία της μορφής $z\otimes 1$, $1\otimes 1\otimes f$ και $1\otimes 1\otimes\lambda_s$ για $z\in N$, $f\in L^\infty(G)$ και $s\in G$, επειδή ο $B(L^2(G))$ παράγεται από τις $L(G)$ και $L^\infty(G)$.

Επομένως, για να δείξουμε ότι η $\widetilde{\alpha}$ είναι $L^\infty(G)$-δράση στο $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$, αρκεί να δείξουμε ότι $\widetilde{\varepsilon}(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))\subseteq X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$. Πράγματι, έχουμε

$$(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))\subseteq X\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

και άρα

$$(\mathrm{id}_X\otimes\sigma)\circ(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))\subseteq X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G).$$

Αφού $U_G\in R(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ και το $X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$ είναι $\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$-διπρότυπο, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_X\otimes \mathrm{Ad}U_G^*)\circ(\mathrm{id}_X\otimes\sigma)\circ(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})&(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))\\ &\subseteq X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G).\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, για να δείξουμε ότι οι $\widetilde{\alpha}$ και $\mathrm{id}_X\otimes\delta_G$ μετατίθενται, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι οι $\mathrm{id}_{B(H)}\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G$ και $\widetilde{\varepsilon}$ μετατίθενται, όπου $\varepsilon=\mathrm{id}_{B(H)}\otimes\alpha_G$. Επειδή οι $\widetilde{\varepsilon}$ και $\mathrm{id}_{B(H)}\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G$ δρουν ταυτοτικά στον πρώτο παράγοντα $B(H)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι $\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G$ και $\widetilde{\alpha_G}$ μετατίθενται, δηλαδή:

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\alpha_G}\otimes \mathrm{id}_{L(G)})\circ(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G)=\\ =&(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\sigma)\circ(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ\widetilde{\alpha_G}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Έστω S ο unitary τελεστής στον $L^2(G)\otimes L^2(G)$ με $S(\xi\otimes\eta)=\eta\otimes\xi$. Συνεπώς, ο ισομορφισμός flip σ στον $B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$ γράφεται ως $\sigma=\mathrm{Ad}S$. Αν $a\in L^\infty(G)$ και $b\in B(L^2(G))$, τότε εφαρμόζοντας το αριστερό και το δεξί μέλος της (3.1) στο $a\otimes b$, λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\alpha_G}\otimes \mathrm{id}_{L(G)})\circ(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G)(a\otimes b)=\\ &\mathrm{Ad}[(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(V_G^*\otimes 1\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)\\ &(1\otimes W_G^*\otimes 1)](a\otimes b\otimes 1\otimes 1)\end{aligned}\tag{3.2}$$

και

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\sigma)\circ(\mathrm{id}_{L^\infty(G)}\otimes\delta_G\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ\widetilde{\alpha_G}(a\otimes b)=\\ &\mathrm{Ad}[(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes W_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)\\ &(V_G^*\otimes 1\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)](a\otimes b\otimes 1\otimes 1)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Θεωρούμε τους unitaries εντός των αγκυλών στις (3.2) και (3.3):

$$A = (1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(V_G^*\otimes 1\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes W_G^*\otimes 1)$$

και

$$B = (1\otimes 1\otimes S)(1\otimes W_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(V_G^*\otimes 1\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1).$$

Τότε, η (3.1) είναι ισοδύναμη με την

$$A(a\otimes b\otimes 1\otimes 1)A^* = B(a\otimes b\otimes 1\otimes 1)B^*, \text{ για κάθε } a\in L^\infty(G) \text{ και } b\in B(L^2(G)),$$

η οποία με την σειρά της ισοδυναμεί με την συνθήκη:

$$A^*B \in L^\infty(G)\overline{\otimes}\mathbb{C}1\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)).$$

Η τελευταία συνθήκη επαληθεύεται υπολογίζοντας

$$A^*B = 1\otimes 1\otimes V_G S \in \mathbb{C}1\overline{\otimes}\mathbb{C}1\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)).$$

□

Ορισμός 3.1.3. Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule. Το *σταυρωτό γινόμενο Fubini* του X ως προς την α είναι εξ ορισμού το $L(G)$-comodule $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\ \widehat{\alpha})$, όπου

$$X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G := (X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}$$

και

$$\widehat{\alpha} := (\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)|_{X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}}G}.$$

Η $L(G)$-δράση $\widehat{\alpha}\colon X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\to (X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ λέγεται *δυϊκή δράση* της α.

Από την Πρόταση 3.1.2 και το Λήμμα 2.1.7 έπεται ότι το $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha})$ είναι πράγματι ένα $L(G)$-subcomodule του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)$.

Ορισμός 3.1.4. Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule και έστω ότι ο X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Το *χωρικό σταυρωτό γινόμενο* του X ως προς την α είναι εξ ορισμού ο χώρος

$$\begin{aligned} X\overline{\rtimes}_\alpha G &:= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t):\ s,t\in G,\ x\in X\}\\ &\subseteq B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G)).\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι ο Ορισμός 3.1.4 υπαγορεύεται φυσιολογικά από το γεγονός ότι αν η M είναι μια άλγεβρα von Neumann, η γ είναι μια G-δράση στην M και α η W*-$L^\infty(G)$-δράση στην M που αντιστοιχεί στην γ όπως παραπάνω, τότε το σταυρωτό γινόμενο $M\rtimes_\alpha G$ ισούται με το w*-κλειστό $\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)$-διπρότυπο που παράγει η $\alpha(M)$. Αυτό έπεται άμεσα από τις γνωστές σχέσεις συναλλοιώτου (βλ. (2.5)):

$$\alpha(\gamma_s(x)) = (1\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1\otimes\lambda_s^{-1}),\quad s\in G,\ x\in M.$$

Παρατήρηση 3.1.5. Από την παραπάνω συζήτηση, έπεται ότι αν (M,α) είναι ένα W*-$L^\infty(G)$-comodule, τότε $M \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = M\overline{\rtimes}_\alpha G = M \rtimes_\alpha G$, όπου $M \rtimes_\alpha G = (\alpha(M) \cup (\mathbb{C}1\overline{\otimes}L(G)))''$ το σύνηθες σταυρωτό γινόμενο για άλγεβρες von Neumann. Περιέργως, όπως θα αποδείξουμε στα επόμενα, αυτό δεν ισχύει εν γένει για αυθαίρετα $L^\infty(G)$-comodules εκτός αν η G έχει την προσεγγιστική ιδιότητα των Haagerup και Kraus (βλ. Θεώρημα 3.3.10).

Παρατηρείστε ότι αν (X,α) είναι ένα $L^\infty(G)$-comodule με την α τετριμμένη, δηλαδή $\alpha(x) = x \otimes 1$ για κάθε $x \in X$, τότε για $x \in X$ και $b \in B(L^2(G))$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}(x \otimes b) &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(x \otimes b)\\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma)(x \otimes 1 \otimes b)\\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}U_G^*)(x \otimes b \otimes 1)\\ &= (\mathrm{id}_X \otimes \beta_G)(x \otimes b)\end{aligned}$$

και άρα $\widetilde{\alpha} = \mathrm{id}_X \otimes \beta_G$. Αφού $B(L^2(G))^{\beta_G} = L(G)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G &= (X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}\\ &= (X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\mathrm{id}_X \otimes \beta_G}\\ &= X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}(B(L^2(G)))^{\beta_G}\\ &= X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G).\end{aligned}$$

Αυτό εξηγεί πράγματι τον όρο «σταυρωτό γινόμενο Fubini» ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στο [56]. Θα πρέπει να σημειώσουμε, ωστόσο, σε αυτό το σημείο ότι ο Hamana είχε ήδη θεωρήσει την έννοια των σταυρωτών γινομένων Fubini στο [19], αλλά χρησιμοποιώντας διαφορετική ορολογία.

Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι $X\overline{\rtimes}_\alpha G = X\overline{\otimes}L(G)$ όταν η α είναι τετριμμένη και επομένως ο όρος «χωρικό σταυρωτό γινόμενο» δικαιολογείται παρόμοια.

Επίσης, για μια τοπικά συμπαγή ομάδα (ακόμη και στην διακριτή περίπτωση) δεν είναι κατ' ανάγκην αληθές ότι $X\overline{\otimes}L(G) = X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ για κάθε δυϊκό χώρο τελεστών X. Πράγματι, αν πάρουμε μια οιαδήποτε διακριτή ομάδα G που δεν έχει την προσεγγιστική ιδιότητα (για παράδειγμα η $G = SL(3,\mathbb{Z})$, βλ. [33]), τότε, από το [22, Theorem 2.1], έπεται ότι υπάρχει ένας δυϊκός χώρος τελεστών X, τέτοιος ώστε $X\overline{\otimes}L(G) \neq X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η ισότητα $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X\overline{\rtimes}_\alpha G$ δεν ισχύει για όλα τα $L^\infty(G)$-comodules (X,α) εν αντιθέσει προς την περίπτωση των αλγεβρών von Neumann. Συνεπώς, η διάκριση ανάμεσα σε Fubini και χωρικά σταυρωτά γινόμενα φαίνεται να είναι αναγκαία στο πλαίσιο των γενικών δυϊκών χώρων τελεστών.

Οι Crann και Neufang [12] απέδειξαν ότι αν G είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα με την AP, τότε $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X\overline{\rtimes}_\alpha G$ για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X,α) [12, Corollary 4.8]. Οφείλουμε να προειδοποιήσουμε τον αναγνώστη ότι οι Crann και Neufang θεωρούν G-αναλλοίωτους υπόχωρους αλγεβρών von

Neumann αντί γενικών $L^\infty(G)$-comodules, αλλά αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό περιορισμό. Πράγματι, κάθε $L^\infty(G)$-comodule είναι ισόμορφο με ένα subcomodule ενός W*-$L^\infty(G)$-comodule (βλ. Παρατήρηση 2.1.3 και Πρόταση 3.1.8), δηλαδή, με ένα G-αναλλοίωτο υπόχωρο μιας άλγεβρας von Neumann, καθώς κάθε W*-$L^\infty(G)$-δράση προέρχεται από μια κατά σημείο G-δράση όπως έχει επισημανθεί στα προηγούμενα.

Επίσης, στο [12] οι Crann και Neufang ορίζουν το σταυρωτό γινόμενο Fubini ενός G-αναλλοίωτου υπόχωρου X μιας άλγεβρας von Neumann M με την βοήθεια ενός κατάλληλου operator valued βάρους (weight) (βλ. [12, Definition 3.1]). Ωστόσο, ο ορισμός τους είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 3.1.3. Πράγματι, από την [12, Proposition 3.2] έπεται ότι το σταυρωτό γινόμενο Fubini του X με την έννοια των Crann-Neufang ισούται με την τομή

$$(M \rtimes_\alpha G) \cap (X \overline{\otimes} B(L^2(G))).$$

Αφού $M \rtimes_\alpha G = (M \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}$ (από το θεώρημα Digernes-Takesaki), προκύπτει ότι η ως άνω τομή ισούται με το $(X \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}$, δηλαδή το σταυρωτό γινόμενο Fubini $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3.

Στα επόμενα, χρησιμοποιώντας μια γενίκευση του δυϊσμού Takesaki και την σχέση του με την AP, θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη του προαναφερθέντος αποτελέσματος των Crann και Neufang (δηλ. του [12, Corollary 4.8]), αποφεύγοντας την χρήση operator valued βαρών. Επί πλέον, θα αποδείξουμε ότι το αντίστροφό του είναι επίσης σωστό (βλ. Θεώρημα 3.3.10).

Παρατήρηση 3.1.6. Έστω H, K χώροι Hilbert, $X \subseteq B(H)$ ένας w*-κλειστός υπόχωρος και $b,\ c \in B(K)$. Τότε, έχουμε

$$(1_H \otimes b)(X \overline{\otimes} B(K))(1_H \otimes c) \subseteq X \overline{\otimes} B(K).$$

Ως συνέπεια αυτού, αν (X, α) είναι ένα $L^\infty(G)$-comodule, τότε

$$X \overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq X \overline{\otimes} B(L^2(G)),$$

διότι $\alpha(X) \subseteq X \overline{\otimes} L^\infty(G) \subseteq X \overline{\otimes} B(L^2(G))$.

Ακόμη, αν το Y είναι επί πλέον ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(L)$ για κάποιο χώρο Hilbert L και $\phi\colon X \to Y$ είνα μια w*-συνεχής πλήρως φραγμένη απεικόνιση, τότε η $\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)}\colon\ X \overline{\otimes} B(K) \to Y \overline{\otimes} B(K)$ είναι w*-συνεχής μορφισμός $B(K)$-διπρότυπων υπό την έννοια ότι

$$(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})((1_H \otimes a)x(1_H \otimes b)) = (1_L \otimes a)(\phi \otimes \mathrm{id}_{B(K)})(x)(1_L \otimes b),$$

για κάθε $a,\ b \in B(K)$ και $x \in X \overline{\otimes} B(K)$.

Πρόταση 3.1.7. *Έστω (X, α) ένα $L^\infty(G)$-comodule και έστω ότι το X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Τότε, το $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ είναι $L(G)$-διπρότυπο, δηλαδή*

$$(1_H \otimes \lambda_s)y(1_H \otimes \lambda_t) \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \qquad s, t \in G,\ y \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$$

και

$$\alpha(X) \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G.$$

Επομένως, έχουμε:

$$X \overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G.$$

Επίσης, ισχύει $\widehat{\alpha}(X \overline{\rtimes}_\alpha G) \subseteq (X \overline{\rtimes}_\alpha G) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$, *δηλαδή το* $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ *είναι* $L(G)$-*subcomodule του* $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$.

Απόδειξη. Έστω $s \in G$ και $y \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$. Τότε, από την Παρατήρηση 3.1.6 έπεται ότι $(1_H \otimes \lambda_s) y \in X \overline{\otimes} B(L^2(G))$ και $\widetilde{\alpha}(y) = y \otimes 1$, από τον Ορισμό 3.1.3. Επίσης, από την Παρατήρηση 3.1.6, έχουμε ότι

$$(\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})((1_H \otimes \lambda_s) y) = (1_H \otimes 1_{L^2(G)} \otimes \lambda_s)(\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(y).$$

Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}((1_H \otimes \lambda_s) y) = \\
&= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})((1_H \otimes \lambda_s) y) \\
&= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \big((1_H \otimes 1_{L^2(G)} \otimes \lambda_s)(\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(y)\big) \\
&= \big[(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \sigma)((1_H \otimes 1_{L^2(G)} \otimes \lambda_s))\big]\, \widetilde{\alpha}(y) \\
&= \big[(1_H \otimes U_G^*)(1_H \otimes \lambda_s \otimes 1_{L^2(G)})(1_H \otimes U_G)\big]\, (y \otimes 1_{L^2(G)}) \\
&= (1_H \otimes \lambda_s) y \otimes 1_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα παραπάνω προκύπτει από το γεγονός ότι η $(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \sigma)$ είναι *-ομομορφισμός και άρα πολλαπλασιαστική, ενώ η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $U_G \in R(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ και $R(G) = L(G)'$. Επομένως, $(1_H \otimes \lambda_s) y \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$. Ομοίως, έπεται ότι $y(1_H \otimes \lambda_t) \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ για κάθε $t \in G$ και $y \in X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Από την άλλη μεριά, αν $x \in X$, τότε:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(\alpha(x)) &= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(\alpha(x)) \\
&= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_G)(\alpha(x)) \\
&= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad} U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \alpha'_G)(\alpha(x)) \\
&= (1_H \otimes U_G^*)(1_H \otimes U_G)(\alpha(x) \otimes 1_{L^2(G)})(1_H \otimes U_G^*)(1_H \otimes U_G) \\
&= \alpha(x) \otimes 1_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

διότι $\alpha'_G = \sigma \circ \alpha_G$ και $\alpha'_G(f) = U_G(f \otimes 1) U_G^*$, για κάθε $f \in L^\infty(G)$ (βλ. υποενότητα 2.3.1). Συνεπώς, $\alpha(X) \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Τέλος, για $x \in X$ και $s \in G$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}((1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x)) &= (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G)((1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x)) \\
&= (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G)(1_H \otimes \lambda_s))(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G)(\alpha(x)) \\
&= (1_H \otimes \delta_G(\lambda_s))(1_H \otimes W_G^*)(\alpha(x) \otimes 1_{L^2(G)})(1_H \otimes W_G) \\
&= (1_H \otimes \lambda_s \otimes \lambda_s)(\alpha(x) \otimes 1_{L^2(G)}),
\end{aligned}$$

διότι ο $1_H \otimes W_G \in \mathbb{C}1_H \overline{\otimes} L^\infty(G) \overline{\otimes} L(G)$ μετατίθεται με το $\alpha(x) \otimes 1_{L^2(G)} \in B(H)\overline{\otimes}\, L^\infty(G)\overline{\otimes}\mathbb{C}1_{L^2(G)}$. Εομένως, παίρνουμε:

$$\widehat{\alpha}((1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x)) = ((1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x)) \otimes \lambda_s$$

και έτσι έπεται ότι $\widehat{\alpha}(X \overline{\rtimes}_\alpha G) \subseteq (X \overline{\rtimes}_\alpha G) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι, για κάθε $L^\infty(G)$-comodule X, τόσο το σταυρωτό γινόμενο Fubini, όσο και το χωρικό σταυρωτό γινόμενο είναι μοναδικά ως προς comodule ισομορφισμούς και συνεπώς ανεξάρτητα από τον εκάστοτε χώρο Hilbert στον οποίο αναπαρίσταται ο X.

Πρόταση 3.1.8 (Μοναδικότητα σταυρωτού γινομένου)**.** *Έστω (X, α) και (Y, β) δύο $L^\infty(G)$-comodules και ας υποθέσουμε ότι οι X και Y είναι w*-κλειστοί υπόχωροι των $B(H)$ και $B(K)$ αντίστοιχα. Έστω $\Phi\colon X \to Y$ ένας $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός.*

Τότε η απεικόνιση $\Psi := \Phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}\colon X \overline{\otimes} B(L^2(G)) \to Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\alpha})$ επί του $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\beta})$, ο οποίος απεικονίζει το $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ επί του $Y \rtimes_\beta^{\mathcal{F}} G$ και το $X \overline{\rtimes}_\alpha G$ επί του $Y \overline{\rtimes}_\beta G$. Επίσης, ο $\Psi|_{X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G}$ είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ επί του $(Y \rtimes_\beta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\beta})$ και ο $\Psi|_{X \overline{\rtimes}_\alpha G}$ είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ επί του $(Y \overline{\rtimes}_\beta G, \widehat{\beta})$.

Ακόμη, ο Ψ είναι μορφισμός $L(G)$-διπρότυπων, δηλαδή

$$\Psi((1_H \otimes \lambda_s)x(1_H \otimes \lambda_t)) = (1_K \otimes \lambda_s)\Psi(x)(1_K \otimes \lambda_t),$$

για κάθε $s, t \in G$ και $x \in X \overline{\otimes} B(L^2(G))$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αφού ο Φ είναι comodule μορφισμός, έπεται ότι $\beta \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha$ και άρα:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta} \circ \Psi &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\beta \otimes \mathrm{id}) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ ((\beta \circ \Phi) \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ [((\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha) \otimes \mathrm{id}] \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\Phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ \widetilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

Επομένως ο Ψ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\alpha})$ επί του $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\beta})$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο Ψ απεικονίζει τον χώρο των σταθερών σημείων $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ της $\widetilde{\alpha}$ επί του χώρου των σταθερών σημείων $Y \rtimes_\beta^{\mathcal{F}} G$ της $\widetilde{\beta}$. Εξ άλλου, η σχέση $\beta \circ \Phi = (\Phi \otimes id) \circ \alpha$ μας δίνει

$$\Psi(\alpha(X)) = (\Phi \otimes \mathrm{id})(\alpha(X)) = \beta(\Phi(X)) = \beta(Y)$$

και εφ' όσον ο Ψ είναι μορφισμός $L(G)$-διπρότυπων (βλ. Παρατήρηση 3.1.6) έπεται ότι ο Ψ απεικονίζει το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ επί του $Y\overline{\rtimes}_\beta G$. Μένει, λοιπόν, να δειχθεί ότι

$$\widehat{\beta}\circ\Psi = (\Psi\otimes \mathrm{id})\circ\widehat{\alpha}.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}\circ\Psi &= (\mathrm{id}_Y\otimes\delta_G)\circ(\Phi\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))})\\ &= (\Phi\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\mathrm{id}_{L(G)})\circ(\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)\\ &= (\Psi\otimes\mathrm{id}_{L(G)})\circ\widehat{\alpha}.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.1.9. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X,α) το σταυρωτό γινόμενο Fubini $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha})$ είναι saturated $L(G)$-comodule και το χωρικό σταυρωτό γινόμενο $(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha})$ είναι non-degenerate $L(G)$-comodule.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και θέτουμε $K := H\otimes L^2(G)$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha})$ είναι ένα non-degenerate $L(G)$-comodule. Έχουμε ότι το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι $\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}B(L^2(G))$- διπρότυπο. Επομένως, αφού $\widehat{\alpha}(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\subseteq (X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)\subseteq (X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$, προκύπτει ο εγκλεισμός

$$(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}B(L^2(G))\supseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_K\otimes b)\widehat{\alpha}(y):\ b\in B(L^2(G)),\ y\in X\overline{\rtimes}_\alpha G\}.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι για κάθε $s,t\in G$, $x\in X$ και $b\in B(L^2(G))$, έχουμε

$$\begin{aligned}&((1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t))\otimes b =\\ &= (1_H\otimes 1_{L^2(G)}\otimes b\lambda_t^{-1}\lambda_s^{-1})(((1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t))\otimes\lambda_{st})\\ &= (1_H\otimes 1_{L^2(G)}\otimes b\lambda_{st}^{-1})(1_H\otimes\lambda_s\otimes\lambda_s)(\alpha(x)\otimes 1_{L^2(G)})(1_H\otimes\lambda_t\otimes\lambda_t)\\ &= (1_H\otimes 1_{L^2(G)}\otimes b\lambda_{st}^{-1})(\mathrm{id}_{B(H)}\otimes\delta_G)((1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t))\\ &= (1_H\otimes 1_{L^2(G)}\otimes b\lambda_{st}^{-1})\widehat{\alpha}((1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t)),\end{aligned}$$

εφ' όσον

$$(\mathrm{id}_{B(H)}\otimes\delta_G)(1_H\otimes\lambda_s) = 1_H\otimes\lambda_s\otimes\lambda_s \text{ και } (\mathrm{id}_{B(H)}\otimes\delta_G)(\alpha(x)) = \alpha(x)\otimes 1.$$

Συνεπώς, έπεται ότι

$$((1_H\otimes\lambda_s)\alpha(x)(1_H\otimes\lambda_t))\otimes b\in$$

$$\in \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\{(1_K \otimes c)\widehat{\alpha}(y) : \ c \in B(L^2(G)), \ y \in X\overline{\rtimes}_\alpha G\}.$$

Αφού το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των στοιχείων της μορφής $((1_H \otimes \lambda_s)\alpha(x)(1_H \otimes \lambda_t)) \otimes b$, παίρνουμε τον ζητούμενο εγκλεισμό και άρα το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι non-degenerate.

Για το σταυρωτό γινόμενο Fubini, παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 2.2.10 το $L(G)$-comodule $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \mathrm{id}_X \otimes \delta_G)$ είναι saturated, εφ' όσον το $(B(L^2(G)), \delta_G)$ είναι saturated (βλ. Παρατήρηση 3.3.4). Επίσης, οι δράσεις $\widetilde{\alpha}$ και $\mathrm{id}_X \otimes \delta_G$ στο $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ μετατίθενται από την Πρόταση 3.1.2. Άρα, από το Λήμμα 2.2.11 έπεται ότι το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι saturated, διότι $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}$ και $\widehat{\alpha} = (\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)|_{X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G}$ εξ ορισμού. □

Πρόταση 3.1.10. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X, α), έχουμε*

$$(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)^{\widehat{\alpha}} = (X\overline{\rtimes}_\alpha G)^{\widehat{\alpha}} = \alpha(X) = \mathrm{Sat}(X, \alpha) = (X\overline{\otimes}L^\infty(G))^{\widetilde{\alpha}}.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $\mathrm{Sat}(X, \alpha) = (X\overline{\otimes}L^\infty(G))^{\widetilde{\alpha}}$. Πράγματι, για κάθε $x \in X\overline{\otimes}L^\infty(G)$, έχουμε:

$$x \in (X\overline{\otimes}L^\infty(G))^{\widetilde{\alpha}} \iff \widetilde{\alpha}(x) = x \otimes 1$$

$$\iff (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(x) = x \otimes 1$$

$$\iff (\alpha \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})(x) = (\mathrm{id}_X \otimes \sigma)\left((1_H \otimes U_G)(x \otimes 1)(1_H \otimes U_G^*)\right)$$

$$\iff (\alpha \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})(x) = (\mathrm{id}_X \otimes \alpha_G)(x)$$

$$\iff x \in \mathrm{Sat}(X, \alpha).$$

Για την τέταρτη ισοδυναμία παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\sigma \circ \alpha_G(f) = U_G(f \otimes 1)U_G^*$$

για κάθε $f \in L^\infty(G)$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι $\left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\alpha}} = (X\overline{\otimes}L^\infty(G))^{\widetilde{\alpha}}$. Πράγματι, αφού οι δράσεις $\mathrm{id}_X \otimes \delta_G$ και $\widetilde{\alpha}$ μετατίθενται (βλ. Πρόταση 3.1.2) και $\widehat{\alpha} = (\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)|_{X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G}$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
\left(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\alpha}} &= \left(\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}\right)^{\mathrm{id}_X \otimes \delta_G} \\
&= \left(\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\mathrm{id}_X \otimes \delta_G}\right)^{\widetilde{\alpha}} \\
&= \left(X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}\left(B(L^2(G))\right)^{\delta_G}\right)^{\widetilde{\alpha}} \\
&= (X\overline{\otimes}L^\infty(G))^{\widetilde{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $B(L^2(G))^{\delta_G} = L^\infty(G)$.

Από το Λήμμα 2.3.5 έχουμε $\mathrm{Sat}(X,\alpha) = \alpha(X)$ και συνεπώς έπεται ότι

$$(X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G)^{\widehat{\alpha}} = \alpha(X) = \mathrm{Sat}(X,\alpha) = (X \overline{\otimes} L^{\infty}(G))^{\widetilde{\alpha}}.$$

Μένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι $(X \overline{\rtimes}_{\alpha} G)^{\widehat{\alpha}} = \alpha(X)$. Πράγματι, επειδή το $(X \overline{\rtimes}_{\alpha} G, \widehat{\alpha})$ είναι ένα $L(G)$-subcomodule του $(X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}(X \overline{\rtimes}_{\alpha} G)^{\widehat{\alpha}} &= (X \rtimes_{\alpha}^{\mathcal{F}} G)^{\widehat{\alpha}} \cap (X \overline{\rtimes}_{\alpha} G) \\ &= \alpha(X) \cap (X \overline{\rtimes}_{\alpha} G) \\ &= \alpha(X),\end{aligned}$$

αφού $\alpha(X) \subseteq X \overline{\rtimes}_{\alpha} G$. □

3.2 Σταυρωτά γινόμενα για $L(G)$-comodules

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε τα ανάλογα των Fubini και χωρικών σταυρωτών-γινομένων στην κατηγορία των $L(G)$-comodules.

Η κυριότερη, αλλά και πιο ενδιαφέρουσα, διαφορά ανάμεσα στα $L^{\infty}(G)$-comodules και τα $L(G)$-comodules είναι ότι για κάθε $L(G)$-comodule (Y,δ) το αντίστοιχο Fubini και χωρικό σταυρωτό γινόμενο συμπίπτουν χωρίς καμμία επί πλέον υπόθεση για την ομάδα G ή για τον χώρο Y (Θεώρημα 3.2.10). Η αιτία πίσω από αυτό είναι ότι το Fubini και το χωρικό σταυρωτό γινόμενο ενός $L(G)$-comodule έχουν μια φυσιολογική δομή $L^{\infty}(G)$-comodule και συνεπώς είναι πάντα non-degenerate και saturated από το Λήμμα 2.3.5. Αυτό θα γίνει πιο ξεκάθαρο από τον τρόπο που θα χρησιμοποιηθεί το Λήμμα 2.3.5 στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.9 παρακάτω, από την οποία έπεται το Θεώρημα 3.2.10.

Οι Ορισμοί 3.2.1 και 3.1.3 παρακάτω προέρχονται από το [19] με κάποιες μικρές αλλαγές στην ορολογία και τον συμβολισμό χάριν συνέπειας.

Ορισμός 3.2.1. Για ένα $L(G)$-comodule (Y,δ), ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widetilde{\delta} \colon Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) \to Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G)) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$$

ως

$$\widetilde{\delta} = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}),$$

όπου σ ο ισομορφισμός flip στον $B(L^2(G)) \overline{\otimes} B(L^2(G))$.

$$\begin{tikzcd}
Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) \arrow[r, "\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}"] \arrow[rdd, dashed, bend right, "\widetilde{\delta}"'] & Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} (L(G) \overline{\otimes} B(L^2(G))) \arrow[d, "\mathrm{id}_Y \otimes \sigma"] \\
& Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} (B(L^2(G)) \overline{\otimes} L(G)) \arrow[d, "\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G"] \\
& X \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} (B(L^2(G)) \overline{\otimes} L(G))
\end{tikzcd}$$

Η ακόλουθη πρόταση, που είναι ουσιαστικά ίδια με το [19, Lemma 5.3 (ii)], είναι το ανάλογο της Πρότασης 3.1.2 για $L(G)$-comodules. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 3.1.2 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις.

Πρόταση 3.2.2 (Hamana [19])**.** *Για ένα $L(G)$-comodule (Y, δ), η απεικόνιση $\widetilde{\delta}$ είναι μια $L(G)$-δράση στον $Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ που μετατίθεται με την $L^\infty(G)$-δράση $\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G$ στον $Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.1.3 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος μιας άλγεβρας von Neumann N της μορφής $N = B(H) \overline{\otimes} L(G)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και $\delta = \varepsilon|_Y$, όπου $\varepsilon = \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G$. Τότε, προφανώς $\widetilde{\delta} = \widetilde{\varepsilon}|_{Y \overline{\otimes} B(L^2(G))}$ και η $\widetilde{\varepsilon}$ είναι W*-$L(G)$-δράση στην $N \overline{\otimes} B(L^2(G))$. Αφού η $\widetilde{\varepsilon}$ είναι w*-συνεχής *-μονομορφισμός, ο τελευταίος ισχυρισμός επαληθεύεται ελέγχοντας την σχέση

$$(\widetilde{\varepsilon} \otimes \mathrm{id}_{L(G)}) \circ \widetilde{\varepsilon} = (\mathrm{id}_N \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \delta_G) \circ \widetilde{\varepsilon}$$

στους γεννήτορες της $N \overline{\otimes} B(L^2(G))$, δηλαδή στα στοιχεία της μορφής $z \otimes 1$, $1 \otimes 1 \otimes f$ και $1 \otimes 1 \otimes \rho_s$ για $z \in N$, $f \in L^\infty(G)$ και $s \in G$, διότι ο $B(L^2(G))$ παράγεται από τις $R(G)$ και $L^\infty(G)$.

Επομένως, για να δείξουμε ότι η $\widetilde{\delta}$ είναι $L(G)$-δράση στον $Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) = Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\widetilde{\varepsilon}(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))) \subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G)) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G).$$

Πράγματι, έχουμε

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))) \subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))$$

και άρα

$$(\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))) \subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G)) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G).$$

Επειδή $W_G \in L^\infty(G) \overline{\otimes} L(G)$ και ο $Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G)) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$ είναι $\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G)) \overline{\otimes} L(G)$-διπρότυπο, έπεται ότι

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})&(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))) \\ &\subseteq Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G)) \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G).\end{aligned}$$

Εξ άλλου, για να δείξουμε ότι οι $\widetilde{\delta}$ και $\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G$ μετατίθενται, αρκεί να επαληθεύσουμε ότι οι $\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G$ και $\widetilde{\varepsilon}$ μετατίθενται, όπου $\varepsilon = \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G$. Επειδή οι $\widetilde{\varepsilon}$ και $\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G$ δρουν ταυτοτικά στον πρώτο παράγοντα $B(H)$, αρκεί να δειχθεί ότι οι $\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G$ και $\widetilde{\delta_G}$ μετατίθενται, δηλαδή:

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\delta_G} \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ (\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G) = \\ =&(\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \sigma) \circ (\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G \otimes \mathrm{id}_{L(G)}) \circ \widetilde{\delta_G}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Έστω S ο unitary τελεστής στον $L^2(G) \otimes L^2(G)$ με $S(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$. Επομένως, ο ισομορφισμός flip σ στον $B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$ γράφεται ως $\sigma = \mathrm{Ad}S$. Αν $a \in L(G)$ και $b \in B(L^2(G))$, τότε εφαρμόζοντας το αριστερό και το δεξί μέλος της (3.4) στο $a \otimes b$, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\delta_G} \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ (\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G)(a \otimes b) = \\ &\mathrm{Ad}[(1 \otimes W_G \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1)(W_G^* \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes S) \\ &(1 \otimes U_G^* \otimes 1)](a \otimes b \otimes 1 \otimes 1)\end{aligned} \tag{3.5}$$

και

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \sigma) \circ (\mathrm{id}_{L(G)} \otimes \beta_G \otimes \mathrm{id}_{L(G)}) \circ \widetilde{\delta_G}(a \otimes b) = \\ &\mathrm{Ad}[(1 \otimes 1 \otimes S)(1 \otimes U_G^* \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes S)(1 \otimes W_G \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1) \\ &(W_G^* \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1)](a \otimes b \otimes 1 \otimes 1)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Θεωρούμε τους unitaries των αγκυλών στις (3.5) και (3.6):

$$A = (1 \otimes W_G \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1)(W_G^* \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes S \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes S)(1 \otimes U_G^* \otimes 1)$$

και

$$B = (1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes W_G\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)(W_G^*\otimes 1\otimes 1)(1\otimes S\otimes 1)$$

Τότε, η (3.4) γράφεται ισοδύναμα

$$A(a\otimes b\otimes 1\otimes 1)A^* = B(a\otimes b\otimes 1\otimes 1)B^*, \text{ για κάθε } a \in L(G) \text{ και } b \in B(L^2(G))$$

και αυτό ισοδυναμεί με την ακόλουθη συνθήκη:

$$A^*B \in R(G)\overline{\otimes}\mathbb{C}1\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)),$$

η οποία αληθεύει διότι με ένα υπολογισμό βλέπουμε ότι ο A^*B δρα ταυτοτικά στις δύο πρώτες μεταβλητές, δηλαδή

$$A^*B \in \mathbb{C}1\overline{\otimes}\mathbb{C}1\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)).$$

□

Ορισμός 3.2.3. Έστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule. Το *σταυρωτό γινόμενο Fubini* του Y ως προς την δ είναι εξ ορισμού το $L^\infty(G)$-comodule $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G,\ \widehat{\delta})$, όπου

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G := (Y \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\widetilde{\delta}}$$

και

$$\widehat{\delta} := (\mathrm{id}_X \otimes \beta_G)|_{Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G}.$$

Η $L^\infty(G)$-δράση $\widehat{\delta}\colon Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G \to (Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ λέγεται *δυϊκή δράση* της δ.

Από την Πρόταση 3.2.2 και το Λήμμα 2.1.7, το $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta})$ είναι πράγματι ένα $L^\infty(G)$-subcomodule του $(Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \mathrm{id}_Y \otimes \beta_G)$.

Ορισμός 3.2.4. Έστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule και έστω ότι ο Y είναι w*-κλειστός στον $B(K)$ για κάποιο χώρο Hilbert K. Το *χωρικό σταυρωτό γινόμενο* του Y ως προς την δ είναι εξ ορισμού ο χώρος

$$\begin{aligned} Y \overline{\ltimes}_\delta G &:= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(1_K \otimes f)\delta(y)(1_K \otimes g) :\ f, g \in L^\infty(G),\ y \in Y\} \\ &\subseteq B(K) \overline{\otimes} B(L^2(G)). \end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.5. *Έστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule και έστω ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(K)$ για κάποιο χώρο Hilbert K. Τότε, το $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ είναι $L^\infty(G)$-διπρότυπο, δηλαδή*

$$(1_K \otimes f)y(1_K \otimes g) \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \qquad f, g \in L^\infty(G),\ y \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$$

και $\delta(Y) \subseteq Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$. Επομένως, έχουμε:

$$Y \overline{\ltimes}_\delta G \subseteq Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G.$$

Επί πλέον, $\widehat{\delta}(Y \overline{\ltimes}_\delta G) \subseteq (Y \overline{\ltimes}_\delta G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$, δηλαδή το $Y \overline{\ltimes}_\delta G$ είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta})$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^\infty(G)$ και $y \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$. Τότε, από την Παρατήρηση 3.1.6 έχουμε ότι $(1_K \otimes f)y \in Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ και $\widetilde{\delta}(y) = y \otimes 1$, από τον Ορισμό 3.2.3. Απίσης, από την Παρατήρηση 3.1.6, έχουμε ότι

$$(\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})((1_K \otimes f)y) = (1_K \otimes 1_{L^2(G)} \otimes f)(\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(y).$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}((1_H \otimes f)y) &= (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})((1_K \otimes f)y) \\ &= (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma)\left((1_K \otimes 1_{L^2(G)} \otimes f)(\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(y)\right) \\ &= \left[(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \sigma)((1_K \otimes 1_{L^2(G)} \otimes f))\right] \widetilde{\delta}(y) \end{aligned}$$

$$= \left[(1_K \otimes W_G)(1_K \otimes f \otimes 1_{L^2(G)})(1_K \otimes W_G^*)\right](y \otimes 1_{L^2(G)})$$
$$= (1_K \otimes f)y \otimes 1_{L^2(G)},$$

όπου η τρίτη ισότητα παραπάνω ισχύει αφού η $(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \sigma)$ είναι *-ομομορφισμός και άρα πολλαπλασιαστική, ενώ η τελευταία ισότητα αληθεύει διότι $W_G \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G)$ και άρα $W_G(f\otimes 1)W_G^* = f\otimes 1$. Η τέταρτη ισότητα έπεται από την υπόθεση ότι $\widetilde{\delta}(y) = y \otimes 1$. Συνεπώς,

$$(1_K \otimes f)y \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G.$$

Ομοίως, παίρνουμε $y(1_K \otimes g) \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ για κάθε $g \in L^\infty(G)$ και $y \in Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$.

Από την άλλη μεριά, αν $x \in Y$, τότε:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}(\delta(x)) &= (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(\delta(x)) \\
&= (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)(\delta(x)) \\
&= (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)(\delta(x)) \\
&= (1_K \otimes W_G)(1_K \otimes W_G^*)(\delta(x) \otimes 1_{L^2(G)})(1_K \otimes W_G)(1_K \otimes W_G^*) \\
&= \delta(x) \otimes 1_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα ισχύει επειδή $\sigma \circ \delta_G = \delta_G$. Άρα, $\delta(Y) \subseteq Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$.

Έστω $x \in Y$ και $f \in L^\infty(G)$. Αφού $\beta_G(z) = z \otimes 1$ για κάθε $z \in L(G)$ και $\delta(x) \in Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$, έπεται ότι $(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \beta_G)(\delta(x)) = \delta(x) \otimes 1$. Συνεπώς παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}((1_K \otimes f)\delta(x)) &= (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \beta_G)((1_K \otimes f)\delta(x)) \\
&= (1_K \otimes \beta_G(f))(\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \beta_G)(\delta(x)) \\
&= (1_K \otimes \beta_G(f))(\delta(x) \otimes 1) \in (Y\overline{\ltimes}_\delta G)\overline{\otimes}L^\infty(G),
\end{aligned}$$

διότι $\beta_G(f) \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ και $\delta(x) \in Y\overline{\ltimes}_\delta G$. Επομένως το $(Y\overline{\ltimes}_\delta G, \widehat{\delta})$ είναι ένα $L^\infty(G)$-subcomodule του $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta})$. □

Πρόταση 3.2.6 (Μοναδικότητα σταυρωτού γινομένου)**.** *Έστω (Y, δ) και (Z, ε) δύο $L(G)$-comodules και έστω ότι οι Y και Z είναι w^*-κλειστοί υπόχωροι των $B(H)$ και $B(K)$ αντίστοιχα. Έστω $\Phi\colon Y \to Z$ ένας $L(G)$-comodule ισομορφισμός.*

Τότε η απεικόνιση $\Psi := \Phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}\colon Y\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to Z\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ επί του $(Z\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\varepsilon})$, ο οποίος απεικονίζει το $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ επί του $Z \ltimes_\varepsilon^{\mathcal{F}} G$ και το $Y\overline{\ltimes}_\delta G$ επί του $Z\overline{\ltimes}_\varepsilon G$. Επίσης, ο $\Psi|_{Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G}$ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G, \widehat{\delta})$ επί του $(Z \ltimes_\varepsilon^{\mathcal{F}} G, \widehat{\varepsilon})$ και ο $\Psi|_{Y\overline{\ltimes}_\delta G}$ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Z\overline{\ltimes}_\delta G, \widehat{\delta})$ επί του $(Z\overline{\ltimes}_\varepsilon G, \widehat{\varepsilon})$.

Ακόμη, ο Ψ είναι μορφισμός $L^\infty(G)$-διπρότυπων, δηλαδή

$$\Psi((1_H \otimes f)x(1_H \otimes g)) = (1_K \otimes f)\Psi(x)(1_K \otimes g),$$

για κάθε $f, g \in L^\infty(G)$ και $x \in Y\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

Απόδειξη. Αρχικά, επειδή ο Φ είναι comodule μορφισμός, έχουμε $\varepsilon \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$ και άρα:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon} \circ \Psi &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ ((\varepsilon \circ \Phi) \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ [((\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta) \otimes \mathrm{id}] \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\Phi \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \\
&= (\Psi \otimes \mathrm{id}) \circ \widetilde{\delta}
\end{aligned}$$

και συνεπώς ο Ψ είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ επί του $(Z\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\varepsilon})$. Αυτό σημαίνει ότι ο Ψ απεικονίζει τον χώρο των σταθερών σημείων $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ της $\widetilde{\delta}$ επί του χώρου των σταθερών σημείων $Z \ltimes_\varepsilon^{\mathcal{F}} G$ της $\widetilde{\varepsilon}$.

Εξ άλλου, η σχέση $\varepsilon \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$ συνεπάγεται ότι

$$\Psi(\delta(Y)) = (\Phi \otimes \mathrm{id})(\delta(Y)) = \varepsilon(\Phi(Y)) = \varepsilon(Z)$$

και εφ' όσον ο Ψ είναι ισομορφισμός $L^\infty(G)$-διπρότυπων (βλ. Παρατήρηση 3.1.6) έπεται ότι ο Ψ απεικονίζει το $Y\overline{\ltimes}_\delta G$ επί του $Z\overline{\ltimes}_\varepsilon G$.

Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} \circ \Psi &= (\mathrm{id}_Z \otimes \beta_G) \circ (\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}) \\
&= (\Phi \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G) \\
&= (\Psi \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ \widehat{\delta}.
\end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι μέχρι τώρα όλα δείχνουν να λειτουργούν κατά τρόπο εντελώς ανάλογο προς την περίπτωση των $L^\infty(G)$-comodules. Ωστόσο, στο εξής οι διαφορές μεταξύ των $L^\infty(G)$-comodules και των $L(G)$-comodules θα αρχίσουν να γίνονται φανερές.

Πρόταση 3.2.7. *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) έχουμε:*

$$\delta(Y) \subseteq \left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}} = \mathrm{Sat}(Y, \delta) = (Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}}.$$

Απόδειξη. Αφού η $\delta(Y) \subseteq \mathrm{Sat}(Y,\delta)$ είναι προφανής (βλ. Ορισμό 2.2.4) αρκεί να δείξουμε τις ισότητες $\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}} = \mathrm{Sat}(Y,\delta) = (Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}}$. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H.

Αρχικά δείχνουμε ότιτ $\mathrm{Sat}(Y,\delta) = (Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}}$. Πράγματι, για κάθε $x \in Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$, έχουμε:

$$x \in (Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}} \iff \widetilde{\delta}(x) = x \otimes 1$$

$$\iff (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_G) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(x) = x \otimes 1$$

$$\iff (\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x) = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma)\left((1_H \otimes W_G^*)(x \otimes 1)(1_H \otimes W_G)\right)$$

$$\iff (\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x) = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)(x)$$

$$\iff (\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x) = (\mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)(x)$$

$$\iff x \in \mathrm{Sat}(Y,\delta),$$

όπου για την τέταρτη ισοδυναμία παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sigma \circ \delta_G = \delta_G$ αφού $\delta_G(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s$ για κάθε $s \in G$.

Μένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι $\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}} = (Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}}$. Πράγματι, αφού οι δράσεις $\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G$ και $\widetilde{\delta}$ μετατίθενται (βλ. Πρόταση 3.2.2) και $\widehat{\delta} = (\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G)|_{Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G}$ έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}} &= \left(\left(Y \overline{\otimes} B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta}}\right)^{\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G} \\
&= \left(\left(Y \overline{\otimes} B(L^2(G))\right)^{\mathrm{id}_Y \otimes \beta_G}\right)^{\widetilde{\delta}} \\
&= \left(Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} \left(B(L^2(G))\right)^{\beta_G}\right)^{\widetilde{\delta}} \\
&= (Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G))^{\widetilde{\delta}}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $B(L^2(G))^{\beta_G} = L(G)$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.8. Συμβολίζουμε με Λ τον τελεστή $\Lambda \in B(L^2(G))$ με

$$\Lambda\xi(s) = \Delta_G(s)^{-1/2}\xi(s^{-1}), \qquad s \in G,\ \xi \in L^2(G).$$

Μπορεί να δει κανείς ότι ο Λ είναι προφανώς αυτοσυζυγής και unitary, ούτως ώστε $\Lambda R(G)\Lambda = L(G)$ και για την ακρίβεια, έχουμε:

$$\Lambda\rho_t\Lambda = \lambda_t, \qquad t \in G.$$

Πράγματι, για κάθε $s, t \in G$ και $\xi \in L^2(G)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\Lambda\rho_t\Lambda\xi)(s) &= \Delta_G(s)^{-1/2}(\rho_t\Lambda\xi)(s^{-1}) \\ &= \Delta_G(s)^{-1/2}\Delta_G(t)^{1/2}(\Lambda\xi)(s^{-1}t) \\ &= \Delta_G(s^{-1}t)^{1/2}\Delta_G(s^{-1}t)^{-1/2}\xi(t^{-1}s) = \lambda_t\xi(s).\end{aligned}$$

Επίσης, θέτουμε

$$W_\Lambda := (1 \otimes \Lambda)W_G,$$

δηλαδή

$$W_\Lambda\xi(s,t) = \Delta_G(t)^{-1/2}\xi(s, st^{-1}) \qquad s, t \in G,\ \xi \in L^2(G \times G).$$

Παρατηρούμε ότι $W_\Lambda \in L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$, επειδή $W_G \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G)$ και ότι ο W_Λ ικανοποιεί

$$U_G W_\Lambda S = W_G,$$

όπου $S\xi(s,t) = \xi(t,s)$ ο τελεστής flip στον $L^2(G \times G)$.

Πράγματι, για $\xi \in L^2(G \times G)$, έχουμε

$$\begin{aligned}(U_G W_\Lambda S\xi)(s,t) &= \Delta_G(t)^{1/2}(W_\Lambda S\xi)(st, t) \\ &= \Delta_G(t)^{1/2}\Delta_G(t)^{-1/2}(S\xi)(st, stt^{-1}) \\ &= S\xi(st, t) = \xi(s, st) = W_G\xi(s,t).\end{aligned}$$

Πρόταση 3.2.9. *Εστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule και ας υποθέσουμε ότι ο Y είναι ένας w^*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H. Τότε, ισχύει:*

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = \overline{\operatorname{span}}^{w^*}\left\{(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} L^\infty(G))\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}}\right\}.$$

Απόδειξη. Αρχικά, θέτουμε $K := H \otimes L^2(G)$ και $X := Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$. Τότε, το $(X, \widehat{\delta})$ είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του $(B(K), \alpha)$, όπου $\alpha := \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \beta_G \colon B(K) \to B(K)\overline{\otimes}L^\infty(G)$.

Θεωρούμε τις $L^\infty(G)$-δράσεις

$$\widetilde{\alpha},\ \bar{\alpha} \colon B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L^\infty(G)$$

που ορίζονται ως εξής

$$\widetilde{\alpha} = (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$$

και

$$\bar{\alpha} = (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}).$$

Θυμηθείτε τον unitary W_Λ με $W_\Lambda\xi(s,t) = \Delta_G(t)^{-1/2}\xi(s, st^{-1})$ και έστω

$$W := 1_H \otimes W_\Lambda.$$

Αφού $W_\Lambda \in L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$, έπεται ότι

$$W \in \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G)) \subseteq B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)).$$

Ισχυρισμός: Ο w*-συνεχής *-αυτομορφισμός

$$\mathrm{Ad}W\colon B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

είναι ένας $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\alpha})$ επί του $(B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)),\bar{\alpha})$, δηλαδή:

$$\bar{\alpha}\circ \mathrm{Ad}W = (\mathrm{Ad}W\otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ\widetilde{\alpha}. \tag{3.7}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού: Για να δείξουμε την (3.7) αποδεικνύουμε πρώτα την ακόλουθη

$$\bar{\alpha}(W) = (W\otimes 1_{L^2(G)})(1_K\otimes U_G^*). \tag{3.8}$$

Έστω $S\in B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$ ο τελεστής flip, δηλαδή $S(\xi\otimes\eta)=\eta\otimes\xi$ και συνεπώς $\mathrm{Ad}S=\sigma$. Για κάθε $a\in B(H)$ και $b,c\in B(L^2(G))$ έχουμε:

$$\bar{\alpha}(a\otimes b\otimes c) = (\mathrm{id}_{B(K)}\otimes\sigma)(\alpha(a\otimes b)\otimes c)$$

$$= (\mathrm{id}_{B(K)}\otimes\sigma)(a\otimes\beta_G(b)\otimes c) = (\mathrm{id}_{B(K)}\otimes\sigma)(a\otimes(U_G^*(b\otimes 1)U_G)\otimes c)$$

$$= (1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(a\otimes b\otimes 1\otimes c)(1\otimes U_G\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S) =$$

$$(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(a\otimes b\otimes c\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)$$

επομένως παίρνουμε

$$\bar{\alpha}(W) = (1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(W\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)$$

$$= (1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G^*\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes W_\Lambda\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)(1\otimes U_G\otimes 1)(1\otimes 1\otimes S)$$

και άρα η (3.8) ισοδυναμεί με την ακόλουθη

$$(1\otimes S)(U_G^*\otimes 1)(1\otimes S)(W_\Lambda\otimes 1)(1\otimes S)(U_G\otimes 1)(1\otimes S) = (W_\Lambda\otimes 1)(1\otimes U_G^*),$$

η οποία μπορεί να επαληθευθεί εύκολα με ένα υπολογισμό. Επομένως, η (3.8) έχει αποδειχθεί.

Τώρα, λοιπόν, η (3.7) έπεται από την (3.8) εφ' όσον, για κάθε $T\in B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G))$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha}\circ\mathrm{Ad}W)(T) &= \bar{\alpha}(W)\bar{\alpha}(T)\bar{\alpha}(W)^* \\ &= (W\otimes 1)(1\otimes U_G^*)\bar{\alpha}(T)(1\otimes U_G)(W^*\otimes 1) \\ &= (\mathrm{Ad}W\otimes\mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ(\mathrm{id}_{B(K)}\otimes\mathrm{Ad}U_G^*)\circ\bar{\alpha}(T) \\ &= (\mathrm{Ad}W\otimes\mathrm{id}_{L^\infty(G)})\circ\widetilde{\alpha}(T).\end{aligned}$$

Συνεπώς ο **Ισχυρισμός** έχει αποδειχθεί.

Από το Πόρισμα 2.3.5, το (X,α) είναι non-degenerate,δηλαδή:

$$X\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}B(L^2(G)))\alpha(X)\}$$

και επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} X\overline{\otimes}B(L^2(G)) &\subseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L(G))\alpha(X)\} \\ &\subseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\}, \end{aligned}$$

αφού $B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\}$ και $(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L(G))\alpha(X) \subseteq X\overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Καθώς $W \in \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G))$ και το X είναι $\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)$-πρότυπο, έπεται ότι ο $\mathrm{Ad}W$ απεικονίζει το $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ επί του εαυτού του και άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} X\overline{\otimes}B(L^2(G)) &= W(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))W^* \\ &\subseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{W(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))W^*W(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)W^*\}. \end{aligned}$$

Επίσης, το $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του $(B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\alpha})$, αλλά και του $(B(K)\overline{\otimes}B(L^2(G)), \bar{\alpha})$ και άρα, όπως έπεται από την (3.7) και τον **Ισχυρισμό**, ο περιορισμός του $\mathrm{Ad}W$ στο $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\alpha})$ επί του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \bar{\alpha})$. Επομένως, ο $\mathrm{Ad}W$ απεικονίζει τον χώρο των σταθερών σημείων $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = (X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}$ επί του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\bar{\alpha}} = X^\alpha\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

Από την άλλη μεριά, έχουμε

$$W(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))W^* \subseteq \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G)),$$

εφ' όσον $W \in \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))$. Συνεπώς, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} X\overline{\otimes}B(L^2(G)) &\subseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G)))(X^\alpha\overline{\otimes}B(L^2(G)))\} \\ &\subseteq \left(\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))X^\alpha\}\right)\overline{\otimes}B(L^2(G)). \end{aligned}$$

Καθώς ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής, προκύπτει ότι

$$X\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \left(\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))X^\alpha\}\right)\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

και άρα $X = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))X^\alpha\}$, δηλαδή:

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\left\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)^{\widehat{\delta}}\right\}.$$

□

Τώρα, λοιπόν, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.10. *Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ) ισχύει:*

$$Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G = Y\overline{\ltimes}_\delta G.$$

Απόδειξη. Αφού $Y\overline{\ltimes}_\delta G \subseteq Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ αρκεί να δείξουμε ότι $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G \subseteq Y\overline{\ltimes}_\delta G$. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και θεωρούμε την εξής W*-$L(G)$-δράση στον $B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G))$:

$$\varepsilon := \mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G \colon B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}L(G)$$

δηλαδή

$$\varepsilon(x) = (1_H \otimes W_G^*)(x \otimes 1)(1_H \otimes W_G), \qquad x \in B(H)\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

Για κάθε $x \in \mathrm{Sat}(Y,\delta)$ και $f \in L^\infty(G)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon((1_H \otimes f)x) &= (\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G)((1_H \otimes f)x) \\ &= (1_H \otimes f \otimes 1_{L^2(G)})(\mathrm{id}_{B(H)} \otimes \delta_G)(x) \\ &= (1_H \otimes f \otimes 1_{L^2(G)})(\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x),\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό του $\mathrm{Sat}(Y,\delta)$.

Εφ' όσον $\mathrm{Sat}(Y,\delta) \subseteq Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$, έπεται ότι

$$(\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x) \in \delta(Y)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G) \subseteq (Y\overline{\ltimes}_\delta G)\,\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$$

και επομένως $(1_H \otimes f \otimes 1_{L^2(G)})(\delta \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(x) \in (Y\overline{\ltimes}_\delta G)\,\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$, επειδή το $(Y\overline{\ltimes}_\delta G)\,\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ είναι ένα $\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G)$-διπρότυπο αφού το $Y\overline{\ltimes}_\delta G$ είναι με την σειρά του ένα $\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)$-διπρότυπο.

Άρα, έχουμε δείξει ότι η ε απεικονίζει το $\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))\mathrm{Sat}(Y,\delta)\}$ στο τανυστικό γινόμενο Fubini $(Y\overline{\ltimes}_\delta G)\,\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ και έτσι η Πρόταση 3.2.9 και η Πρόταση 3.2.7 συνεπάγονται ότι

$$\varepsilon\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right) \subseteq (Y\overline{\ltimes}_\delta G)\,\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$$

δηλαδή

$$\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)\overline{\otimes}\mathbb{C}1 \subseteq (1_H \otimes W_G)\left((Y\overline{\ltimes}_\delta G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)\right)(1_H \otimes W_G^*).$$

Παρατηρούμε ότι $1_H \otimes W_G \in \mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G)$ και το $(Y\overline{\ltimes}_\delta G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ είναι $\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G)\overline{\otimes}L(G)$-διπρότυπο. Επομένως προκύπτει ότι

$$\left(Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G\right)\overline{\otimes}\mathbb{C}1 \subseteq (Y\overline{\ltimes}_\delta G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$$

και άρα $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G \subseteq Y\overline{\ltimes}_\delta G$. □

Το Θεώρημα 3.2.10 μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό μας:

Ορισμός 3.2.11. Για ένα $L(G)$-comodule (Y,δ), θα γράφουμε $Y \ltimes_\delta G$ αντί του $Y \ltimes_\delta^{\mathcal{F}} G$ ή του $Y\overline{\ltimes}_\delta G$ (αφού αυτά συμπίπτουν).

3.3 Θεωρία δυϊσμού και εφαρμογές

Το ακόλουθο θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά από τον Takesaki για αβελιανές ομάδες [51]. Η γενική μορφή του (δηλαδή για αυθαίρετες τοπικά συμπαγείς ομάδες) αποδείχθηκε αργότερα ανεξάρτητα στα [35], [37], [49] και [50].

Θεώρημα 3.3.1 (Δυϊσμός Takesaki)**.** *Έστω (M, α) ένα W^*-$L^\infty(G)$- comodule και (N, δ) ένα W^*-$L(G)$-comodule.*

Η απεικόνιση $(\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{Ad}V_G) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$ είναι ένας W^*-$L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός

$$(M \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\alpha}) \simeq \Big((M \rtimes_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G, \widehat{\widehat{\alpha}} \Big)$$

και η απεικόνιση $(\mathrm{id}_N \otimes \mathrm{Ad}W_\Lambda) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$ είναι ένας W^*-$L(G)$-comodule ισομορφισμός

$$(N \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta}) \simeq \left((N \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}} G, \widehat{\widehat{\delta}} \right).$$

Θυμόμαστε ότι ένα $L^\infty(G)$-comodule (X, α) είναι non-degenerate και saturated (από το Λήμμα 2.3.5). Χρησιμοποιώντας την non-degeneracy προκύπτει ο δυϊσμός Takesaki για το χωρικό σταυρωτό γινόμενο, δηλαδή

$$(X \overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G \simeq X \overline{\otimes} B(L^2(G)),$$

ενώ η saturation του (X, α) μας δίνει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το σταυρωτό γινόμενο Fubini, δηλαδή

$$\big(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G \big) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G \simeq X \overline{\otimes} B(L^2(G))$$

(βλ. Προτάσεις 3.3.2 και 3.3.5 παρακάτω).

Οι ίδιες ιδέες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να δειχθεί ότι ένα $L(G)$-comodule (Y, δ) είναι non-degenerate αν και μόνον αν

$$(Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G \simeq Y \overline{\otimes} B(L^2(G)),$$

ενώ το (Y, δ) είναι saturated αν και μόνον αν

$$(Y \ltimes_\delta G) \rtimes_{\widehat{\delta}}^{\mathcal{F}} G \simeq Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$$

(βλ. Προτάσεις 3.3.3 και 3.3.6).

Ως συνέπεια, προκύπτουν τα δύο από τα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Το μεν πρώτο (Θεώρημα 3.3.8) λέει ότι δοθέντος ενός $L^\infty(G)$-comodule (X, α) η ισότητα $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$ αληθεύει αν και μόνον αν το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι non-degenerate αν και μόνον αν το $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι saturated. Το δε δεύτερο (Θεώρημα 3.3.10) λέει ότι η τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την AP αν και μόνον αν η $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$ ισχύει για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X, α).

3.3.1 Δυϊσμός για χωρικά σταυρωτά γινόμενα

Εδώ θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 3.3.1 γενικεύεται απευθείας για τα διπλά χωρικά σταυρωτά γινόμενα των $L^\infty(G)$-comodules και των non-degenerate $L(G)$-comodules (η non-degeneracy είναι αναγκαία) χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην περίπτωση των σταυρωτών γινομένων αλγεβρών von Neumann. Συγκρίνατε, για παράδειγμα, με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 όπως παρουσιάζεται στο [38, Chapter I, Theorems 2.5, 2.7].

Πρόταση 3.3.2. *Έστω (X, α) ένα $L^\infty(G)$-comodule και*

$$\pi\colon X\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)),$$

η απεικόνιση $\pi := (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}V_G) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$. Τότε, η π είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \widetilde{\alpha})$ επί του $((X\overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_\delta G,\ \widehat{\delta})$, όπου $\delta = \widehat{\alpha} = (\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)|_{X\overline{\rtimes}_\alpha G}$. Επί πλέον, η π ικανοποιεί

$$\pi(X\overline{\rtimes}_\alpha G) = \delta(X\overline{\rtimes}_\alpha G).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και θέτουμε $K := H \otimes L^2(G)$. Αφού το (X, α) είναι non-degenerate (από το Λήμμα 2.3.5) και

$$B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\} = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L(G)L^\infty(G)\}$$

έπεται:

$$\begin{aligned} X\overline{\otimes}B(L^2(G)) &= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L(G))\alpha(X)(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L(G)) \\ &\qquad (\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))\} \\ &= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))(X\overline{\rtimes}_\alpha G)(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}L^\infty(G))\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Εξ άλλου, από τον ορισμό του σταυρωτού γινομένου, έχουμε:

$$(X\overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_\delta G = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))\delta(X\overline{\rtimes}_\alpha G)(\mathbb{C}1_K\overline{\otimes}L^\infty(G))\} \tag{3.10}$$

Καθώς η απεικόνιση π είναι προφανώς w*-συνεχής πλήρης ισομετρία, χάρη στις ισότητες (3.9) και (3.10), για να δείξουμε ότι η π είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός επί του $(X\overline{\rtimes}_\alpha G) \ltimes_\delta G$, αρκεί να επαληθεύσουμε τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\pi(X\overline{\rtimes}_\alpha G) = \delta(X\overline{\rtimes}_\alpha G), \tag{3.11}$$

$$\pi((1 \otimes f)y) = (1 \otimes 1 \otimes f)\pi(y), \qquad \text{για } f \in L^\infty(G) \text{ και } y \in X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \tag{3.12}$$

και

$$\widehat{\delta} \circ \pi = (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \widetilde{\alpha} \tag{3.13}$$

Για κάθε $x \in X$ και $s, t \in G$ έχουμε:

$$\pi((1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)(1 \otimes \lambda_t)) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}V_G)((\alpha \otimes \mathrm{id})((1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)(1 \otimes \lambda_t)))$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}V_G)((1 \otimes 1 \otimes \lambda_s)(\alpha \otimes \mathrm{id})(\alpha(x))(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t))$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}V_G)((1 \otimes 1 \otimes \lambda_s)(\mathrm{id} \otimes \alpha_G)(\alpha(x))(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t))$$

$$= (1 \otimes V_G)(1 \otimes 1 \otimes \lambda_s)(\mathrm{id} \otimes \alpha_G)(\alpha(x))(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)(1 \otimes V_G^*)$$

$$= (1 \otimes V_G)(1 \otimes 1 \otimes \lambda_s)(1 \otimes V_G^*)(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes V_G)(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)(1 \otimes V_G^*) =$$

$$(1 \otimes SW_G^* S)(1 \otimes 1 \otimes \lambda_s)(1 \otimes SW_G S)(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes SW_G^* S)(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)(1 \otimes SW_G S)$$

$$= (1 \otimes SW_G^*)(1 \otimes \lambda_s \otimes 1)(1 \otimes W_G S)(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes SW_G^*)(1 \otimes \lambda_t \otimes 1)(1 \otimes W_G S)$$

$$= (1 \otimes S)(1 \otimes \lambda_s \otimes \lambda_s)(1 \otimes S)(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes S)(1 \otimes \lambda_t \otimes \lambda_t)(1 \otimes S)$$

$$= (1 \otimes \lambda_s \otimes \lambda_s)(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes \lambda_t \otimes \lambda_t)$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \delta_G)((1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)(1 \otimes \lambda_t))$$

και άρα η ισότητα (3.11) έχει αποδειχθεί.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $f, g \in L^\infty(G)$ και $y \in X \overline{\otimes} B(L^2(G))$, έχουμε:

$$\pi((1 \otimes f)y(1 \otimes g)) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}V_G) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id})((1 \otimes f)y(1 \otimes g))$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}V_G)((1 \otimes 1 \otimes f)(\alpha \otimes \mathrm{id})(y)(1 \otimes 1 \otimes g))$$

$$= (1 \otimes V_G)(1 \otimes 1 \otimes f)(1 \otimes V_G^*)\pi(y)(1 \otimes V_G)(1 \otimes 1 \otimes g)(1 \otimes V_G^*)$$

$$= (1 \otimes 1 \otimes f)\pi(y)(1 \otimes 1 \otimes g),$$

διότι $V_G \in L(G) \overline{\otimes} L^\infty(G)$ και άρα μετατίθεται με τα $1 \otimes f$ και $1 \otimes g$. Επομένως έχουμε δείξει την (3.12).

Αφού το (X, α) είναι non-degenerate,έχουμε

$$X \overline{\otimes} B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} L^\infty(G))(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} L(G))\alpha(X)\}.$$

Επομένως, μένει να επαληθεύσουμε την (3.13) για τα στοιχεία της μορφής $y = (1 \otimes f)(1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)$, όπου $f \in L^\infty(G)$, $s \in G$ και $x \in X$. Πράγματι, έχουμε

$$\widetilde{\alpha}((1 \otimes f)(1 \otimes \lambda_s)\alpha(x)) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)\,[(\alpha \otimes \mathrm{id})((1 \otimes f\lambda_s)\alpha(x))]$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*) \circ (\mathrm{id} \otimes \sigma)\,[(1 \otimes 1 \otimes f\lambda_s)(\mathrm{id} \otimes \alpha_G)(\alpha(x))]$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*)\,[(1 \otimes f\lambda_s \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G)(\alpha(x) \otimes 1)]$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*)(1 \otimes f \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}U_G^*)(1 \otimes \lambda_s \otimes 1)(\alpha(x) \otimes 1)$$

$$= (1 \otimes \beta_G(f))(1 \otimes \lambda_s \otimes 1)(\alpha(x) \otimes 1)$$

και συνεπώς προκύπτει

$$\begin{aligned}(\pi\otimes\mathrm{id})\circ\widetilde{\alpha}((1\otimes f)(1\otimes\lambda_s)\alpha(x)) &= \\ = (\pi\otimes\mathrm{id})((1\otimes\beta_G(f))(1\otimes\lambda_s\otimes 1)(\alpha(x)\otimes 1)) \\ = (1\otimes 1\otimes\beta_G(f))\,(\pi((1\otimes\lambda_s)\alpha(x))\otimes 1) \\ = (1\otimes 1\otimes\beta_G(f))(\delta((1\otimes\lambda_s)\alpha(x))\otimes 1) \\ = (1\otimes 1\otimes\beta_G(f))\widehat{\delta}(\delta((1\otimes\lambda_s)\alpha(x))) \\ = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\beta_G)((1\otimes 1\otimes f)\delta((1\otimes\lambda_s)\alpha(x))) \\ = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\beta_G)((1\otimes 1\otimes f)\pi((1\otimes\lambda_s)\alpha(x))) \\ = \widehat{\delta}\circ\pi((1\otimes f)(1\otimes\lambda_s)\alpha(x)).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.3.3. *Έστω (Y,δ) ένα $L(G)$-comodule και*

$$\pi\colon Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\to Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)),$$

η απεικόνιση με $\pi := (\mathrm{id}_Y\otimes\mathrm{Ad}W_\Lambda)\circ(\delta\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))})$. Τότε, η π ικανοποιεί

$$\pi(Y\ltimes_\delta G)=\widehat{\delta}(Y\ltimes_\delta G)$$

και οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) *Το (Y,δ) είναι non-degenerate.*

(ii) *Η π είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\delta})$ επί του διπλού χωρικού σταυρωτού γινομένου $((Y\ltimes_\delta G)\overline{\rtimes}_\alpha G,\ \widehat{\alpha})$, όπου $\alpha=\widehat{\delta}=(\mathrm{id}_Y\otimes\beta_G)|_{Y\ltimes_\delta G}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H και θέτουμε $X := Y\ltimes_\delta G$.

Ισχυριζόμαστε ότι, για κάθε $s,t\in G$, $f,g\in L^\infty(G)$ και $y\in Y$, ισχύει:

$$\pi((1\otimes\rho_t f)\delta(y)(1\otimes g\rho_s)) = (1\otimes 1\otimes\lambda_t)\alpha((1\otimes f)\delta(y)(1\otimes g))(1\otimes 1\otimes\lambda_s). \tag{3.14}$$

Για να δείξουμε την (3.14), παρατηρούμε πρώτα τα εξής:

$$\begin{aligned}W_\Lambda(1\otimes\rho_t f)W_\Lambda^* &= W_\Lambda(1\otimes\rho_t)W_\Lambda^*W_\Lambda(1\otimes f)W_\Lambda^* \\ &= (1\otimes\Lambda)W_G(1\otimes\rho_t)W_G^*(1\otimes\Lambda)W_\Lambda S(f\otimes 1)SW_\Lambda^* \\ &= (1\otimes\Lambda)(1\otimes\rho_t)W_GW_G^*(1\otimes\Lambda)W_\Lambda S\delta_G(f)SW_\Lambda^* \\ &= (1\otimes\Lambda)(1\otimes\rho_t)(1\otimes\Lambda)W_\Lambda SW_G^*(f\otimes 1)W_GSW_\Lambda^* \\ &= (1\otimes\lambda_t)U_G^*(f\otimes 1)U_G \\ &= (1\otimes\lambda_t)\beta_G(f)\end{aligned}$$

και παρόμοια $W_\Lambda(1\otimes g\rho_s)W_\Lambda^* = \beta_G(g)(1\otimes\lambda_s)$. Επίσης, έχουμε

$$\alpha(\delta(y)) = (\mathrm{id}\otimes\beta_G)(\delta(y)) = \delta(y)\otimes 1.$$

Επομένως παίρνουμε:

$$\pi((1\otimes\rho_t f)\delta(y)(1\otimes g\rho_s)) =$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(\delta\otimes\mathrm{id})((1\otimes\rho_t f)\delta(y)(1\otimes g\rho_s))(1\otimes W_\Lambda *)$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes\rho_t f)(\delta\otimes\mathrm{id})(\delta(y))(1\otimes g\rho_s)(1\otimes W_\Lambda^*)$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes\rho_t f)(\mathrm{id}\otimes\delta_G)(\delta(y))(1\otimes 1\otimes g\rho_s)(1\otimes W_\Lambda^*)$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes\rho_t f)(1\otimes W_G^*)(\delta(y)\otimes 1)(1\otimes W_G)(1\otimes 1\otimes g\rho_s)(1\otimes W_\Lambda^*)$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes\rho_t f)(1\otimes W_G^*)(1\otimes 1\otimes\Lambda)(\delta(y)\otimes 1)(1\otimes 1\otimes\Lambda)(1\otimes W_G)$$
$$(1\otimes 1\otimes g\rho_s)(1\otimes W_\Lambda^*)$$

$$= (1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes\rho_t f)(1\otimes W_\Lambda^*)(\delta(y)\otimes 1)(1\otimes W_\Lambda)(1\otimes 1\otimes g\rho_s)(1\otimes W_\Lambda^*)$$

$$= (1\otimes 1\otimes\lambda_t)\left[(\mathrm{id}\otimes\beta_G)((1\otimes f)\delta(y)(1\otimes g))\right](1\otimes 1\otimes\lambda_s)$$

$$= (1\otimes 1\otimes\lambda_t)\alpha((1\otimes f)\delta(y)(1\otimes g))(1\otimes 1\otimes\lambda_s)$$

και έτσι η (3.14) έχει αποδειχθεί. Η ισότητα $\pi(X)=\alpha(X)$ έπεται εύκολα από την (3.14).

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι το (Y,δ) είναι non-degenerate. Αφού

$$B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{R(G)L^\infty(G)\} = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{L^\infty(G)R(G)\},$$

έπεται ότι

$$Y\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\left\{\left(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\delta(Y)\left(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\right\}$$

$$= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\left\{(1\otimes\rho_t f)\delta(y)(1\otimes g\rho_s)) : s,t\in G,\ f,g\in L^\infty(G),\ y\in Y\right\}. \tag{3.15}$$

Προφανώς, η ισότητα $\pi(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))) = X\overline{\rtimes}_\alpha G$ προκύπτει από τις (3.14) και (3.15). Μένει να δειχθεί ότι η π είναι $L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\delta})$ επί του $(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\ \widehat{\alpha})$. Εφ' όσον η π είναι πλήρως ισομετρική και επί του $X\overline{\rtimes}_\alpha G$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\widehat{\alpha}\circ\pi(x) = (\pi\otimes\mathrm{id})\circ\widetilde{\delta}(x), \quad \forall x\in Y\overline{\otimes}B(L^2(G)). \tag{3.16}$$

Επειδή το (Y,δ) είναι non-degenerate, έχουμε

$$Y\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\left\{\left(\mathbb{C}1_H\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\delta(Y)\right\}$$

και άρα αρκεί να επαληθεύσουμε την (3.16) για $x = (1 \otimes \rho_t f)\delta(y)$, όπου $t \in G$, $f \in L^\infty(G)$ και $y \in Y$. Πράγματι, αυτό έπεται άμεσα από τους ακόλουθους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha} \circ \pi((1 \otimes \rho_t f)\delta(y)) &= \widehat{\alpha}((1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)\alpha((1 \otimes f)\delta(y))) \\
&= [(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)\alpha((1 \otimes f)\delta(y))] \otimes \lambda_t \\
&= [(1 \otimes 1 \otimes \lambda_t)\pi((1 \otimes f)\delta(y))] \otimes \lambda_t \\
&= \pi((1 \otimes \rho_t f)\delta(y)) \otimes \lambda_t \\
&= (\pi \otimes \mathrm{id})([(1 \otimes \rho_t f)\delta(y)] \otimes \lambda_t)
\end{aligned}$$

και από την άλλη μεριά έχουμε

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}((1 \otimes \rho_t f)\delta(y)) =& (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G \circ \sigma) \circ (\delta \otimes \mathrm{id})((1 \otimes \rho_t f)\delta(y)) \\
=& (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G \circ \sigma)((1 \otimes 1 \otimes \rho_t f)(\mathrm{id} \otimes \delta_G)(\delta(y))) \\
=& (\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}W_G)(1 \otimes \rho_t f \otimes 1)\,[\delta(y) \otimes 1] \\
=& (1 \otimes W_G(\rho_t \otimes 1)W_G^*)(1 \otimes W_G(f \otimes 1)W_G^*)(\delta(y) \otimes 1) \\
=& (1 \otimes \rho_t \otimes \lambda_t)(1 \otimes f \otimes 1)(\delta(y) \otimes 1) \\
=& [(1 \otimes \rho_t f)\delta(y)] \otimes \lambda_t.
\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Θυμηθείτε ότι το $(X \overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι non-degenerate για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X, α) από το Πόρισμα 3.1.9. Άρα, το $((Y \overline{\ltimes}_\delta G)\overline{\rtimes}_\alpha G,\ \widehat{\alpha})$ είναι πάντα non-degenerate και αφού είναι ισόμορφο με το $(Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ (εξ υποθέσεως), έπεται ότι και το $(Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ είναι non-degenerate. Δηλαδή:

$$Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) \overline{\otimes} B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{N \widetilde{\delta}(Y \overline{\otimes} B(L^2(G))) N\},$$

όπου $N := \mathbb{C}1_H \overline{\otimes} \mathbb{C}1_{L^2(G)} \overline{\otimes} B(L^2(G))$. Θέτουμε επίσης $M := \mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G))$ $\overline{\otimes} B(L^2(G))$. Συνεπώς, παίρνουμε:

$$\begin{gathered}
Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) \overline{\otimes} B(L^2(G)) = \\
= \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{N(1_H \otimes W_G S)(\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})(Y \overline{\otimes} B(L^2(G)))(1_H \otimes S W_G^*)N\} \\
\subseteq \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{M(\delta(Y) \overline{\otimes} B(L^2(G)))M\} \\
\subseteq \left(\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G)))\delta(Y)(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G)))\}\right) \overline{\otimes} B(L^2(G))
\end{gathered}$$

και άρα

$$Y \overline{\otimes} B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G)))\delta(Y)(\mathbb{C}1_H \overline{\otimes} B(L^2(G)))\},$$

το οποίο σημαίνει ότι το (Y, δ) είναι non-degenerate (από το Πόρισμα 2.3.8). $\square$

3.3.2 Δυϊσμός για σταυρωτά γινόμενα Fubini

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα σταυρωτά γινόμενα Fubini θεωρήθηκαν αρχικά από τον Hamana [19, Definition 5.4] για comodule δράσεις του $L^\infty(G)$ σε πλήρεις χώρους τελεστών (όχι απαραίτητα δυϊκούς χώρους τελεστών). Δηλαδή, με την ορολογία του Hamana ένα $L^\infty(G)$-comodule είναι ένας norm-κλειστός υπόχωρος του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H με μια πλήρη ισομετρία $\alpha\colon X \to X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L^\infty(G)$ που ικανοποιεί

$$(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha = (\mathrm{id} \otimes \alpha_G) \circ \alpha.$$

Επειδή τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι w*-κλειστός, τα τανυστικά γινόμενα Fubini και απεικονίσεις τανυστικών γινομένων εξακολουθούν να συμπεριφέρονται καλά σε αυτό το πλαίσιο (βλ. [19, Section 1]).

Ακόμη, ο Hamana έδειξε (βλ. [19, Proposition 5.7]) ότι, για ένα ζεύγος (X, α) όπως παραπάνω, το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \ltimes_{\hat{\alpha}}^{\mathcal{F}} G$ είναι κανονικά πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με το $X\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} B(L^2(G))$ αν και μόνον αν το X είναι G-πλήρες (βλ. [19, Definition 5.5]).

Από την άλλη, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ένα $L^\infty(G)$-comodule είναι G-πλήρε με την έννοια του Hamana ([19, Definition 5.5]) αν και μόνον αν το X είναι saturated. Στο πλαίσιο που εξετάζουμε εμείς, όλα τα $L^\infty(G)$-comodules είναι εξ υποθέσεως δυϊκοί χώροι τελεστών με w*-συνεχείς comodule δράσεις και άρα είναι saturated (δηλ. G-πλήρη) από το Λήμμα 2.3.5. Επομένως, η Πρόταση 3.3.5 παρακάτω είναι άμεση συνέπεια της [19, Proposition 5.7] και του Λήμματος 2.3.5. Ωστόσο, έχουμε συμπεριλάβει μια πλήρη απόδειξη της Πρότασης 3.3.5 χάριν πληρότητας.

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ίδια ιδέα και στην περίπτωση των $L(G)$-comodules, παίρνουμε την Πρόταση 3.3.6.

Παρατήρηση 3.3.4. Έστω (M, Δ) μια άλγεβρα Hopf-von Neumann που δρα σε ένα χώρο Hilbert K. Αν Z_0 είναι ένα M-subcomodule ενός M-ςομοδυλε (Z, β), τότε έχουμε προφανώς

$$\mathrm{Sat}(Z_0, \beta|_{Z_0}) = (Z_0\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M) \cap \mathrm{Sat}(Z, \beta) = (Z_0\overline{\otimes} B(K)) \cap \mathrm{Sat}(Z, \beta).$$

Η πρώτη ισότητα έπεται από τον Ορισμό 2.2.4 και το γεγονός ότι το Z_0 είναι ένα subcomodule του Z, ενώ η δε δεύτερη ισχύει διότι $\mathrm{Sat}(Z, \beta) \subseteq Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ και $Z_0\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M = (Z_0\overline{\otimes} B(K)) \cap (Z\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M)$.

Αν, επί πλέον, το Z είναι saturated, τότε το Z_0 θα είναι saturated αν και μόνο αν $\beta(Z_0) = (Z_0\overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M) \cap \beta(Z)$ ή, ισοδύναμα, $\beta(Z_0) = (Z_0\overline{\otimes} B(K)) \cap \beta(Z)$.

Συνεπώς, για κάθε $L^\infty(G)$-subcomodule X_0 ενός $L^\infty(G)$-comodule (X, α), έχουμε

$$\alpha(X_0) = (X_0\overline{\otimes} B(L^2(G))) \cap \alpha(X),$$

διότι όλα τα $L^\infty(G)$-comodules είναι saturated (βλ. Λήμμα 2.3.5).

Από την άλλη μεριά, ένα $L(G)$-comodule ενδέχεται να μην είναι saturated, π.χ. αν η G δεν έχει την AP (βλ. Πρόταση 2.3.14). Ωστόσο, είναι γνωστό ότι κάθε W*-$L(G)$-comodule είναι saturated (βλ. π.χ. [50, Proposition II.1.1]). Επομένως, αν Y είναι ένα $L(G)$-subcomodule ενός W*-$L(G)$-comodule (N,δ), τότε το Y θα είναι saturated αν και μόνον αν

$$\delta(Y) = (Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)) \cap \delta(N)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\delta(Y) = (Y\overline{\otimes}B(L^2(G))) \cap \delta(N).$$

Πρόταση 3.3.5 (Hamana [19]). *Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule και*

$$\pi\colon X\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

η απεικόνιση $\pi := (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{Ad}V_G)\circ(\alpha\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$. Τότε, η π είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\alpha})$ επί του $((X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\ltimes_\delta G,\ \widehat{\delta})$, όπου $\delta = \widehat{\alpha} = (\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)|_{X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}}G}$. Επί πλέον, η π ικανοποιεί

$$\pi\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right) = \delta\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right).$$

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.1.3 και την Παρατήρηση 2.2.6 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το (X,α) είναι $L^\infty(G)$-subcomodule κάποιου W*-$L^\infty(G)$-comodule M, δηλ. η M είναι μια άλγεβρα von Neumann ούτως ώστε ο X να είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος της M και η α επεκτείνεται σε μια W*-$L^\infty(G)$-δράση στην M, την οποία συμβολίζουμε επίσης με α χάριν απλότητας. Επίσης, η απεικόνιση π επεκτείνεται στην $(\mathrm{id}_M\otimes\mathrm{Ad}V_G)\circ(\alpha\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))})$, η οποία δίνει τον $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμό ανάμεσα στα $\left((M\rtimes_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G,\widehat{\widehat{\alpha}}\right)$ και $(M\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\alpha})$. Έπεται ότι η π είναι $L^\infty(G)$-comodule μονομορφισμός από το $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\alpha})$ στο $(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)),\ \mathrm{id}_X\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\beta_G)$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η π απεικονίζει το $X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ επί του $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\ltimes_\delta G$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}
X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G &= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}\\
&= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left(M\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}\\
&= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap(M\rtimes_\alpha G)
\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)\overline{\otimes}B(L^2(G)) &= \left[\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap(M\rtimes_\alpha G)\right]\overline{\otimes}B(L^2(G))\\
&= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left[(M\rtimes_\alpha G)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right].
\end{aligned}$$

Από την ανωτέρω ισότητα και εφ' όσον $\pi(M\overline{\otimes}B(L^2(G))) = (M \rtimes_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G$ (από το Θεώρημα 3.3.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \ltimes_\delta G &= \left((X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta}} \\ &= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \left[(M \rtimes_\alpha G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))\right]^{\widetilde{(\widehat{\alpha})}} \\ &= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \left[(M \rtimes_\alpha G) \ltimes_{\widehat{\alpha}} G\right] \\ &= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \pi\left(M\overline{\otimes}B(L^2(G))\right).\end{aligned}$$

Επομένως, η ισότητα

$$\pi\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = (X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \ltimes_\delta G$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\pi\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \pi\left(M\overline{\otimes}B(L^2(G))\right). \tag{3.17}$$

Αφού έχουμε

$$\pi\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = (1 \otimes V_G)(\alpha(X)\overline{\otimes}B(L^2(G)))(1 \otimes V_G^*)$$

και

$$\pi\left(M\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = (1 \otimes V_G)(\alpha(M)\overline{\otimes}B(L^2(G)))(1 \otimes V_G^*),$$

η ισότητα (3.17) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}&\alpha(X)\overline{\otimes}B(L^2(G)) = \\ &= \left[X\overline{\otimes}V_G^*\left(B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)V_G\right] \cap \left(\alpha(X)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\ &= \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \left(\alpha(M)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\ &= \left[\left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \alpha(M)\right]\overline{\otimes}B(L^2(G)),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\alpha(X) = \left(X\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \alpha(M),$$

η οποία αληθεύει από την Παρατήρηση 3.3.4.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι αφού η π είναι comodule ισομορφισμός, τότε απεικονίζει τον χώρο των σταθερών σημείων $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = (X\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha}}$ επί του χώρου των σταθερών σημείων $((X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \ltimes_\delta G)^{\widehat{\delta}} = \mathrm{Sat}(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha}) = \widehat{\alpha}(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)$ (βλ. Πρόταση 3.2.7 και Πόρισμα 3.1.9). □

Πρόταση 3.3.6. *Έστω (Y, δ) ένα $L(G)$-comodule και*

$$\pi\colon Y\overline{\otimes}B(L^2(G)) \to Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

η απεικόνιση $\pi := (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad}W_\Lambda) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Το* (Y,δ) *είναι saturated.*

(ii) *Η* π *είναι* $L(G)$*-comodule ισομορφισμός από το* $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\delta})$ *επί του διπλού σταυρωτού γινομένου Fubini* $((Y\ltimes_\delta G)\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\ \widehat{\alpha})$*, όπου* $\alpha=\widehat{\delta}=(\mathrm{id}_Y\otimes\beta_G)|_{Y\ltimes_\delta G}$.

Απόδειξη. Από τις Παρατηρήσεις 2.1.3 και 2.2.6 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το (Y,δ) είναι $L(G)$-subcomodule κάποιου W*-$L(G)$-comodule N, δηλαδή η N είναι μια άλγεβρα von Neumann ούτως ώστε ο Y να είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος της N και η δ επεκτείνεται σε μια W*-$L(G)$-δράση στην N, την οποία συμβολίζουμε επίσης με δ χάριν απλότητας. Επίσης, η π επεκτείνεται στην απεικόνιση $(\mathrm{id}_N\otimes\mathrm{Ad}W_\Lambda)\circ(\delta\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))})$ η οποία δίνει τον $L(G)$-comodule ισομορφισμό ανάμεσα στα $\left((N\ltimes_\delta G)\rtimes_{\widehat{\delta}} G,\widehat{\widehat{\delta}}\right)$ και $(N\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\delta})$ (βλ. Θεώρημα 3.3.1). Έπεται ότι η π είναι $L(G)$-comodule μονομορφισμός από το $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G)),\widetilde{\delta})$ στο $(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G)),\ \mathrm{id}_Y\otimes\mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes\delta_G)$.

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η π απεικονίζει το $Y\overline{\otimes}B(L^2(G))$ επί του $(Y\ltimes_\delta G)\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ αν και μόνον αν το (Y,δ) είναι saturated.

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}
Y\ltimes_\delta G &= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta}}\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left(N\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta}}\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap(N\ltimes_\delta G)
\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
&(Y\ltimes_\delta G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G)) =\\
&= \left[\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap(N\ltimes_\delta G)\right]\overline{\otimes}B(L^2(G))\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left[(N\ltimes_\delta G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))\right].
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ισότητα και το Θεώρημα 3.3.1 έπεται:

$$\begin{aligned}
(Y\ltimes_\delta G)\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G &= \left((Y\ltimes_\delta G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\alpha}}\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left[(N\ltimes_\delta G)\,\overline{\otimes}B(L^2(G))\right]^{\widetilde{(\widehat{\delta})}}\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\left[(N\ltimes_\delta G)\rtimes_{\widehat{\delta}} G\right]\\
&= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)\cap\pi\left(N\overline{\otimes}B(L^2(G))\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, η ισότητα

$$\pi\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)=(Y\ltimes_\delta G)\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\pi\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \pi\left(N\overline{\otimes}B(L^2(G))\right). \tag{3.18}$$

Εφ' όσον

$$\pi\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = (1\otimes W_\Lambda)(\delta(Y)\overline{\otimes}B(L^2(G)))(1\otimes W_\Lambda^*)$$

και

$$\pi\left(N\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) = (1\otimes W_\Lambda)(\delta(N)\overline{\otimes}B(L^2(G)))(1\otimes W_\Lambda^*),$$

η ισότητα (3.18) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}\delta(Y)\overline{\otimes}B(L^2(G)) &= \\ &= \left[Y\overline{\otimes}W_\Lambda^*\left(B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)W_\Lambda\right] \cap \left(\delta(N)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\ &= \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \left(\delta(N)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\ &= \left[\left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \delta(N)\right]\overline{\otimes}B(L^2(G)),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\delta(Y) = \left(Y\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \cap \delta(N),$$

η οποία, από την Παρατήρηση 3.3.4, είναι αληθής αν και μόνον αν το (Y,δ) είναι saturated. □

3.3.3 Εφαρμογές της θεωρίας δυϊσμού

Το επόμενο απλό πόρισμα ουσιαστικά μας λέει ότι, για ένα $L^\infty(G)$-comodule (X,α), το saturation space του χωρικού σταυρωτού γινομένου $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι ισόμορφο με το σταυρωτό γινόμενο Fubini $X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$.

Πόρισμα 3.3.7. *Για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X,α) έχουμε:*

(i) $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G = (X\overline{\rtimes}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G$.

(ii) $\mathrm{Sat}(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha}) = \mathrm{Sat}\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha}\right) = \widehat{\alpha}\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right)$.

(iii) $X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G = \{y\in X\overline{\otimes}B(L^2(G)):\ A(G)\cdot y\subseteq X\overline{\rtimes}_\alpha G\}$, *όπου* $u\cdot y = (\mathrm{id}_{X\overline{\otimes}B(L^2(G))}\otimes u)(\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)(y)$ *για* $u\in A(G)$ *και* $y\in X\overline{\otimes}B(L^2(G))$.

(iv) $X\overline{\rtimes}_\alpha G = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{A(G)\cdot(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\}$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός (i) είναι προφανής συνέπεια των Προτάσεων 3.3.2 και 3.3.5.

Για τον ισχυρισμό (ii), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Sat}(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha}) &= ((X\overline{\rtimes}_\alpha G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G)^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\\ &= \left((X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\ltimes_{\widehat{\alpha}} G\right)^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\\ &= \mathrm{Sat}(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha})\\ &= \widehat{\alpha}\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G\right),\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τρίτη ισότητα έπονται από την Πρόταση 3.2.7, η δεύτερη ισότητα έπεται από τον ισχυρισμό (i) και η τέταρτη ισότητα ισχύει επειδή το $\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha}\right)$ είναι ένα saturated $L(G)$-comodule από το Πόρισμα 3.1.9.

Για να αποδείξουμε την (iii), παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο $y\in X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ ικανοποιεί $u\cdot y\in X\overline{\rtimes}_\alpha G$ για κάθε $u\in A(G)$ αν και μόνον αν

$$(\mathrm{id}_{X\overline{\otimes}B(L^2(G))}\otimes u)((\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)(y))\in X\overline{\rtimes}_\alpha G$$

για κάθε $u\in A(G)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής

$$(\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)(y)\in((X\overline{\rtimes}_\alpha G)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G))\cap\widehat{\alpha}(X\overline{\otimes}B(L^2(G)))=\mathrm{Sat}(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha})=$$
$$=\widehat{\alpha}(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)=(\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G),$$

που με την σειρά του ισοδυναμεί με το ότι $y\in X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$, διότι η $\mathrm{id}_X\otimes\delta_G$ είναι ένα προς ένα. Άρα, η (iii) έχει αποδειχθεί.

Τέλος, από την (iii) έπεται ότι $A(G)\cdot(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\subseteq X\overline{\rtimes}_\alpha G$ και επομένως $\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{A(G)\cdot(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\}\subseteq X\overline{\rtimes}_\alpha G$. Εξ άλλου, αφού το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι non-degenerate $L(G)$-comodule (βλ. Πόρισμα 3.1.9), από την Πρόταση 2.2.3, παίρνουμε

$$X\overline{\rtimes}_\alpha G=\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{A(G)\cdot(X\overline{\rtimes}_\alpha G)\}\subseteq\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{A(G)\cdot(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\}$$

και συνεπώς η (iv) ισχύει. □

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω (X,α) ένα $L^\infty(G)$-comodule. Τότε, το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$ είναι το μεγαλύτερο non-degenerate $L(G)$-subcomodule του $(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha})$. Επί πλέον, το $X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$ είναι το μικρότερο saturated $L(G)$-subcomodule του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)),\mathrm{id}_X\otimes\delta_G)$ που περιέχει το $X\overline{\rtimes}_\alpha G$. Ειδικότερα, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) $X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G=X\overline{\rtimes}_\alpha G$

(β) *Το $\left(X\rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G,\widehat{\alpha}\right)$ είναι non-degenerate $L(G)$-comodule.*

(γ) *Το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G,\widehat{\alpha})$ είναι saturated $L(G)$-comodule.*

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότ το $(X\overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha})$ είναι non-degenerate και το $(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G, \widehat{\alpha})$ είναι saturated από το Πόρισμα 3.1.9.

Έστω Y ένα $L(G)$-subcomodule του $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), \mathrm{id}_X \otimes \delta_G)$.

Αν το Y είναι non-degenerate και $Y \subseteq X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G$, τότε από τα Πορίσματα 2.3.8 και 3.3.7 έχουμε

$$Y = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{A(G) \cdot Y\} \subseteq \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{A(G) \cdot (X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G)\} = X\overline{\rtimes}_\alpha G.$$

Από την άλλη μεριά, αν το Y είναι saturated και $X\overline{\rtimes}_\alpha G \subseteq Y$, τότε πάλι από το Πόρισμα 3.3.7 έπεται ότι

$$\widehat{\alpha}(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) = \mathrm{Sat}(X\overline{\rtimes}_\alpha G, \widehat{\alpha}) \subseteq \mathrm{Sat}(Y, \mathrm{id}_X \otimes \delta_G) = (\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)(Y)$$

δηλαδή $(\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)(X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G) \subseteq (\mathrm{id}_X \otimes \delta_G)(Y)$ και επομένως $X \rtimes_\alpha^{\mathcal{F}} G \subseteq Y$.

Συνεπώς ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος έχει αποδειχθεί και έτσι η ισοδυναμία μεταξύ των συνθηκών (α), (β) και (γ) είναι προφανής. □

Λήμμα 3.3.9. *(i) Για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ), το saturation space $(\mathrm{Sat}(Y, \delta), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)$ είναι saturated $L(G)$-comodule.*

(ii) Αν κάθε saturated $L(G)$-comodule είναι non-degenerate, τότε η G έχει την AP.

Απόδειξη. (i) Έστω ένα $L(G)$-comodule (Y, δ) και ας υποθέσουμε ότι ο Y είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $B(K)$ για κάποιο χώρο Hilbert K. Αφού $(Y, \delta) \simeq (\delta(Y), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.3), έπεται ότι

$$(\mathrm{Sat}(Y, \delta), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G) \simeq \big(\mathrm{Sat}\,(\delta(Y), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)\,, \mathrm{id}_{\delta(Y)} \otimes \delta_G\big)$$

(από την Παρατήρηση 2.2.6) και άρα (πάλι από την Παρατήρηση 2.2.6) αρκεί να δείξουμε ότι το $\big(\mathrm{Sat}\,(\delta(Y), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)\,, \mathrm{id}_{\delta(Y)} \otimes \delta_G\big)$ είναι saturated. Πράγματι, από την Παρατήρηση 3.3.4, έχουμε:

$$\mathrm{Sat}\,(\delta(Y), \mathrm{id}_Y \otimes \delta_G) = (\mathrm{id}_{B(K)} \otimes \delta_G)(B(K)\overline{\otimes}L(G)) \cap (\delta(Y)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)).$$

Παρατηρούμε, ότι το $(\mathrm{id}_{B(K)}\otimes\delta_G)(B(K)\overline{\otimes}L(G))$ είναι W*-$L(G)$-subcomodule του $(B(K)\overline{\otimes}L(G)\overline{\otimes}L(G), \mathrm{id}_{B(K)} \otimes \mathrm{id}_{L(G)} \otimes \delta_G)$, επομένως είναι saturated. Επίσης, εφ' όσον το $(L(G), \delta_G)$ είναι saturated (ως W*-$L(G)$-comodule), το $\delta(Y)\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ είναι saturated $L(G)$-subcomodule του $(B(K)\overline{\otimes}L(G)\overline{\otimes}L(G), \mathrm{id}_{B(K)\overline{\otimes}L(G)} \otimes \delta_G)$ από το Λήμμα 2.2.10. Συνεπώς, το ζητούμενο συμπέρασμα έπεται από το γεγονός ότι η τομή από saturated subcomodules είναι προφανώς επίσης saturated.

(ii) Αν κάθε saturated $L(G)$-comodule είναι non-degenerate, τότε από το (i)έπεται ότι, για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ), το $(\mathrm{Sat}(Y, \delta), \mathrm{id}_Y\otimes\delta_G)$ είναι non-degenerate και άρα το (Y, δ) είναι non-degenerate από το (iii) της Πρότασης 2.2.5. Επομένως κάθε $L(G)$-comodule θα είναι non-degenerate που σημαίνει ότι η G έχει την AP (βλ. Πρόταση 2.3.14). □

Είμαστε, λοιπόν, σε θέση να αποδείξουμε τον ακόλουθο functorial χαρακτηρισμό των τοπικά συμπαγών ομάδων με την προσεγγιστική ιδιότητα (Θεώρημα 3.3.10) χρησιμοποιώντας τους συναρτητές που ορίζουν τα σταυρωτά γινόμενα. Αυτό το αποτέλεσμα μαζί με την Πρόταση 2.3.14 συμπληρώνουν την πρόσφατη εργασία των Crann και Neufang [12, Theorem 4.1, Corollary 4.8].

Θεώρημα 3.3.10. *Για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η G έχει την AP.*

(ii) $(Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G = (Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G$, *για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ).*

(iii) $X \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha} G = X \overline{\rtimes}_\alpha G$, *για κάθε $L^\infty(G)$-comodule (X, α).*

(iv) $((Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G, \, \widehat{\widehat{\delta}}) \simeq (Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ *για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ).*

(v) $((Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G, \, \widehat{\widehat{\delta}}) \simeq (Y \overline{\otimes} B(L^2(G)), \widetilde{\delta})$ *για κάθε $L(G)$-comodule (Y, δ).*

Ο ισομορφισμός στις (iv) και (v) είναι ο $(\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad} W_\Lambda) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (ii) είναι προφανής και η συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (iii) είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.3.14 και του Θεωρήματος 3.3.8. Επίσης, οι ισοδυναμίες (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) έπονται άμεσα από τις Προτάσεις 2.3.14, 3.3.3 και 3.3.6. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι (ii) *implies* (i).

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη (ii). Τότε, κάθε saturated $L(G)$-comodule είναι non-degenerate. Πράγματι, αν (Y, δ) είναι ένα saturated $L(G)$-comodule, τότε η Πρόταση 3.3.6 συνεπάγεται ότι

$$(Y \ltimes_\delta G) \overline{\rtimes}_{\widehat{\delta}} G = (Y \ltimes_\delta G) \rtimes^{\mathcal{F}}_{\widehat{\delta}} G = \pi(Y \overline{\otimes} B(L^2(G))),$$

όπου $\pi = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{Ad} W_\Lambda) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})$ και άρα το (Y, δ) είναι non-degenerate από την Πρόταση 3.3.3.

Επομένως, η συνθήκη (ii) συνεπάγεται ότι κάθε saturated $L(G)$-comodule είναι και non-degenerate και άρα, από το (ii) του Λήμματος 3.3.9, ότι η G έχει την AP. □

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές στην Αρμονική Ανάλυση

Σε αυτό το κεφάλαιο ερευνάμε την σχέση ανάμεσα στα σταυρωτά γινόμενα δυϊκών χώρων τελεστών και τους από κοινού αρμονικούς τελεστές που εισήγαγαν οι Ανούσης, Κατάβολος και Todorov στα [5, 6] ως μια φυσιολογική γενίκευση των αρμονικών τελεστών που εισήχθησαν στο [25] από τους Jaworski και Neufang και στο [41] από τους Neufang και Runde.

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στην G. Μια συνάρτηση $f \in L^\infty(G)$ καλείται *μ-αρμονική* αν είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης $P_\mu \colon L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ που ορίζεται ως εξής

$$(P_\mu f)(s) = \int_G f(st)\, d\mu(t). \tag{4.1}$$

Δηλαδή, μια συνάρτηση $f \in L^\infty(G)$ είναι μ-αρμονική αν $P_\mu f = f$.

Οι αρμονικές συναρτήσεις έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην μελέτη των τυχαίων περιπάτων διακριτών ομάδων και στην αρμονική ανάλυση των τοπικά συμπαγών ομάδων (βλ. [17]). Το μη μεταθετικό ανάλογο (κβαντοποίηση) αυτής της έννοιας λαμβάνεται είτε περνώντας από το επίπεδο των συναρτήσεων σε επίπεδο τελεστών, δηλαδή από στοιχεία του $L^\infty(G)$ σε στοιχεία του $B(L^2(G))$ (βλ. [25, 42]), είτε αντικαθιστώντας τον $L^\infty(G)$ με την $L(G)$ (βλ. [10, 41]).

4.1 Αναπαραστάσεις των $M(G)$ και $M_{cb}A(G)$

Πρωτού προχωρήσουμε στην περιγραφή των (από κοινού) αρμονικών τελεστών και την σύνδεσή τους με τα σταυρωτά γινόμενα, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε πώς η δράση ενός μέτρου μ στον $L^\infty(G)$ μέσω του τελεστή P_μ μπορεί να επεκταθεί στον $B(L^2(G))$.

Έστω $M(G)$ η άλγεβρα των μέτρων της G, δηλαδή το σύνολο των κανονικών μιγαδικών μέτρων Borel στην G. Αυτό είναι μια άλγεβρα Banach ως προς το γινόμενο που δίνεται από την συνήθη συνέλιξη μέτρων. Θυμηθείτε ότι, για $\mu, \nu \in M(G)$, η συνέλιξη $\mu * \nu$ είναι εκείνο το στοιχείο της $M(G)$ που ικανοποιεί

$$\int_G f(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G f(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$$

για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση f της G. Ως συνήθως, ταυτίζουμε τον $L^1(G)$ με το ιδεώδες της $M(G)$ που αποτελείται από όλα τα απολύτως συνεχή μέτρα ως προς το μέτρο Haar. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την $M(G)$ δείτε π.χ. το [9, Section 9.4].

Επίσης, η $M(G)$ έχει μια φυσιολογική δομή δυϊκού χώρου τελεστών καθώς είναι ισομετρικά ισόμορφη με τον $C_0(G)^*$ (από το θεώρημα αναπαράστασης Riesz-Markov-Kakutani).

Υπάρχει μια w*-w*-συνεχής πλήρως ισομετρική αναπαράσταση

$$\Theta\colon M(G) \to CB_\sigma(B(L^2(G))),$$

με

$$\Theta(\nu)(T) = \int_G \mathrm{Ad}\rho_s(T)\, d\nu(s), \qquad \nu \in M(G),\ T \in B(L^2(G)),$$

όπου το ολοκλήρωμα έχει νόημα ως προς την w*-τοπολογία.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\mu \in M(G)$, η απεικόνιση $\Theta(\mu)$ είναι ένας w*-συνεχής μορφισμός $L(G)$-διπρότυπων του $B(L^2(G))$ που αφήνει αναλλοίωτο τον $L^\infty(G)$ (αφού ο $L^\infty(G)$ είναι αναλλοίωτος από μεταφορές). Μάλιστα, για κάθε $f \in L^\infty(G)$, έχουμε

$$\Theta(\mu)(f) = \int_G f(st)\, d\mu(t)$$

και άρα η $\Theta(\mu)$ επεκτείνει την P_μ από (4.1). Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την αναπαράσταση Θ ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [18], [40], [42] και [45].

Από την άλλη μεριά, η $M_{cb}A(G)$ έχει επίσης μια φυσιολογική δομή δυϊκού χώρου τελεστών μέσω της ταύτισης $u \in M_{cb}A(G) \mapsto M_u \in CB(L(G))$ (βλ. Ορισμό 2.3.10). Πάλι, υπάρχει μια w*-w*-συνεχής αναπαράσταση [42, Τηεορεμ 4.3]

$$\widehat{\Theta}\colon M_{cb}A(G) \to CB_\sigma(B(L^2(G))),$$

τέτοια ώστε για κάθε $u \in M_{cb}A(G)$, $s \in G$ και $f \in L^\infty(G)$ έχουμε

$$\widehat{\Theta}(u)(\lambda_s f) = u(s)\lambda_s f$$

και κάθε $\widehat{\Theta}(u)$ είναι ένας πλήρως φραγμένος w*-συνεχής μορφισμός $L^\infty(G)$-διπρότυπων στον $B(L^2(G))$ που επεκτείνει τον πλήρως φραγμένο πολλαπλασιαστή $M_u\colon L(G) \to L(G)$.

Σημειωτέον δδε ότι η $\widehat{\Theta}$ είναι το μη μεταθετικό ανάλογο της Θ, καθώς αν η G είναι μια αβελιανή ομάδα με δυϊκή ομάδα $\widehat{G}$, τότε $A(G) \simeq L^1(\widehat{G})$ και $M_{cb}A(G) \simeq M(\widehat{G})$.

4.2 Αρμονικοί τελεστές

Για ένα $\mu \in M(G)$ (όχι απαραιτήτως μέτρο πιθανότητας) έστω $\mathcal{H}(\mu)$ ο χώρος των μ-αρμονικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\mathcal{H}(\mu) := \{f \in L^\infty(G) : \ P_\mu(f) = f\}.$$

Καθώς ο P_μ είναι ο περιορισμός της $\Theta(\mu)$ στον $L^\infty(G)$, οι Jaworski και Neufang [25] όρισαν τους *μ-αρμονικούς τελεστές* ως τον χώρο

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\mu) := \{T \in B(L^2(G)) : \ \Theta(\mu)(T) = T\}$$

επεκτείνοντας συνεπώς την έννοια της αρμονικότητας σε ένα μη μεταθετικό πλαίσιο.

Επίσης, οι Jaworski και Neufang [25, Proposition 6.3] έδειξαν ότι ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\mu)$ αναπαρίσταται ως ένα σταυρωτό γινόμενο (γενικεύοντας εργασία του Izumi για διακριτές αριθμήσιμες ομάδες [24]). Ακριβέστερα, απέδειξαν ότι αν η G είναι δεύτερη αριθμήσιμη και το μ είναι μέτρο πιθανότητας, τότε οι $\widetilde{\mathcal{H}}(\mu)$ και $\mathcal{H}(\mu)$ εφοδιάζονται με ένα συγκεκριμένο γινόμενο άλγεβρας von Neumann, εν γένει διαφορετικό από εκείνο του $B(L^2(G))$, ούτως ώστε ο $\widetilde{\mathcal{H}}(\mu)$ να είναι το σταυρωτό γινόμενο του $\mathcal{H}(\mu)$ ως προς την δράση της G με αριστερές μεταφορές. Παρατηρείστε δε ότι ο $\mathcal{H}(\mu)$ είναι πράγματι αναλλοίωτος από αριστερές μεταφορές υπόχωρος του $L^\infty(G)$ διότι ισούται με το σύνολο των σταθερών σημείων του w*-συνεχούς μορφισμού $L(G)$-διπρότυπων P_μ.

Από την άλλη μεριά, οι Chu και Lau [10], αντικαθιστώντας τον $L^\infty(G)$ με την $L(G)$ και τα μέτρα πιθανότητας με κανονικοποιημένες θετικά ορισμένες συναρτήσεις στην άλγεβρα Fourier-Stieltjes $B(G)$ (βλ. [15] για λεπτομέρειες σχετικά με την $B(G)$), εισήγαγαν και μελέτησαν ένα άλλο μη μεταθετικό ανάλογο της αρμονικότητας. Συγκεκριμένα, για μια κανονικοποιημένη θετικά ορισμένη συνάρτηση $\sigma \in B(G)$ όρισαν τους *σ-αρμονικούς τελεστές* στην $L(G)$ ως τον χώρο

$$\mathcal{H}_\sigma := \{T \in L(G) : \ \sigma \cdot T = T\},$$

όπου $\sigma \cdot T$ είναι ο τελεστής στην $L(G) \simeq A(G)^*$ που ορίζεται από $\langle \sigma \cdot T, u\rangle = \langle T, u\sigma\rangle$ για κάθε $u \in A(G)$ (σημειώστε ότι η $A(G)$ είναι ιδεώδες της $B(G)$ [15] και άρα $A(G)\sigma \subseteq A(G)$). Απέδειξαν δε ότι ο $\mathcal{H}_\sigma$ είναι von Neumann υπάλγεβρα της $L(G)$ ([10, Proposition 3.2.10]).

Παρατηρείστε ότι ο $\mathcal{H}_\sigma$ είναι πράγματι το μη μεταθετικό ανάλογο του $\mathcal{H}(\mu)$ εφ' όσον, αν η G είναι αβελιανή με δυϊκή ομάδα $\widehat{G}$, τότε υπάρχουν ισομετρικοί ισομορφισμοί $L(G) \simeq L^\infty(\widehat{G})$ και $M_{cb}A(G) = B(G) \simeq M(\widehat{G})$ (που επάγονται αντίστοιχα από τους μετασχηματισμούς Fourier και Fourier-Stieltjes).

Ο ορισμός του $\mathcal{H}_\sigma$ προφανώς έχει νόημα για κάθε $\sigma \in M_{cb}A(G)$ αφού η $A(G)$ είναι ιδεώδες της $M_{cb}A(G)$. Ακόμη, επειδή ο M_σ είναι ο συζυγής του τελεστήπ $u \mapsto \sigma u$ στην $A(G)$, για κάθε $T \in L(G)$, $u \in A(G)$ και $\sigma \in M_{cb}A(G)$, έχουμε

$$\langle \sigma \cdot T, u\rangle = \langle T, u\sigma\rangle = \langle M_\sigma(T), u\rangle = \langle \widehat{\Theta}(\sigma)(T), u\rangle,$$

δηλαδή $\sigma \cdot T = \widehat{\Theta}(\sigma)(T)$ και άρα η $M_{cb}A(G)$-δράση προτύπου στην $L(G)$ επεκτείνεται σε ολον τον $B(L^2(G))$ μέσω της αναπαράστασης $\widehat{\Theta}$ της $M_{cb}A(G)$ στον $B(L^2(G))$. Αυτό οδήγησε τους Neufang και Runde [41] να ορίσουν τους *σ-αρμονικούς τελεστές* στον $B(L^2(G))$ ως εξής

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma := \{T \in B(L^2(G)) : \ \widehat{\Theta}(\sigma)(T) = T\}.$$

Απέδειξαν επίσης ότι, υπό κάποιες υποθέσεις, ο $\widetilde{\mathcal{H}}_\sigma$ είναι η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από τους $L^\infty(G)$ και $\mathcal{H}_\sigma$ (βλ. [41, Theorem 4.8]). Αυτό είναι το ανάλογο του αποτελέσματος των Jaworski και Neufang.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι όλα τα παραπάνω έχουν επεκταθεί και ενοποιηθεί στο πλαίσιο των τοπικά συμπαγών κβαντικών ομάδων από τους Junge, Neufang και Ruan στο [26] και από τους Kalantar, Neufang και Ruan στο [27].

Από την άλλη μεριά, οι Ανούσης, Κατάβολος και Todorov [5, 6] έχουν επίσης γενικεύσει την έννοια των αρμονικών τελεστών, αλλά προς μια διαφορετική κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, αντί των αρμονικών τελεστών ως προς ένα μόνο στοιχείο της $M(G)$ ή της $M_{cb}A(G)$, μελέτησαν τελεστές που είναι αρμονικοί ως προς κάθε στοιχείο ενός αυθαίρετου υποσυνόλου της $M(G)$ ή της $M_{cb}A(G)$.

Για μια αυθαίρετη οικογένεια $\Lambda \subseteq M(G)$ (όχι απαραίτητα αποτελούμενη από μέτρα πιθανότητας), έχουμε τις *από κοινού Λ-αρμονικές συναρτήσεις*

$$\mathcal{H}(\Lambda) := \{f \in L^\infty(G) : \ \Theta(\mu)(f) = f \text{ για κάθε } \mu \in \Lambda\}$$

και τους *από κοινού Λ-αρμονικούς τελεστές*

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) := \{T \in B(L^2(G)) : \ \Theta(\mu)(T) = T \text{ για κάθε } \mu \in \Lambda\}.$$

Ομοίως, για μια οικογένεια $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$, όρισαν τα *από κοινού Σ-αρμονικά συναρτησοειδή*

$$\mathcal{H}_\Sigma := \{T \in L(G) : \ \widehat{\Theta}(\sigma)(T) = T \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma\}$$

και τους *από κοινού Σ-αρμονικούς τελεστές*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma := \{T \in B(L^2(G)) : \ \widehat{\Theta}(\sigma)(T) = T \text{ για κάθε } \sigma \in \Sigma\}.$$

Ας σημειωθεί ότι οι από κοινού αρμονικοί τελεστές ως προς αυθαίρετα ουποσύνολα της $M(G)$ ή $M_{cb}A(G)$ εν γένει μπορεί να μη δέχονται κάποια δομή άλγεβρας von Neumann.

Ας καθορίσουμε κάποιους επί πλέον συμβολισμούς. Για ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq B(L^2(G))$ θέτουμε

$$\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{U}) := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{xTy : \ x, y \in L^\infty(G), \ T \in \mathcal{U}\}$$

και

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{U}) := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{xTy : \ x, y \in L(G), \ T \in \mathcal{U}\},$$

δηλαδή τα w*-κλειστά υπο-διπρότυπα του $B(L^2(G))$ πάνω από τις $L^\infty(G)$ και $L(G)$ αντίστοιχα που παράγει το $\mathcal{U}$.

Οι Ανούσης, Κατάβολος και Todorov [5] έδειξαν ότι $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma)$ για κάθε οικογένεια $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$ τουλάχιστον στην περίπτωση που η G είναι μια τοπικά συμπαγής δεύτερη αριθμήσιμη ομάδα, γενικεύοντας επομένως το αποτέλεσμα των Neufang και Runde [41, Theorem 4.8].

Παρόμοια, στο [6], για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G (όχι απαραίτητα δεύτερη αριθμήσιμη), οι συγγραφείς έδειξαν ότι $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ για κάθε οικογένεια $\Lambda \subseteq M(G)$, όταν η G είναι είτε αβελιανή είτε συμπαγής είτε weakly amenable και διακριτή. Αυτό γενικεύθηκε προσφάτως από τους Crann και Neufang [12] για κάθε τοπικά συμπαγή ομάδα με την AP.

Στα επόμενα, θα δείξουμε ότι, για κάθε τοπικά συμπαγή ομάδα G και αυθαίρετες οικογένειες $\Lambda \subseteq M(G)$ και $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$, οι χώροι $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$ προκύπτουν αντιστοίχως ως σταυρωτά γινόμενα Fubini των δυϊκών χώρων τελεστών $\mathcal{H}(\Lambda)$ και $\mathcal{H}_\Sigma$, ενώ τα αντιιστοιχα χωρικά σταυρωτά γινόμενα των $\mathcal{H}(\Lambda)$ και $\mathcal{H}_\Sigma$ ταυτίζονται αντιστοίχως με τα διπρότυπα $\mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ και $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma)$. Αυτό μας παρέχει μια μάλλον εννοιολογική προοπτική των από κοινού αρμονικών τελεστών, η οποία θα μπορούσε πιθανότατα να επεκταθεί στο πλαίσιο των τοπικά συμπαγών κβαντικών ομάδων. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η αναπαράσταση των από κοινού αρμονικών τελεστών ως σταυρωτά γινόμενα Fubini δεν απαιτεί την χρήση κάποιου γινομένου άλγεβρας von Neumann (ενδεχομένως διαφορετικού από εκείνο του $B(L^2(G))$) ή κάποια επιπρόσθετη συνθήκη για την ομάδα G.

Ως εφαρμογές, γενικεύουμε τα προαναφερθέντα αποτελέσματα των [5] και [12]. Συγκεκριμένα, δίνουμε μια εναλλακτική (λιγότερο τεχνική) απόδειξη της ισότητας $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma)$, χωρίς την υπόθεση ότι η G είναι δεύτερη αριθμήσιμη. Επίσης, δείχνουμε ότι η ισότητα $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ ισχύει για κάθε οικογένεια $\Lambda \subseteq M(G)$ τουλάχιστον όταν η G ικανοποιεί μια συνθήκη a priori ασθενέστερη της AP.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι, για μια τοπικά συμπαγή ομάδα G, η ισότητα $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) \cap L(G) = J^\perp$ ισχύει για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$ αν και μόνον αν η G έχει την ιδιότητα Ditkin στο άπειρο [28, Remark 5.1.8 (2)] απαντώντας έτσι σε ένα ερώτημα των συγγραφέων του [4] (βλ. [4, Question 4.8]).

4.3 Σταυρωτά γινόμενα και αρμονικοί τελεστές

Για δύο υποσύνολα $A \subseteq M(G)$ και $B \subseteq M_{cb}A(G)$ θέτουμε

$$\ker \Theta(A) := \bigcap \{\ker \Theta(a) :\ a \in A\}$$

και ομοίως

$$\ker \widehat{\Theta}(B) := \bigcap \{\ker \widehat{\Theta}(b) :\ b \in B\}.$$

Επίσης, για δύο οικογένειες $\Lambda \subseteq M(G)$ και $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$ θέτουμε

$$J(\Lambda) := \overline{\operatorname{span}\{h * \mu - h : \ h \in L^1(G), \ \mu \in \Lambda\}}^{\|\cdot\|_{L^1(G)}}$$

και

$$J_\Sigma := \overline{\operatorname{span}\{u\sigma - u : \ u \in A(G), \ \sigma \in \Sigma\}}^{\|\cdot\|_{A(G)}}.$$

Τότε, προφανώς, το $J(\Lambda)$ είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες του $L^1(G)$ και το J_Σ είναι κλειστό ιδεώδες της $A(G)$, τέτοια ώστε

$$\mathcal{H}(\Lambda) = J(\Lambda)^\perp \text{ και } \mathcal{H}_\Sigma = J_\Sigma^\perp,$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \ker \Theta(J(\Lambda)) \text{ και } \widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \ker \widehat{\Theta}(J_\Sigma).$$

Επομένως, η μελέτη των από κοινού αρμονικών τελεστών οδηγεί φυσιολογικά στην μελέτη των ιδεωδών των $L^1(G)$ και $A(G)$ και των μηδενιστών τους αντίστοιχα στις $L^\infty(G)$ και $L(G)$. Για τον λόγο αυτό, ας αρχίσουμε με μια σύντομη συζήτηση περί ιδεωδών και μηδενιστών.

Ας υποθέσουμε ότι η (M, Δ) είναι μια άλγεβρα Hopf-von Neumann και ας θυμηθούμε ότι ο προδυϊκός αυτής M_* έχει μια φυσιολογική δομή άλγεβρας Banach ως προς το γινόμενο που ορίζεται από τον προσυζυγή του Δ, δηλαδή

$$\omega\phi = (\omega \otimes \phi) \circ \Delta, \qquad \omega, \phi \in M_*.$$

Παρατηρούμε ότι ένας κλειστός υπόχωρος I της M_* είναι δεξιό ιδεώδες της M_* αν και μόνον αν ο μηδενιστής του στην M, δηλαδή ο χώρος

$$I^\perp = \{x \in M : \ \langle x, \omega \rangle = 0, \ \forall \omega \in I\},$$

είναι M-subcomodule της (M, Δ), δηλαδή $\Delta(I^\perp) \subseteq I^\perp \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$. Πράγματι, από τον ορισμό του τανυστικού γινομένου Fubini, ο εγκλεισμός $\Delta(I^\perp) \subseteq I^\perp \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} M$ είναι ισοδύναμος με την

$$(\mathrm{id} \otimes \omega)(\Delta(x)) \in I^\perp \quad \text{για κάθε } x \in I^\perp, \ \omega \in M_*,$$

ισοδύναμα

$$\langle x, \phi\omega \rangle = \langle (\mathrm{id} \otimes \omega)(\Delta(x)), \phi \rangle = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I^\perp, \ \omega \in M_*, \ \phi \in I,$$

το οποίο, από το θεώρημα Hahn-Banach, είναι ισοδύναμο με το ότι $\phi\omega \in I$ για κάθελ $\omega \in M_*$ και $\phi \in I$.

Παρόμοια, ένας w*-κλειστός υπόχωρος X της M είναι M-subcomodule της M αν και μόνον αν ο προμηδενιστής του στην M_*, δηλαδή ο χώρος

$$X_\perp = \{\omega \in M_* : \ \langle x, \omega \rangle = 0, \ \forall x \in X\},$$

είναι δεξιό ιδεώδες της M_*. Επομένως τα M-subcomodules μιας άλγεβρας Hopf-von Neumann M είναι σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα δεξιά ιδεώδη της M_* παίρνοντας μηδενιστές και προμηδενιστές.

4.3.1 Ιδεώδη της $A(G)$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma$

Έστω J ένα κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Fourier $A(G)$ και έστω $J^\perp$ ο μηδενιστής του στην $L(G)$. Όπως εξηγήσαμε ήδη, ο $J^\perp$ είναι $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$, δηλαδή $\delta_G(J^\perp) \subseteq J^\perp \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G)$. Μάλιστα, κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνωντας τον προμηδενιστή του στην $A(G)$.

Σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα (Πρόταση 4.3.1), για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$, οι χώροι $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)$ και $\ker \widehat{\Theta}(J)$ συμπίπτουν αφού είναι αμφότεροι κανονικά ισόμορφοι με το σταυρωτό γινόμενο $J^\perp \ltimes_{\delta_G} G$ του $L(G)$-comodule $(J^\perp, \delta_G)$. Επομένως παίρνουμε μια εναλλακτική απόδειξη του [4, Theorem 3.2] καθώς επίσης και του [5, Corollary 2.12], η οποία είναι λιγότερο τεχνική και δεν υποθέτει την δεύτερη αριθμησιμότητα της G.

Πρόταση 4.3.1. *Ο w^*-συνεχής $*$-μονομορφισμός*

$$\Phi\colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G))\overline{\otimes}B(L^2(G))$$

που ορίζεται ως

$$\Phi(T) = SW_G^*(T \otimes 1)W_G S, \quad T \in B(L^2(G)), \tag{4.2}$$

είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(B(L^2(G)), \beta_G)$ επί του $(L(G) \ltimes_{\delta_G} G, \widehat{\delta_G})$. Επίσης, αν J είναι ένα κλειστό ιδεώδες της $A(G)$, τότε

$$\Phi(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)) = J^\perp \overline{\ltimes}_{\delta_G} G$$

και

$$\Phi(\ker \widehat{\Theta}(J)) = J^\perp \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G.$$

Επομένως, $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = \ker \widehat{\Theta}(J)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\Phi(\lambda_s) = SW_G^*(\lambda_s \otimes 1)W_G S = S(\lambda_s \otimes \lambda_s)S = \lambda_s \otimes \lambda_s = \delta_G(\lambda_s),$$

για κάθε $s \in G$.

Επίσης, αφού $\delta_G(f) = f \otimes 1$ για κάθε $f \in L^\infty(G)$ έπεται:

$$\Phi(f) = SW_G^*(f \otimes 1)W_G S = S(f \otimes 1)S = 1 \otimes f,$$

για κάθε $f \in L^\infty(G)$.

Από τους ως άνω υπολογισμούς είναι φανερό ότι $\Phi(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)) = J^\perp \overline{\ltimes}_{\delta_G} G$. Επί πλέον, $\Phi(B(L^2(G))) = L(G) \ltimes_{\delta_G} G$, διότι ο $B(L^2(G))$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη του $L^\infty(G)L(G)$.

Εφ' όσον $B(L^2(G)) = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\}$, για να δείξουμε ότι ο Φ είναι $L^\infty(G)$-comodule ισομορφισμός ως προς τις $L^\infty(G)$-δράσεις β_G και $\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G$ αρκεί να επαληθεύσουμε την ισότητα

$$(\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G) \circ \Phi(x) = (\Phi \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)}) \circ \beta_G(x)$$

για $x = \lambda_s$, $s \in G$, και για $x = f \in L^\infty(G)$. Πράγματι, για $s \in G$ και $f \in L^\infty(G)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G) \circ \Phi(\lambda_s) &= (\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G)(\lambda_s \otimes \lambda_s)\\ &= \lambda_s \otimes \lambda_s \otimes 1\\ &= \Phi(\lambda_s) \otimes 1\\ &= (\Phi \otimes \mathrm{id})(\lambda_s \otimes 1)\\ &= (\Phi \otimes \mathrm{id})(\beta_G(\lambda_s))\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, αφού $\Phi(g) = 1 \otimes g$ για κάθε $g \in L^\infty(G)$ έπεται ότι $(\Phi \otimes \mathrm{id})(y) = 1 \otimes y$ για κάθε $y \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$. Επομένως, αν $f \in L^\infty(G)$, τότε:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G) \circ \Phi(f) &= (\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes \beta_G)(1 \otimes f)\\ &= 1 \otimes \beta_G(f)\\ &= (\Phi \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(G)})(\beta_G(f)),\end{aligned}$$

διότι $\beta_G(f) \in L^\infty(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$.

Μένει να δειχθεί ότι $\Phi(\ker \widehat{\Theta}(J)) = J^\perp \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G$. Προς τούτο, παρατηρούμε πρώτα τα ακόλουθα:

$$\widehat{\Theta}(u) = (u \otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))}) \circ \Phi, \quad \text{για κάθε } u \in A(G). \tag{4.3}$$

Πράγματι, αν $s \in G$ και $f \in L^\infty(G)$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta}(u)(f\lambda_s) &= u(s)f\lambda_s\\ &= (u \otimes \mathrm{id})(\lambda_s \otimes (f\lambda_s))\\ &= (u \otimes \mathrm{id})((1 \otimes f)(\lambda_s \otimes \lambda_s))\\ &= (u \otimes \mathrm{id})(\Phi(f)\Phi(\lambda_s))\\ &= (u \otimes \mathrm{id})(\Phi(f\lambda_s))\end{aligned}$$

και συνεπώς η (4.3) έπεται αφού $B(L^2(G)) = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\}$.

Έπειτα, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
&J^{\perp} \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G = \left(J^{\perp}\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta_G}} \\
&= \left(L(G)\overline{\otimes}B(L^2(G))\right)^{\widetilde{\delta_G}} \cap \left(J^{\perp}\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\
&= (L(G) \ltimes_{\delta_G} G) \cap \left(J^{\perp}\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\
&= \Phi(B(L^2(G))) \cap \left(J^{\perp}\overline{\otimes}B(L^2(G))\right) \\
&= \left\{T \in \Phi(B(L^2(G))) : \ (\mathrm{id} \otimes \omega)(T) \in J^{\perp}, \ \forall \omega \in B(L^2(G))_*\right\} \\
&= \left\{T \in \Phi(B(L^2(G))) : \ \langle (\mathrm{id} \otimes \omega)(T), u\rangle = 0, \ \forall \omega \in B(L^2(G))_*, \ \forall u \in J\right\} \\
&= \left\{T \in \Phi(B(L^2(G))) : \ \langle (u \otimes \mathrm{id})(T), \omega\rangle = 0, \ \forall \omega \in B(L^2(G))_*, \ \forall u \in J\right\} \\
&= \left\{T \in \Phi(B(L^2(G))) : \ (u \otimes \mathrm{id})(T) = 0, \ \forall u \in J\right\} \\
&= \Phi(\ker \widehat{\Theta}(J)),
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από την (4.3). Άρα $J^{\perp} \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G = \Phi(\ker \widehat{\Theta}(J))$.

Τέλος, εφ' όσον $J^{\perp} \ltimes_{\delta_G}^{\mathcal{F}} G = J^{\perp}\overline{\ltimes}_{\delta_G} G$ (από το Θεώρημα 3.2.10), έπεται ότι $\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}) = \ker \widehat{\Theta}(J)$. □

Το επόμενο πόρισμα προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.3.1.

Πόρισμα 4.3.2. *Για κάθε οικογένεια $\Sigma \subseteq M_{cb}A(G)$ έχουμε ότι το $\mathcal{H}_\Sigma$ είναι $L(G)$-subcomodule της $L(G)$ και*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\Sigma = \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(\mathcal{H}_\Sigma) \simeq \mathcal{H}_\Sigma \ltimes_{\delta_G} G.$$

Πόρισμα 4.3.3. *Για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το $(J^{\perp}, \delta_G)$ είναι saturated $L(G)$-comodule.

(ii) $L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}) = J^{\perp}$.

Απόδειξη. Έστω J ένα κλειστό ιδεώδες της $A(G)$. Από την Πρόταση 4.3.1 παίρνουμε ότι το $(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}), \beta_G)$ είναι ένα $L^\infty(G)$-comodule, το οποίο είναι ισόμορφο με το $L^\infty(G)$-comodule $(J^{\perp} \ltimes_{\delta_G} G, \widehat{\delta_G})$ μέσω του ισομορφισμού Φ (4.2). Επομένως, ο Φ απεικονίζει τον χώρο των σταθερών σημείων $(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}))^{\beta_G}$ επί του $\left(J^{\perp} \ltimes_{\delta_G} G\right)^{\widehat{\delta_G}} = \mathrm{Sat}(J^{\perp}, \delta_G)$ (βλ. Πρόταση 3.2.7 και Θεώρημα 3.2.10). Επίσης,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}))^{\beta_G} &= B(L^2(G))^{\beta_G} \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp}) \\
&= L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^{\perp})
\end{aligned}
$$

επομένως $\Phi(L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)) = \mathrm{Sat}(J^\perp, \delta_G)$. Αφού $J^\perp \subseteq L(G)$, έχουμε ότι $\Phi(J^\perp) = \delta_G(J^\perp)$ και άρα το $(J^\perp, \delta_G)$ θα είναι saturated $L(G)$-comodule αν και μόνον αν $L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = J^\perp$. □

Οι Ανούσης, Κατάβολος και Todorov [4] απέδειξαν ότι αν η $A(G)$ δέχεται μια προσεγγιστική μονάδα (όχι κατ' ανάγκη φραγμένη), τότε

$$L(G) \cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = J^\perp$$

για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$ [4, Lemma 4.5]. Έθεσαν δε το ερώτημα αν το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για μια αυθαίρετη ομάδα G. Προφανώς, από το Πόρισμα 4.3.3, αυτό το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι saturated. Από αυτή την οπτική γωνία, αποδεικνύουμε παρακάτω (Πρόταση 4.3.5) ότι μια συνθήκη, a priori ασθενέστερη της ύπαρξης μιας (ενδεχομένως μη φραγμένης) προσεγγιστικής μονάδας στην $A(G)$, είναι ικανή και αναγκαία. Αυτό βελτιώνει το [4, Lemma 4.5].

Ορισμός 4.3.4. Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Ακολουθώντας το [28, Remark 5.1.8 (2)], λέμε ότι η G έχει την *ιδιότητα Ditkin στο άπειρο* (ή την *ιδιότητα D_∞*), αν

$$u \in \overline{A(G)u}^{\|\cdot\|}, \quad \forall u \in A(G).$$

Επίσης, ακολουθώντας το [15], λέμ ότι ένα στοιχείο $x \in L(G)$ ικανοποιεί την *συνθήκη (H)* αν

$$x \in \overline{A(G) \cdot x}^{\mathrm{w}^*}.$$

Παρόλο που η ισοδυναμία μεταξύ των ισχυρισμών (α) έως και (γ) στο επόμενο αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστή (βλ. πχ. [15]), έχουμε συμπεριλάβει την απόδειξή της χάριν πληρότητας.

Πρόταση 4.3.5. *Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Τότε, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α) Η G έχει την ιδιότητα D_∞.

(β) Κάθε $x \in L(G)$ ικανοποιεί την συνθήκη (H).

(γ) Για κάθε $x \in L(G)$ και $h \in A(G)$, αν $h \cdot x = 0$, τότε $\langle x,\ h\rangle = 0$.

(δ) Για κάθε $L(G)$-subcomodule Y της $(L(G), \delta_G)$ και κάθε $x \in L(G)$ έχουμε

$$\delta_G(x) \in Y \overline{\otimes}_{\mathcal{F}} L(G) \iff x \in Y.$$

(ε) Κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι saturated.

(στ) Κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι non-degenerate.

(ζ) *Για κάθε κλειστό ιδεώδες J της $A(G)$, έχουμε $L(G)\cap \mathrm{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp) = J^\perp$.*

Απόδειξη. (β) $\Longrightarrow$ (α): Συπποσε τηατ κάθε στοιχείο της $L(G)$ ικανοποιεί την συνθήκη (H) και ότι υπάρχει $u \in A(G)$, τέτοιο ώστε $u \notin \overline{A(G)u}^{\|\cdot\|}$. Τότε, υπάρχει $x \in L(G)$, τέτοιο ώστε $\langle x, u\rangle \neq 0$ και $\langle x, vu\rangle = 0$, για κάθε $v \in A(G)$. Αυτό σημαίνει ότι $\langle v\cdot x, u\rangle = 0$, για κάθε $v \in A(G)$ και αφού ο x ικανοποιεί την συνθήκη (H) έπεται ότι $\langle x, u\rangle = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(γ) $\Longrightarrow$ (β): Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in L(G)$ και $h \in A(G)$, η $h\cdot x = 0$ συνεπάγεται ότι $\langle x,\ h\rangle = 0$. Αν υπάρχει ένα $x \in L(G)$, τέτοιο ώστε $x \notin \overline{A(G)\cdot x}^{\mathrm{w}^*}$, τότε πρέπει να υπάρχει $h \in A(G)$, τέτοια ώστε $\langle x,\ h\rangle \neq 0$ και $\langle u\cdot x, h\rangle = 0$, για κάθε $u \in A(G)$. Όμως, $\langle u\cdot x, h\rangle = \langle x, hu\rangle = \langle x, uh\rangle = \langle h\cdot x, u\rangle$, επομένως παίρνουμε ότι $\langle h\cdot x, u\rangle = 0$, για κάθε $u \in A(G)$ και άρα $h\cdot x = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\langle x, h\rangle = 0$, εξ υποθέσεως. Συνεπώς, καταλήγουμε σε αντίφαση.

(α) $\Longrightarrow$ (γ): Υποθέτουμε ότι η G έχει την ιδιότητα D_∞ και ότι υπάρχουν $x \in L(G)$ και $h \in A(G)$, τέτοια ώστε $h\cdot x = 0$ και $\langle x, h\rangle \neq 0$. Τότε, $\langle h\cdot x, u\rangle = 0$, για κάθε $u \in A(G)$, δηλαδή $\langle x, uh\rangle = 0$, για κάθε $u \in A(G)$. Αλλά, εφ' όσον η G έχει την ιδιότητα D_∞, έχουμε ότι υπάρχει ένα δίκτυο (u_i) στην $A(G)$, τέτοιο ώστε $u_i h \longrightarrow h$. Επομένως, $\langle x, h\rangle = \lim\langle x, u_i h\rangle = 0$, που είναι άτοπο.

(ε) $\Longrightarrow$ (δ): Έστω Y ένα $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ και έστω $x \in L(G)$, με $\delta_G(x) \in Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$. Τότε, από την συμπροσεταιριστικότητα της δ_G, έχουμε ότι $(\delta_G \otimes \mathrm{id}_{L(G)})(\delta_G(x)) = (\mathrm{id}_Y \otimes \delta_G)(\delta_G(x))$. Άρα, $\delta_G(x) \in \mathrm{Sat}(Y, \delta_G) = \delta_G(Y)$, αφού το Y είναι saturated. Συνεπώς, $x \in Y$, διότι η δ_G είναι ισομετρία.

(δ) $\Longrightarrow$ (β): Παίρνουμε ένα $x \in L(G)$ και θέτουμε $Y := \overline{A(G)\cdot x}^{\mathrm{w}^*}$. Τότε, το Y είναι προφανώς ένα subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ (διότι είναι $A(G)$-υποπρότυπο) και $\delta_G(x) \in Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$. Πράγματι, αν δεν ισχύει το προηγούμενο, τότε πρέπει να υπάρχουν $h,\ u \in A(G)$, τέτοιες ώστε $\langle y, u\rangle = 0$, για κάθε $y \in Y$, και $\langle \delta_G(x), u\otimes h\rangle \neq 0$. Όμως, η $\langle \delta_G(x), u\otimes h\rangle \neq 0$ συνεπάγεται ότι $\langle h\cdot x, u\rangle \neq 0$, ενώ η u μηδενίζει τον Y και $h\cdot x \in Y$ εξ ορισμού, το οπίο είναι άτοπο. Άρα, $\delta_G(x) \in Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)$ και η (δ) συνεπάγεται ότι $x \in Y$.

(β) $\Longrightarrow$ (στ): Αυτό έπεται άμεσα από το Πόρισμα 2.3.8.

(στ) $\Longrightarrow$ (ε): Υποθέτουμε ότι κάθε $L(G)$-subcomodule της $(L(G), \delta_G)$ είναι non-degenerate. Έστω Y ένα $L(G)$-subcomodule της $L(G)$. Αν θέσουμε

$$Y_1 := \{x \in L(G) :\ A(G)\cdot x \subseteq Y\},$$

τότε προφανώς το Y_1 είναι $L(G)$-subcomodule της $L(G)$ που περιέχει το Y. Ακόμη, είναι σαφές, από τον ορισμό του Y_1, ότι

$$\delta_G(Y_1) = (Y\overline{\otimes}_{\mathcal{F}}L(G)) \cap \delta_G(L(G)) = \mathrm{Sat}(Y, \delta_G).$$

Αφού το Y_1 είναι non-degenerate εξ υποθέσεως, παίρνουμε ότι

$$Y_1 = \overline{\text{span}}^{w^*}\{A(G) \cdot Y_1\} \subseteq Y$$

και άρα $Y = Y_1$, δηλαδή το Y είναι saturated, διότι $\delta_G(Y_1) = \text{Sat}(Y, \delta_G)$.

(ε) $\iff$ (ζ): Αυτό προκύπτει από το Πόρισμα 4.3.3 εφ' όσον η απεικόνιση $J \mapsto J^\perp$ είναι προφανώς μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλειστών ιδεωδών της $A(G)$ και του συνόλου των $L(G)$-subcomodules της $(L(G), \delta_G)$. $\square$

Παρατήρηση 4.3.6. Παρατηρείστε ότι αν η G έχει την AP, τότε προφανώς η G έχει και την ιδιότητα D_∞. Ωστόσο, απ' όσο γνωρίζει ο συγγραφέας, το πρόβλημα της ύπαρξης ομάδων χωρίς την ιδιότητα D_∞ είναι ακόμα ανοικτό.

Επίσης, η Πρόταση 4.3.5 συνεπάγεται ότι ένα κλειστό ιδεώδες J της άλγεβρας Fourier $A(G)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $\text{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)$, δηλαδή ότι η απεικόνιση $J \mapsto \text{Bim}_{L^\infty(G)}(J^\perp)$ είναι ένα προς ένα, τουλάχιστον όταν η G έχει την ιδιότητα D_∞. Παραμένει άγνωστο αν το μονοσήμαντο αυτής της απεικόνισης έπεται χωρίς την υπόθεση της ιδιότητας D_∞.

4.3.2 Ιδεώδη του $L^1(G)$ και $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda)$

Υποθέτουμε ότι J είναι ένα κλειστό αριστερό ιδεώδες του $L^1(G)$ με μηδενιστή $J^\perp \subseteq L^\infty(G)$. Θυμηθείτε ότι το γινόμενο που επάγεται στον $L^1(G)$ από το συγγινόμενο α_G του $L^\infty(G)$ δίνεται από την αντίθετη της συνέλιξης:

$$kh = (k \otimes h) \circ \alpha_G = h * k \qquad h, k \in L^1(G)$$

και άρα $\alpha_G(J^\perp) \subseteq J^\perp \overline{\otimes} L^\infty(G)$, δηλαδή $J^\perp$ είναι $L^\infty(G)$-subcomodule του $L^\infty(G)$, αφού το J είναι δεξιό ιδεώδες ως προς το ως άνω γινόμενο στον $L^1(G)$.

Πρόταση 4.3.7. *Ο w^*-συνεχής $*$-μονομορφισμός*

$$\Psi \colon B(L^2(G)) \to B(L^2(G)) \overline{\otimes} B(L^2(G))$$

με

$$\Psi(T) = V_G^* \delta_G(T) V_G = V_G^* W_G^* (T \otimes 1) W_G V_G, \quad T \in B(L^2(G))$$

είναι W^*-$L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(B(L^2(G)), \delta_G)$ επί του $(L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G, \widehat{\alpha_G})$. Επίσης, για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J του $L^1(G)$, έχουμε

$$\Psi(\text{Bim}_{L(G)}(J^\perp)) = J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G$$

και

$$\Psi(\ker \Theta(J)) = J^\perp \rtimes_{\alpha_G}^{\mathcal{F}} G.$$

Απόδειξη. Αρχικά, πρέπει να επαληθεύσουμε τα εξής:

$$\Psi(f) = \alpha_G(f), \quad f \in L^\infty(G) \tag{4.4}$$

και

$$\Psi(\lambda_s) = 1 \otimes \lambda_s, \quad s \in G. \tag{4.5}$$

Πράγματι, για $f \in L^\infty(G)$ και $s \in G$, έχουμε αντίστοιχα

$$\Psi(f) = V_G^* \delta_G(f) V_G = V_G^*(f \otimes 1) V_G = \alpha_G(f)$$

και

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_s) &= V_G^*(\lambda_s \otimes \lambda_s)V_G = SW_G S(\lambda_s \otimes \lambda_s) SW_G^* S \\ &= SW_G(\lambda_s \otimes \lambda_s)W_G^* S = S(\lambda_s \otimes 1)S = (1 \otimes \lambda_s).\end{aligned}$$

Προφανώς, επειδή $B(L^2(G)) = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{L^\infty(G)L(G)\}$, οι (4.4) και (4.5) συνεπάγονται ότι $\Psi(B(L^2(G))) = L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G$ και $\Psi(\text{Bim}_{L(G)}(J^\perp)) = J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G$, για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J οφ $L^1(G)$.

Επίσης, έχουμε

$$\widehat{\alpha_G} \circ \Psi = (\Psi \otimes \text{id}_{L(G)}) \circ \delta_G$$

σινςε

$$\widehat{\alpha_G} \circ \Psi(f\lambda_s) = (\text{id} \otimes \delta_G)(\alpha_G(f(1 \otimes \lambda_s)) = (\alpha_G(f) \otimes 1)(1 \otimes \lambda_s \otimes \lambda_s)$$

$$= \Psi(f\lambda_s) \otimes \lambda_s = (\Psi \otimes \text{id})((f\lambda_s) \otimes \lambda_s) = (\Psi \otimes \text{id})(\delta_G(f\lambda_s)),$$

για κάθε $s \in G$ και $f \in L^\infty(G)$ και επομένως, η Ψ είναι W*-$L(G)$-comodule ισομορφισμός από το $(B(L^2(G)), \delta_G)$ επί του $(L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G, \widehat{\alpha_G})$.

Μένει να δειχθεί ότι $\Psi(\ker \Theta(J)) = J^\perp \rtimes_{\alpha_G}^{\mathcal{F}} G$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}J^\perp \rtimes_{\alpha_G}^{\mathcal{F}} G &= (J^\perp \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha_G}} \\ &= (L^\infty(G) \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha_G}} \cap (J^\perp \overline{\otimes} B(L^2(G))) \\ &= (L^\infty(G) \rtimes_{\alpha_G} G) \cap (J^\perp \overline{\otimes} B(L^2(G))),\end{aligned}$$

αφού $(L^\infty(G)\overline{\otimes}B(L^2(G)))^{\widetilde{\alpha_G}} = (L^\infty(G)\overline{\rtimes}_{\alpha_G} G)$ από το θεώρημα Digernes-Takesaki. Συνεπώς, αν $y \in L^\infty(G)\overline{\rtimes}_{\alpha_G} G$, τότε

$$y \in J^\perp \rtimes_{\alpha_G}^{\mathcal{F}} G \iff (h \otimes \text{id}_{B(L^2(G))})(y) = 0, \ \forall h \in J.$$

Εφ' όσον, λοιπόν, το $\ker \Theta(J)$ είναι η τομή των πυρήνων των $\Theta(h)$ για $h \in J$ και το $J^\perp \rtimes_{\alpha_G}^{\mathcal{F}} G$ είναι η τομή των πυρήνων των $(h \otimes \text{id}_{B(L^2(G))})$ περιορισμένων στην εικόνα του Ψ για $h \in J$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Theta(h) = (h \otimes \text{id}_{B(L^2(G))}) \circ \Psi, \quad \forall h \in L^1(G). \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε ότι για $f \in L^\infty(G)$ και $h \in L^1(G)$, έχουμε $\Theta(h)(f) = f_h$, όπου $f_h(t) = \int_G h(s)f(ts)ds$. Επομένως, για κάθε $k \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}\langle \Theta(h)(f),\ k\rangle &= \langle f_h, k\rangle = \int_G f_h(t)k(t)dt = \iint_{G\times G} h(s)f(ts)k(t)dsdt \\ &= \langle \alpha_G(f), h\otimes k\rangle = \langle (h\otimes \mathrm{id})(\alpha_G(f)), k\rangle = \langle (h\otimes \mathrm{id})(\Psi(f)), k\rangle\end{aligned}$$

δηλαδή $\Theta(h)(f) = (h\otimes \mathrm{id})(\Psi(f))$ για κάθε $f \in L^\infty(G)$.

Άρα, αφού για κάθε $y \in L(G)$ έχουμε

$$\Theta(h)(fy) = \Theta(h)(f)y$$

και

$$(h\otimes \mathrm{id})(\Psi(fy)) = (h\otimes \mathrm{id})(\Psi(f)(1\otimes y)) = (h\otimes \mathrm{id})(\Psi(f))y,$$

η (4.6) έπεται από την w*-συνέχεια των $\Theta(h)$ και $(h\otimes \mathrm{id}_{B(L^2(G))})\circ\Psi$ και από το γεγονός ότι $B(L^2(G)) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{L^\infty(G)L(G)\}$. □

Από την Πρόταση 4.3.7 παραπάνω, για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J του $L^1(G)$, τα $L(G)$-διπρότυπα $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ και $\ker\Theta(J)$ είναι, επί πλέον, και $L(G)$-subcomodules του $(B(L^2(G)), \delta_G)$ και αντίστοιχα κανονικά ισόμορφα με τα $J^\perp \overline{\rtimes}_{\alpha_G} G$ και $J^\perp \rtimes^{\mathcal{F}}_{\alpha_G} G$. Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε την σχέση μεταξύ των $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ και $\ker\Theta(J)$ χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.3.7 και το Θεώρημα 3.3.8.

Πρώτα απ' όλα, παρατηρούμε ότι η $A(G)$-δράση προτύπου στον $B(L^2(G))$ που επάγει η δ_G δίνεται από την αναπαράσταση $\widehat{\Theta}$, δηλαδή για κάθε $u \in A(G)$ και $T \in B(L^2(G))$, έχουμε

$$\widehat{\Theta}(u)(T) = (\mathrm{id}_{B(L^2(G))}\otimes u)(\delta_G(T)) = u\cdot T. \tag{4.7}$$

Πράγματι, καθώς οι απεικονίσεις $\widehat{\Theta}(u)$ και $(\mathrm{id}\otimes u)\circ\delta_G$ είναι αμφότερες w*-συνεχείς επεκτάσεις της $M_u\colon L(G)\to L(G)$ (βλ. Παρατήρηση 2.3.13), αρκεί να δείξουμε απλώς ότι η $(\mathrm{id}\otimes u)\circ\delta_G$ είναι μορφισμός $L^\infty(G)$-διπρότυπων. Αυτό αληθεύει διότι $B(L^2(G))^{\delta_G} = L^\infty(G)$ και άρα θα έχουμε

$$(\mathrm{id}\otimes u)\circ\delta_G(fT) = (\mathrm{id}\otimes u)((f\otimes 1)\delta_G(T)) = f(\mathrm{id}\otimes u)(\delta_G(T)),$$

για κάθε $f \in L^\infty(G)$ και $T \in B(L^2(G))$.

Πρόταση 4.3.8. *Για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J του $L^1(G)$, το $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$ είναι το μεγαλύτερο non-degenerate $L(G)$-subcomodule του $(B(L^2(G)), \delta_G)$ που περιέχεται στο $\ker\Theta(J)$, δηλαδή*

$$\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp) = \overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{\widehat{\Theta}(u)(T):\ u\in A(G),\ T\in\ker\Theta(J)\}$$

και το $\ker\Theta(J)$ είναι το μικρότερο saturated $L(G)$-subcomodule του $(B(L^2(G)), \delta_G)$ που περιέχει το $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp)$, δηλαδή

$$\ker\Theta(J) = \{T\in B(L^2(G)):\ \widehat{\Theta}(u)(T)\in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^\perp),\ \forall u\in A(G)\}.$$

Συνεπώς, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) $\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}) = \ker\Theta(J)$.

(β) *Το* $(\ker\Theta(J), \delta_G)$ *είναι non-degenerate* $L(G)$*-comodule, δηλαδή*
$$\ker\Theta(J) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\widehat{\Theta}(A(G))(\ker\Theta(J))\}.$$

(γ) *Το* $(\mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp}), \delta_G)$ *είναι saturated* $L(G)$*-comodule, δηλαδή αν ο* $T \in B(L^2(G))$ *ικανοποιεί* $\widehat{\Theta}(u)(T) \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ $\forall u \in A(G)$, *τότε* $T \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα συνδυάζοντας την Πρόταση 4.3.7 με το Πόρισμα 3.3.7 και το Θεώρημα 3.3.8, καθώς
$$\widehat{\Theta}(u)(T) = (\mathrm{id}_{B(L^2(G))} \otimes u)(\delta_G(T)) = u \cdot T,$$
για κάθε $u \in A(G)$ και $T \in B(L^2(G))$ όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως (βλ. και (4.7)). □

Πόρισμα 4.3.9. *Αν κάθε τελεστής* $T \in B(L^2(G))$ *ικανοποιεί*
$$T \in \mathrm{Bim}_{L(G)}\{\widehat{\Theta}(u)(T) : \ u \in A(G)\}, \tag{4.8}$$
τότε $\ker\Theta(J) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ *για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες* J *του* $L^1(G)$. *Ειδικότερα, αν η συνθήκη* (4.8) *ικανοποιείται για κάθε* $T \in B(L^2(G))$, *τότε* $\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda))$ *για κάθε οικογένεια* $\Lambda \subseteq M(G)$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη (4.8) ικανοποιείται για κάθε τελεστή στον $B(L^2(G))$ και έστω J ένα κλειστό αριστερό ιδεώδες του $L^1(G)$. Αν ο $T \in B(L^2(G))$ ικανοποιεί $\widehat{\Theta}(u)(T) \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ για κάθε $u \in A(G)$, τότε προφανώς $T \in \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ από την (4.8). Επομένως από την ισοδυναμία των (α) και (γ) στην Πρόταση 4.3.8 έπεται ότι $\ker\Theta(J) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$.

Επίσης, αν $\Lambda \subseteq M(G)$ και η (4.8) ισχύει για κάθε τελεστή στον $B(L^2(G))$, τότε έχουμε
$$\widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda) = \ker\Theta(J(\Lambda)) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(J(\Lambda)^{\perp}) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(\mathcal{H}(\Lambda)).$$
□

Παρατήρηση 4.3.10. Η συνθήκη (4.8) σημαίνει ότι μπορούμε να ανακτήσουμε τον τελεστή $T \in B(L^2(G))$ από τις εικόνες του μέσω των απεικονίσεων $\widehat{\Theta}(u)$ για $u \in A(G)$ πολλαπλασιάζοντας ενδεχομένως με στοιχεία της $L(G)$ και παίρνοντας w*-όρια και γραμμικούς συνδυασμούς.

Παρατηρείστε ότι από την Πρόταση 2.3.14 έπεται ότι αν η G έχει την AP, τότε υπάρχει ένα δίκτυο $(u_i)_{i\in I}$ στην $A(G)$, τέτοιο ώστε
$$\widehat{\Theta}(u_i)(T) = u_i \cdot T \longrightarrow T, \text{ υπερασθενώς για κάθε } T \in B(L^2(G)).$$
Αυτή η συνθήκη είναι a priori ισχυρότερη της (4.8). Επομένως, το Πόρισμα 4.3.9 γενικεύει το [12, Theorem 5.5], σύμφωνα με το οποίο $\ker\Theta(J) = \mathrm{Bim}_{L(G)}(J^{\perp})$ για κάθε κλειστό αριστερό ιδεώδες J οφ $L^1(G)$ αν η G έχει την AP.

Βιβλιογραφία

[1] M. Amini, S. Echterhoff, H. Nikpey, *C^*-operator systems and crossed products*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 491 (2020), Issue 1, 124308.

[2] D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces by locally compact groups*, Studia Mathematica **258** (2021), no. 3, 241-267.

[3] D. Andreou, *Crossed products of dual operator spaces and a characterization of groups with the approximation property,* arXiv.org:2004.07169 (2020)

[4] M. Anoussis, A. Katavolos, I. G. Todorov, *Ideals of $A(G)$ and bimodules over maximal abelian selfadjoint algebras*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 6473-6500.

[5] M. Anoussis, A. Katavolos, I. G. Todorov, *Ideals of the Fourier algebra, supports and harmonic operators*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **161** (2016), 223-235.

[6] M. Anoussis, A. Katavolos, I. G. Todorov, *Bimodules over $VN(G)$, harmonic operators and the non-commutative Poisson boundary*, Studia Mathematica **249** (2019), 193-213.

[7] D. Blecher, C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules-an operator space approach*, Oxford University Press, 2004.

[8] J. de Canniere, U. Haagerup, *Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups*, Amer. J. Math. **107** (1985), no. 2, 455-500.

[9] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd Edition, Birkhäuser Basel, 2013.

[10] C.-H. Chu, A. T.-M. Lau, *Harmonic Functions on Groups and Fourier Algebras*. Berlin, Springer, 2002.

[11] M. Cowling, U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one*, Invent. Math. **96** (1989), 507-549.

[12] J. Crann, M. Neufang, *A non-commutative Fejér theorem for crossed products, the approximation property, and applications*, Int. Math. Res. Not. IMRN, to appear, arXiv.org:1901.08700.

[13] E. G. Effros, J. Kraus, and Z-J. Ruan, *On two quantized tensor products,* Operator Algebras, Mathematical Physics and Low Dimensional Topology (R. Herman and B. Tanbay, eds.), A. K. Peters, Wellesley, 1993, pp. 125-145.

[14] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, Oxford University Press, 2000.

[15] P. Eymard, *L' algèbre de Fourier d' un groupe localement compact,* Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181-236.

[16] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 2nd edition, 2016.

[17] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, Harmonic analysis on homogeneous spaces* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, 193-229.

[18] F. Ghahramani, *Isometric representation of $M(G)$ on $B(H)$*, Glasgow Math. J. 23 (1982), 119-122.

[19] M. Hamana, *Injective envelopes of dynamical systems*, Toyama Math. J., **34** (2011), 23-86.

[20] M. Hamana, *Tensor products for monotone complete C*-algebras, I*, Japanese J. Math. (N.S.), **8** (1982), no. 2, 259-283.

[21] S. J. Harris, Se-Jin Kim, *Crossed products of operator systems*, J. Funct. Anal. **276** (2019), 2156–2193.

[22] U. Haagerup, J. Kraus, *Approximation properties for group C*-algebras and group von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **344** (1994), no. 2, 667-699.

[23] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Volume I, Springer-Verlag, 1963.

[24] M. Izumi, *Non-commutative Poisson boundaries. In Discrete geometric analysis*, volume 347 of Contemp. Math., pages 69-81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[25] W. Jaworski, M. Neufang, *The Choquet-Deny equation in a Banach space*, Canadian J. Math., **59** (2007), 795-827.

[26] M. Junge, M. Neufang and Zh.-J. Ruan, *A representation theorem for locally compact quantum groups*, Internat. J. Math. **20** (2009), no. 3, 377-400.

[27] M. Kalantar, M. Neufang, Z.-J. Ruan, *Realization of quantum group Poisson boundaries as crossed products*, Bull. London Math. Soc., **46** (2014), 1267-1275.

[28] E. Kaniuth, *A course in commutative Banach algebras*, Graduate Texts in Math. Vol. 246. (Springer-Verlag, New York, 2009).

[29] E. G. Katsoulis, C. Ramsey, *Crossed Products of Operator Algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 258 (2019), no. 1240, DOI: https://doi.org/10.1090/memo/1240.

[30] J. Kraus, *The slice map problem for σ-weakly closed subspaces of von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **279** (1983), No 1, 357-376.

[31] J. Kraus, *The tensor product problem for reflexive algebras* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **23** (1990), No 2, 455-460.

[32] J. Kraus, *The slice map problem and approximation properties*, J. Funct. Anal. **102** (1991), 116-155.

[33] V. Lafforgue, M. de la Salle, *Non commutative L^p spaces without the completely bounded approximation property*, Duke Math. J., **160** (2011), no. 1, 71-116.

[34] M. Landstad, *Duality theory for covariant systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **248** (1979), no. 2, 223-267.

[35] M. Landstad, *Duality for dual covariance algebras*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 191-202.

[36] H. Leptin, *Sur l' algèbre de Fourier d' un groupe localement compact*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **266** (1968), 1180-1182.

[37] Y. Nakagami, *Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group*, Publ RIMS, Kyoto University, **12** (1977), 727-775.

[38] Y. Nakagami, M. Takesaki, *Duality for crossed products of von Neumann algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 731, Springer-Verlag, 1979.

[39] Ch.-K. Ng, *Coactions on operator spaces and exactness,* Preprint https://www.researchgate.net/publication/288604716_Coactions_on_Operator_spaces_and_Exactness

[40] M. Neufang, Abstrakte harmonische Analyse und Modulhomomorphismen über von Neumann-Algebren. Ph.D. thesis at University of Saarland, Saarbrücken, Germany, 2000.

[41] M. Neufang, V. Runde, *Harmonic operators: the dual perspective*, Math. Z. **255** (2007), no. 3, 669-690.

[42] M. Neufang, Zh.-J. Ruan and N. Spronk, *Completely isometric representations of $M_{cb}A(G)$ and $UCB(\hat{G})^*$*, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 3, 1133-1161.

[43] A. L. T. Paterson, *Amenability.* Mathematical Surveys and Monographs 29, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1988.

[44] P. Salmi, A. Skalski, *Actions of locally compact quantum groups on ternary rings of operators, their crossed products and generalized Poisson boundaries*, Kyoto J. Math., **57** (2017), no. 3, 667-691.

[45] E. Størmer, *Regular abelian Banach algebras of linear maps of operator algebras*, J. Funct. Anal., **37** (1980), 331-373. Functional Analysis, 37 (1980), 331-373.

[46] Ş. Strătilă, *Modular Theory in Operator Algebras*, Abacus Press, 1981.

[47] Ş. Strătilă, L. Zsidó, *Lectures on von Neumann algebras*, Editura Academiei and Abacus Press, 1979.

[48] Ş. Strătilă, D. Voiculescu, L. Zsidó, *Sur les produits croisés*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **282** (1976), 779-782.

[49] Ş. Strătilă, D. Voiculescu, L. Zsidó, *On crossed products I*, Revue Roum. Math. Pures et Appl., Tome XXI, no. 10, 1411-1449, 1976.

[50] Ş. Strătilă, D. Voiculescu, L. Zsidó, *On crossed products II*, Revue Roum. Math. Pures et Appl., Tome XXII, no. 11, 83-117, 1977.

[51] M. Takesaki, *Duality for crossed products and structure of type III von Neumann algebras*, Acta Math., **131** (1967), 249-310.

[52] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. I, Springer-Verlag, 1979.

[53] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. II, Springer-Verlag, 2003.

[54] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. III, Springer-Verlag, 2003.

[55] J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, Seminar Notes, Univ. of Copenhagen, 1970.

[56] O. Uuye, J. Zacharias, *The Fubini product and its applications*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **43**, no. 6 (2020), 4041–4061.

[57] L. Van Heeswijck, *Duality in the theory of crossed products*, Math. Scand., **44** (1979), 313-329.

Ευρετήριο συμβόλων

Ευρετήριο όρων