Καστης Ελευθεριος

Το Θεώρημα Μοναδικότητας των Stone και von Neumann

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 2011

Αφιερώνεται στην
οικογένεια μου

Περίληψη

Στον χώρο $L^2(\mathbb{R}, m)$ ορίζονται οι μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ και $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, όπου $(S_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$ και $(T_t f)(x) = f(x-t)$. Παρατηρούμε ότι οι ομάδες αυτές ικανοποιούν τις σχέσεις του Weyl:

$$S_\lambda T_t = e^{i\lambda t} T_t S_\lambda, \ \forall \lambda, t \in \mathbb{R},$$

που είναι μία μορφή της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg από την κβαντομηχανική.

Από το θεώρημα μοναδικότητας των Stone και von Neumann , προκύπτει ότι για κάθε ζεύγος SOT-συνεχών μονοπαραμετρικών ομάδων unitary τελεστών $\{U_\lambda\}_\lambda$, $\{V_t\}_t$ σε ένα διαχωρίσμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, οι οποίες πληρούν τις σχέσεις του Weyl και δεν έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο εκτός των τετριμμένων, υπάρχει unitary τελεστής $\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}, m) \to \mathcal{H}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $U_\lambda = RS_\lambda R^*$ και $V_t = RT_t R^*$, για κάθε $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

Στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση των βασικών αποτελεσμάτων, που οδηγούν σε μία απόδειξη του θεωρήματος αυτού. Εργαλεία για αυτή την απόδειξη είναι η θεωρία αβελιανών αλγεβρών von Neumann.

Ειδικότερα, αποδεικνύουμε αρχικά ότι μετά από μία unitary ισοδυναμία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία από τις δύο ομάδες είναι η $S_\lambda^{(n)}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Εδώ χρησιμοποιούμε τη θεωρία πολλαπλότητας αβελιανών αλγεβρών von Neumann, καθώς και το θεώρημα του Stone, που χαρακτηρίζει τις SOT-συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών.

Στο δεύτερο βήμα, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία unitary ισοδυναμία, η οποία απεικονίζει την άλλη ομάδα στην $T_t^{(n)}$, ενώ σταθεροποιεί την $S_\lambda^{(n)}$. Η απουσία κοινού αναλλοίωτου υπόχωρου οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα $n = 1$. Εδώ τα βασικά εργαλεία είναι μετροθεωρητικά.

Abstract

On the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}, m)$, we define the one parameter unitary groups $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ and $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, where $(S_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$ and $(T_t f)(x) = f(x - t)$. These two groups satisfy the Weyl relations :

$$S_\lambda T_t = e^{i\lambda t} T_t S_\lambda, \ \forall \lambda, t \in \mathbb{R},$$

which is a form of Heisenberg's Uncertainty Principle of Quantum Mechanics. The theorem of Stone-von Neumann states that for every two jointly irreducible SOT-continuous one parameter unitary groups $\{U_\lambda\}_\lambda$, $\{V_t\}_t$ on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$, which satisfy the Weyl relations, there is a unitary operator $\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}, m) \to \mathcal{H}$, mapping U_λ to S_λ and V_t to T_t.

In this study we give a proof of the above theorem, using the theory of abelian von Neumann algebras.

In particular, we first prove that after a unitary equivalence, we may assume that U_λ is $S_\lambda^{(n)}$, for some $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. The crucial tools here are the multiplicity theory of abelian von Neumann algebras and Stone's theorem, which characterizes the SOT-continuous one parameter unitary groups.

The second step is to prove that there is a unitary operator which carries V_t to $T_t^{(n)}$ and leaves $S_\lambda^{(n)}$ fixed. The fact that $\{U_\lambda\}_\lambda, \{V_t\}_t$ act jointly irreducibly on $\mathcal{H}$ then forces $n = 1$. Our main arguments in this step are measure-theoretic.

Εισαγωγή

Στην κβαντομηχανική, τα παρατηρήσιμα μεγέθη αναπαρίστανται μέσω γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert. Στην κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου, δηλαδή ενός σωματιδίου το οποίο δεν δέχεται καμία εξωτερική επίδραση, υπάρχουν δύο σημαντικά παρατηρήσιμα μεγέθη : η **θέση** και η **ορμή**. Η περιγραφή αυτων των δύο παρατηρήσιμων μεγεθών, γίνεται μέσω του τελεστή θέσης Q και του τελεστή ορμής P, οι οποίοι είναι μη φραγμένοι και ορίζονται αντίστοιχα ως εξής :

$$D(Q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, m) \ : \ \mathrm{id} \cdot f \in L^2(\mathbb{R}, m)\} \text{ και } (Qf)(x) = (\mathrm{id} \cdot f)(x) = xf(x)$$
$$D(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, m) \ : \ f \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}),\ f' \in L^2(\mathbb{R}, m)\}\ ^1 \text{ και } (Pf)(x) = -if'(x)$$

Παρατηρούμε ότι ο υπόχωρος $D(PQ) \cap D(QP)$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}, m)$, αφού περιέχει τον χώρο του Schwarz, και ότι για κάθε f σε αυτό τον υπόχωρο ισχύει :

$$(PQ - QP)f = -if$$

δηλαδή οι δύο τελεστές ικανοποιούν την λεγόμενη **κανονική σχέση μετάθεσης (canonical commutation relation-CCR)**.

Ένα κλασικό πρόβλημα στην μαθηματική θεμελίωση της κβαντικής μηχανικής είναι ο αφηρημένος χαρακτηρισμός των P, Q, δηλαδή ποιες ιδιότητες πρέπει να έχουν δύο αυτοσυζυγείς τελεστές A, B, οι οποίοι δρουν σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και δεν έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο, για να υπάρχει unitary τελεστής $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, m)$, ώστε $UAU^{-1} = P$ και $UBU^{-1} = Q$. Αποδεικνύεται ότι η συνθήκη “ οι τελεστές A, B ικανοποιούν την CCR ” δεν αποτελεί ένα τέτοιο χαρακτηρισμό. Πράγματι, ορίζουμε τους τελεστές :

$$M_f : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : g \mapsto fg, \text{ όπου } f(x) = x, \forall x \in [0,1]$$
$$P_1 : D(P_1) \to L^2[0,1] : g \mapsto -ig', \text{ όπου } D(P_1) = \{\psi \in \mathcal{AC}[0,1] : \psi(0) = \psi(1)\}$$

[1] $\mathcal{AC}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f$ απόλυτα συνεχής$\}$

Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $\psi \in D(P_1 M_f) \cap D(M_f P_1)$, οι τελεστές M_f, P_1 ικανοποιούν την CCR, όμως το φάσμα του τελεστή P_1 είναι το διακριτό σύνολο $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, το οποίο είναι άτοπο καθώς το φάσμα και των δύο τελεστών, θέσης και ορμής, είναι το $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα του Stone([11]), υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ αυτοσυζυγών τελεστών και SOT-συνεχών μονοπαραμετρικών ομάδων unitary τελεστών. Μάλιστα, παρατηρούμε εάν οι ομάδες τελεστών που προκύπτουν εφαρμόζοντας Συναρτησιακό Λογισμό ([10]) στους τελεστές Q, P αντίστοιχα είναι $e^{i\lambda Q} = S_\lambda$, όπου $(S_\lambda f)(x) = e^{i\lambda x} f(x)$ και $e^{itP} = T_t$, όπου $(T_t f)(x) = f(x-t)$, τότε έχουμε :

$$S_\lambda T_t = e^{i\lambda t} T_t S_\lambda$$

Αντίστροφα, έστω δύο SOT-συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών $\{U_\lambda\}_\lambda$, $\{V_t\}_t$, οι οποίες ικανοποιούν τις **σχέσεις του Weyl** :

$$U_\lambda V_t = e^{i\lambda t} V_t U_\lambda \, , \, \forall \lambda, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Αν ονομάσουμε A, B τους απειροστούς γεννήτορες των δύο ομάδων, τότε υπάρχει ένας πυκνός υπόχωρος, αναλλοίωτος από τους A και B, στον οποίο ικανοποιούν την CCR.

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην ταξινομηση των ζευγών SOT-συνεχών μονοπαραμετρικών ομάδων unitary τελεστών, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις του Weyl και δεν έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο. Η απάντηση δόθηκε από τους John von Neumann και Marshall Stone το 1931 : Όλα αυτά τα ζεύγη είναι unitarily ισοδύναμα, δηλαδή εάν $\{U_\lambda\}_\lambda, \{V_t\}_t$ ένα τέτοιο ζεύγος, τότε υπάρχει unitary τελεστής $W : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, m)$, ώστε $W U_\lambda W^{-1} = S_\lambda$ και $W V_t W^{-1} = T_t$.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία απόδειξη του θεωρήματος Stone - von Neumann , χρησιμοποιώντας θεωρία φραγμένων τελεστών και αβελιανών αλγεβρών von Neumann . Η ιδέα της απόδειξης αυτής στηρίχθηκε στο βιβλίο "Lectures on Invariant Subspaces" του H. Helson. Στην εργασία αυτή, στοιχειώδεις γνώσεις θεωρίας αλγεβρών Banach και ανάλυσης Fourier θεωρούνται γνωστές.

Θεωρώ ιδιαίτερη υποχρέωση μου να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κατάβολο για την συνεχή του στήριξη και τις καίριες επεμβάσεις του. Η συμβολή του κατά την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας υπήρξε ανεκτίμητη. Επιπλέον ευχαριστώ τους καθηγητές κ. Μιχάλη Ανούση και κ. Απόστολο Γιαννόπουλο για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπη, καθώς και τους υπόλοιπους καθηγητές μου, για τα εφόδια, μαθηματικά ή μη, που μου πρόσφεραν σε όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Τοπολογίες στον $\mathbf{B}(\mathcal{H})$

Ορισμός 1.1. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert . Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, η συνάρτηση*

$$p_x : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R} : T \mapsto \|Tx\|$$

είναι μία ημινόρμα στον $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Μάλιστα, η οικογένεια ημινορμών $\{p_x : x \in \mathcal{H}\}$ διαχωρίζει τα σημεία του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$, οπότε ορίζει μια τοπικά κυρτή τοπολογία στο χώρο αυτό, την οποία θα καλούμε ***ισχυρή τοπολογία τελεστών (Strong Operator Topology, SOT)****.*
Η SOT-τοπολογία έχει ως βάση περιοχών ενός τελεστή $T_0 \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, την οικογένεια:

$$V(T_0 : x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : \|(T - T_0)x_j\| < \varepsilon,\ (j = 1, \ldots, m)\},$$

όπου $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ και $\varepsilon > 0$.
Ένα δίκτυο $(T_i)_{i \in I}$ φραγμένων τελεστών συγκλίνει στον τελεστή $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ ως προς την SOT-τοπολογία αν και μόνον αν $\|T_i x - Tx\| \to 0,\ \forall x \in \mathcal{H}$.

Έστω χώρος Hilbert $\mathcal{H}$. Ορίζουμε στο χώρο των προβολών που δρουν στον $\mathcal{H}$, την ακόλουθη σχέση μερικής διάταξης :

$$P \leq Q \Leftrightarrow P(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H}),$$

για κάθε δύο προβολές $P, Q \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$.

Ορισμός 1.2. *Δοθείσης μίας οικογένειας $\{N_i : i \in I\}$ κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ συμβολίζουμε $\wedge N_i$ το μεγαλύτερο κλειστό υπόχωρο, ο οποίος περιέχεται σε κάθε N_i, και $\vee N_i$ τον ελάχιστο κλειστό υπόχωρο, ο οποίος περιέχει κάθε N_i.*

Παρατηρούμε ότι $\wedge N_i = \bigcap_{i \in I} N_i$, ενώ $\vee N_i$ είναι ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος που *παράγεται από την* $\bigcup_{i\in I} N_i$. *Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το σύνολο των προβολών* $\{P_i = proj(N_i), i \in I\}$ *έχει supremum την προβολή* $\vee P_i = proj(\vee N_i)$, *και infimum την προβολή* $\wedge P_i = proj(\wedge N_i)$.

Πρόταση 1.1. *Έστω* $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ένα αύξον δίκτυο προβολών σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *και* $E = \bigvee_{\alpha\in A} E_\alpha$. *Τότε έχουμε ότι* $E = SOT\text{-}\lim_\alpha E_\alpha$

Απόδειξη. Αφού το δίκτυο υποχώρων $(E_\alpha(\mathcal{H}))_\alpha$ είναι αύξον, το σύνολο $\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha(\mathcal{H})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$, οπότε $E(\mathcal{H}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha(\mathcal{H})}$.
Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον $Ex \in E(\mathcal{H})$, υπάρχει $y \in E_\alpha(\mathcal{H})$, για κάποιο $\alpha \in A$, ώστε $\|Ex - y\| < \varepsilon$. Για κάθε $b \geq \alpha$, παρατηρούμε ότι $E_\alpha \leq E_b \leq E$, οπότε έχουμε $y \in E_\alpha(\mathcal{H}) \subseteq E_b(\mathcal{H}) \subseteq E(\mathcal{H})$. Έπεται λοιπόν ότι :

$$\|Ex - E_b x\| = \|E(Ex - y) - E_b(Ex - y)\| \leq \|E - E_b\| \, \|Ex - y\| < \varepsilon.$$

□

Πόρισμα 1.1. *Έστω* $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ένα φθίνον δίκτυο προβολών σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *και* $E = \bigwedge_{\alpha\in A} E_\alpha$. *Εφόσον* $\bigwedge_{\alpha\in A} E_\alpha = I - \bigvee_{\alpha\in A} E_\alpha$ *έχουμε ότι* $E = SOT\text{-}\lim_\alpha E_\alpha$

Πρόταση 1.2. *Έστω* $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ένα δίκτυο κάθετων ανά δύο προβολών, οι οποίες δρουν σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *και* $E = \bigvee_{\alpha\in A} E_\alpha$. *Τότε για κάθε* $x \in \mathcal{H}$ *έχουμε ότι* $Ex = \sum_\alpha E_\alpha x$.

Απόδειξη. Εάν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε η πρόταση είναι προφανής.
Έστω ότι το A είναι άπειρο σύνολο. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{F : F \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } A\}.$$

Για κάθε $F \in \mathcal{F}$ ορίζουμε $G_F = \bigvee_{\alpha\in F} E_\alpha = \sum_{\alpha\in F} E_\alpha$. Το σύνολο $(\{G_F : F \in \mathcal{F}\}, \supseteq)$ είναι αύξον δίκτυο προβολών, και $\bigvee_{F\in\mathcal{F}} G_F = \bigvee_{\alpha\in F} E_\alpha = E$. Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση έχουμε : $Ex = \sum_{F\in\mathcal{F}} G_F x = \sum_\alpha E_\alpha x$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.3. *Έστω χώρος Hilbert* $\mathcal{H}$. *Η* ***ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, WOT)*** *είναι η ασθενέστερη τοπολογία ώστε να είναι συνεχή τα γραμμικά συναρτησοειδή :*

$$\omega_{x,y} : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} : T \mapsto \langle Tx, y\rangle.$$

Εάν $\omega_{x,y}(T) = 0$, *για κάθε* $x, y \in \mathcal{H}$, *τότε* $T = 0$, *οπότε η οικογένεια* $\{\omega_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$ *διαχωρίζει τα σημεία του* $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. *Έπεται λοιπόν ότι η WOT-τοπολογία είναι τοπικά κυρτή.*

Η οικογένεια των συνόλων της μορφής :

$$V(T_0 : x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \varepsilon) = \{T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : |\langle (T - T_0)x_j, y_j \rangle| < \varepsilon,\ (j = 1, \dots, n)\},$$

όπου $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$ *και* $\varepsilon > 0$, *αποτελεί βάση περιοχών ενός τελεστή* $T_0 \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, *ως προς την WOT-τοπολογία. Ως προς αυτήν την τοπολογία, ένα δίκτυο* $(T_i)_{i \in I}$ *συγκλίνει στον τελεστή* T *αν και μόνο αν* $\langle T_i x, y \rangle \to \langle Tx, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Λήμμα 1.1. *Μία γραμμική μορφή* $\omega : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ *είναι WOT-συνεχής αν και μόνον αν είναι SOT-συνεχής.*

Απόδειξη. (*i*) Εφόσον η SOT-τοπολογία είναι ισχυρότερη της WOT, έπεται ότι εάν η ω είναι WOT-συνεχής, τότε είναι SOT-συνεχής.

(*ii*) Έστω ότι η ω είναι SOT-συνεχής. Επομένως υπάρχει μία SOT-βασική περιοχή του 0, έστω

$$W = \{T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) \ : \ \sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^2 < \varepsilon^2\},$$

ώστε $|\omega(T)| < 1$, για κάθε $T \in W$. Θέτοντας $y_k = \frac{2}{\varepsilon} x_k$ και $p(T) = (\sum_{k=1}^{n} \|Ty_k\|^2)^{1/2}$, έχουμε ότι

$$W = \{T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) \ : \ p(T) < 2\}.$$

Ισχυρισμός : $|\omega(T)| \leq (\sum_{k=1}^{n} \|Ty_k\|^2)^{1/2}, \forall T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$.

Αν $p(T) = 0$, τότε $mT \in W$, οπότε $|\omega(mT)| < 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $|\omega(T)| = 0$ και συνεπώς ισχύει ο ισχυρισμός. Αν πάλι $p(T) \neq 0$, τότε $\frac{T}{p(T)} \in W$, οπότε $|\omega(\frac{T}{p(T)})| < 1$, άρα $|\omega(T)| < p(T)$, και ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $K = \{(Ty_1, Ty_2, \dots, Ty_n) \ : \ T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})\} \subseteq \mathcal{H}^n$. Παρατηρούμε ότι εάν $(Ty_1, Ty_2, \dots, Ty_n) = 0$, τότε από τον ισχυρισμό, έχουμε $|\omega(T)| = 0$.

Συνεπώς η απεικόνιση

$$\phi : K \to \mathbb{C} : (Ty_1, Ty_2, \dots, Ty_n) \mapsto \omega(T)$$

είναι καλά ορισμένη, προφανώς γραμμική, αλλά και συνεχής ως προς την νόρμα του $\mathcal{H}^n$. Συνεπώς επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathcal{H}^n$, οπότε από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ([10]), υπάρχει διάνυσμα

$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}^n$, ώστε :

$$\phi(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) = \langle (Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n), (u_1, u_2, \ldots, u_n)\rangle_{\mathcal{H}^n} = \sum_{k=1}^{n} \langle Ty_k, u_k\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{y_k,u_k}(T)$$

για κάθε $(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) \in K$, δηλαδή

$$\omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{y_k,u_k}(T)$$

για κάθε $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Συνεπώς η ω είναι WOT-συνεχής ως γραμμικών συνδυασμός των WOT-συνεχών ω_{y_k,u_k}, $k = 1, 2, \ldots, n$.

□

Λήμμα 1.2. *Ένα κυρτό υποσύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$ είναι SOT-κλειστό αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστό.*

Απόδειξη. Εφόσον η WOT-τοπολογία είναι ασθενέστερη της SOT-τοπολογίας στον $\mathbf{B}(\mathcal{H})$, έπεται ότι $\overline{\mathcal{S}}^{SOT} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{WOT}$.
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να δείξουμε ότι $T \notin \overline{\mathcal{S}}^{SOT} \Rightarrow T \notin \overline{\mathcal{S}}^{WOT}$. Έστω λοιπόν $T \notin \overline{\mathcal{S}}^{SOT}$. Τότε από το θεώρημα Hahn - Banach ([14]), υπάρχει SOT-συνεχής γραμμική μορφή ω, $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $Re\omega(T) > \lambda$ και $Re\omega(S) < \lambda$, $\forall S \in \mathcal{S}$. Από το προηγούμενο λήμμα η ω είναι WOT-συνεχής, άρα έπεται ότι $T \notin \overline{\mathcal{S}}^{WOT}$ □

Πρόταση 1.3. *Η μοναδιαία μπάλα $(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1$ του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ είναι WOT-συμπαγής.*

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{D}_{x,y} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\,\|y\|\}$. Αν εφοδιάσουμε το χώρο $\prod_{x,y\in\mathcal{H}} \mathbb{D}_{x,y}$ με την τοπολογία γινόμενο, η απεικόνιση

$$\psi : (\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1 \to \psi[(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1] \subseteq \prod_{x,y\in\mathcal{H}} \mathbb{D}_{x,y} : T \mapsto \{\langle Tx, y\rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$$

είναι ομοιομορφισμός, εφόσον είναι συνεχής και ανοιχτή. Από το θεώρημα του Tychonoff ο χώρος $\prod_{x,y\in\mathcal{H}} \mathbb{D}_{x,y}$ είναι συμπαγής χώρος, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\psi[(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1]$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\prod_{x,y\in\mathcal{H}} \mathbb{D}_{x,y}$.
Έστω $b \equiv \{b(x, y) : x, y \in \mathcal{H}\} \in \overline{\psi[(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1]}$. Για κάθε $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ και $\varepsilon > 0$

υπάρχει τελεστής $T \in (\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1$, ώστε :

$$
\begin{aligned}
&|\alpha\, b(x_j, y_k) - \alpha\langle T x_j, y_k\rangle| < \varepsilon \\
&|b(x_j, y_k) - \langle T x_j, y_k\rangle| < \varepsilon \\
&|b(\alpha x_1 + x_2, y_k) - \langle T(\alpha x_1 + x_2, y_k\rangle| < \varepsilon \\
&|b(x_j, \alpha y_1 + y_2) - \langle T x_j, \alpha y_1 + y_2\rangle| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

όπου $j, k \in \{1, 2\}$. Συνεπώς, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει ότι :

$$
\begin{aligned}
&|b(\alpha x_1 + x_2, y_1) - \alpha\, b(x_1, y_1) - b(x_2, y_1)| < 3\varepsilon \\
&|b(x_1, \alpha y_1 + y_2) - \overline{\alpha}\, b(x_1, y_1) - b(x_1, y_2)| < 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Επομένως, εφόσον $|b(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ καθώς $b(x, y) \in \mathbb{D}_{x,y}$, η σχέση $(x, y) \mapsto b(x, y)$ είναι φραγμένη sesquilinear μορφή. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει τελεστής $T_0 \in (\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1$, ώστε $b(x, y) = \langle T_0 x, y\rangle$, $x, y \in \mathcal{H}$. Οπότε δείξαμε ότι $b \in \psi[(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1]$, άρα το σύνολο $\psi[(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1]$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\prod\limits_{x,y\in\mathcal{H}} \mathbb{D}_{x,y}$. □

Κεφάλαιο 2

Φασματική Θεωρία

2.1 Το Φασματικό Θέωρημα

Ορισμός 2.1. ***Φασματική ανάλυση της μονάδας*** *στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται μία οικογένεια προβολών $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες :*

- $s \leq t \Rightarrow E_s \leq E_t$
- $SOT\text{-}\lim\limits_{t \to -\infty} E_t = 0$
- $SOT\text{-}\lim\limits_{t \to +\infty} E_t = I$
- *η απεικόνιση $t \mapsto E_t$ είναι SOT-δεξιά συνεχής, δηλαδή $SOT - \lim\limits_{t \searrow t_0} E_t = E_{t_0}$.*

Φορέας *της $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ καλείται το συμπλήρωμα της ένωσης όλων των ανοιχτών διαστημάτων (a, b), όπου $E_a = E_b$.*

Πρόταση 2.1. *Έστω $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ μία φασματική ανάλυση της μονάδας, σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, με φορέα το κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$.*
Για κάθε κλιμακωτή συνάρτηση $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1}] \cap F}$ στο F, ορίζουμε τον τελεστή:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dE_t \stackrel{o\rho}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) \stackrel{\sigma\upsilon\mu\beta}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) \tag{2.1}$$

Συμβολίζοντας $\mathbf{St}(F)$ *την άλγεβρα των κλιμακωτών συναρτήσεων επί του* F*, ορίζουμε την συνάρτηση:*

$$\varphi : (\mathbf{St}(F), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dE \tag{2.2}$$

Η φ *είναι* $*$*-μορφισμός* $*$*-αλγεβρών και ισομετρία χώρων με νόρμα. Συνεπώς υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση στην πλήρωση του χώρου* $\mathbf{St}(F)$ *ως προς την supremum νόρμα, η οποία είναι ισομετρική.*

Απόδειξη. **(i)** *Η* φ *είναι* $*$*-μορφισμός.*

Έστω $f, g \in (\mathbf{St}(F)), \mu \in \mathbb{C}$. Παίρνοντας την ένωση των διαμερίσεων μπορούμε να υποθέσουμε δίχως βλάβη, ότι $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1}]|_F}$, $g = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1}]|_F}$

(α) $\varphi(f+g) = \int_{\mathbb{R}} (f+g) dE = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) =$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \; E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) = \int_{\mathbb{R}} f dE + \int_{\mathbb{R}} g dE = \varphi(f) + \varphi(g)$$

(β) $\varphi(fg) = \int_{\mathbb{R}} (fg) dE = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) \sum_{i=1}^{n} \mu_i E((\alpha_i, \alpha_{i+1}]) = \int_{\mathbb{R}} f dE \int_{\mathbb{R}} g dE = \varphi(f)\varphi(g)$$

καθώς, αν $(a, b] \cap (c, d] = \emptyset$, τότε $E((a, b])E((c, d]) = 0$.

(γ) $\varphi(\mu f) = \int_{\mathbb{R}} \mu f dE = \sum_{k=1}^{n} \mu \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) = \mu \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) =$

$$= \mu \int_{\mathbb{R}} f dE = \mu \varphi(f)$$

(δ) $\varphi(f^*) = \int_{\mathbb{R}} f^* dE = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) = \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}])]^* =$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) \right]^* = \left[\int_{\mathbb{R}} f dE \right]^* = [\varphi(f)]^*$$

(ii) *Η* φ *είναι ισομετρία.*

Για κάθε $h \in \mathcal{H}$, έχουμε:

$$\|\varphi(f)h\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\alpha_k, \alpha_{k+1}]) h \right\|_2^2 \overset{\Pi.\Theta.^1}{=} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \|E((\alpha_k, \alpha_{k+1}])h\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{n} \|E((\alpha_k,\alpha_{k+1}])h\|_2^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \|f\|_\infty^2 \left\| \sum_{k=1}^{n} E(\alpha_k,\alpha_{k+1}])h \right\|_2^2 \leqslant \|f\|_\infty^2 \|h\|_2^2.$$

Άρα $\|\varphi(f)\| \leq \|f\|_\infty$.

Έστω τώρα $|\lambda_{k_0}| = max\{|\lambda_k| : k = 1,2,...,n\} = \|f\|_\infty$.

Αφού ο φορέας της $E(\cdot)$ είναι το F, υπάρχει $x \in ran(E((\alpha_{k_0},\beta_{k_0}]))$, οπότε έχουμε $\|\varphi(f)x\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(\alpha_k,\alpha_{k+1}])x \right\|_2^2 = |\lambda_{k_0}|_2^2 \|x\|_2^2$, δηλαδή $\|\varphi(f)\| \geq |\lambda_{k_0}| = \|f\|_\infty$.

Συνεπώς, δείξαμε ότι $\|\varphi(f)\| = \|f\|_\infty$. Επομένως η φ δέχεται συνεχή επέκταση Φ_0 στην $\|\cdot\|_\infty$-κλειστή θήκη των κλιμακωτών συναρτήσεων στο F, η οποία περιέχει την άλγεβρα

$$C_0(F) = \begin{cases} C(F) & \text{αν } F \text{ συμπαγές,} \\ \left\{ f : F \to \mathbb{C} : \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

□

Ορισμός 2.2. *Μία $*-$**αναπαράσταση** μιας $*$-άλγεβρας $\mathcal{A}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ένας $*$-μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$.*

Λήμμα 2.1. *Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κάθε $*-$αναπαράσταση π της $C_0(F)$ είναι συστολή.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι η π διατηρεί τη διάταξη. Αν $f \in C_0(F)$ ώστε $f \geq 0$, τότε η συνάρτηση $g = \sqrt{f}$ ανήκει στην $C_0(F)$, και μάλιστα $f = gg^*$. Επομένως, έχουμε ότι : $\Phi_0(f) = \Phi_0(gg^*) = \Phi_0(g)\left[\Phi_0(g)\right]^* = |\Phi_0(g)|^2 \geq 0$.

Έστω τώρα $f \in C_0(F)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$. Η συνάρτηση $1 - f^*f = 1 - |f|^2$ είναι μη αρνητική, οπότε $\pi(1-|f|^2) \geq 0$, άρα $\langle (I - \pi(f^*f))x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{H}$.

Συνεπως $\|\pi(f)x\|^2 = \langle \pi(f)x, \pi(f)x\rangle = \langle \pi(f^*f)x, x\rangle \leq \|x\|^2$, δηλαδή δείξαμε ότι $\|\pi(f)\| \leq 1$. □

Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τους χώρους συναρτήσεων:

$$\mathcal{W}_+(F) = \left\{ f : F \to \mathbb{R}_+ \mid f \text{ φραγμένη, } \exists\ f_n \in C_0(F) : f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f \right\}$$

και $\mathcal{W}(F)$ τον γραμμικό χώρο που παράγεται από την $\mathcal{W}_+(\mathcal{F})$.

[1] Πυθαγόρειο Θεώρημα

Μάλιστα, παρατηρούμε ότι ο χώρος $\mathcal{W}(F)$ είναι άλγεβρα, καθώς είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό δακτυλίου. Αρκεί να δείξουμε ότι εάν $f, g \in \mathcal{W}_+(F)$, τότε $fg \in \mathcal{W}_+(F)$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση fg είναι φραγμένη. Από τον ορισμό του $\mathcal{W}_+(F)$, υπάρχουν $f_n, g_n \in C_0(F)$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$ και $g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} g$. Είναι προφανές ότι $f_n g_n \in C_0(F)$, $n \in \mathbb{N}$ και $f_n g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} fg$, οπότε έπεται ότι $fg \in \mathcal{W}_+(F)$.

Πρόταση 2.2. *Κάθε ισομετρική $*$-αναπαράσταση $\Phi_0 : C_0(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ επεκτείνεται μοναδικά σε $*$-μορφισμό $\Phi : \mathcal{W}(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα :*

$$\forall f_n, f \in \mathcal{W}_+(F),\ n \in \mathbb{N},\ f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f \Rightarrow \Phi(f) = SOT\text{-}\lim_n \Phi(f_n) \tag{2.3}$$

Επιπλέον, τότε η Φ είναι συστολή και διατηρεί τη διάταξη.

Απόδειξη. (1) *Επέκταση της Φ_0 στην $\mathcal{W}_+(F)$*

Έστω $f \in \mathcal{W}_+(F)$ και $f_n \in C_0(F)$, ώστε $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$.

Έπεται ότι : $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \Rightarrow \|\Phi_0(f_n)\| = \|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$

δηλαδή ότι η ακολουθία τελεστών $\{\Phi_0(f_n)\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Από το θεώρημα Banach - Steinhaus ([14]) υπάρχει ο τελεστής SOT-$\lim_n \Phi_0(f_n)$ και είναι φραγμένος.

Ορίζουμε $\Phi_+(f) = \text{SOT-}\lim_n \Phi_0(f_n)$, $\forall f \in \mathcal{W}_+(F)$

Ισχυρισμός: Η Φ_+ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση

Έστω $g_m \in C_0(F), m \in \mathbb{N}$, ώστε $g_m \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$. Ορίζουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση :

$$f_n \wedge g_m : F \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto min\{f_n(x), g_m(x)\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f_n \wedge g_m \overset{m}{\to} f_n \wedge f = f_n$ ομοιόμορφα στο F.

Πράγματι, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\ K \subset F$ συμπαγές ώστε $f_n(x) \le \varepsilon$, $\forall x \notin K$.

Εφόσον $0 \le (f_n \wedge g_m)(x) \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f_n(x) \le \varepsilon$, $\forall x \notin K, \forall m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $|(f_n \wedge g_m)(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \notin K, \forall m \in \mathbb{N}$

Στο συμπαγές K ισχύει ότι $f_n \wedge g_m \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f_n$, οπότε από το Θεώρημα Dini έχουμε ότι $\|\cdot\|_\infty - \lim_m f_n \wedge g_m = f_n$ στο K.

Συνεπώς, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\lim_m f_n \wedge g_m = f_n$ ομοιόμορφα στο F,

άρα $\|\cdot\| - \lim_m \Phi_0(f_n \wedge g_m) = \Phi_0(f_n)$.

Οπότε, αφού όπως πριν, ορίζεται από το Banach - Steinhaus ο φραγμένος

τελεστής SOT-$\lim\limits_m \Phi_0(f_n \wedge g_m)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε :
SOT-$\lim\limits_m \Phi_0(g_m) \geq$ SOT-$\lim\limits_m \Phi_0(f_n \wedge g_m) = \Phi_0(f_n)$
$\Rightarrow$ SOT-$\lim\limits_m \Phi_0(g_m) \geq$ SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n)$
Εναλλάσσοντας τις θέσεις των f_n, g_m στον προηγούμενο συλλογισμό έχουμε και την αντίστροφη ανισότητα, οπότε δείξαμε ότι SOT-$\lim\limits_m \Phi_0(g_m)$ =SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έστω $f, g \in \mathcal{W}_+(F)$, δηλαδή $\exists\ f_n, g_n \in C_0(F)$ ώστε $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f,\ g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} g$.
Έπεται λοιπόν ότι $f_n + g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f + g$, και μάλιστα ισχύει ότι:
$\Phi_+(f+g) =$ SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n+g_n) =$ SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n)+$SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(g_n) = \Phi_+(f)+\Phi_+(g)$, δηλαδή $\Phi_+(f+g) = \Phi_+(f) + \Phi_+(g)$. Όμοια, έχουμε ότι $\Phi_+(cg) = c\Phi_+(g)$, για κάθε $c \geq 0$.
Εξάλλου, επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι ακολουθιακά[2] SOT-συνεχής έχουμε :
$\Phi_+(f)\Phi_+(g) =$ SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n)$SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(g_n) =$ SOT-$\lim\limits_n [\Phi_0(f_n)\Phi_0(g_n)] =$
$=$ SOT-$\lim\limits_n \Phi_0(f_n g_n) = \Phi_+(fg)$, οπότε $\Phi_+(fg) = \Phi_+(f)\Phi_+(g)$.

(2) *Επέκταση της Φ στην $\mathcal{W}(F)$*

Έστω $f : F \to \mathbb{R}$ συνάρτηση στην $\mathcal{W}(F)$. Τότε υπάρχουν $f_1, f_2 \in \mathcal{W}_+(F)$, ώστε $f = f_1 - f_2$. Ορίζουμε $\Phi(f) = \Phi_+(f_1) - \Phi_+(f_2)$
Στην γενική περίπτωση, όταν $f \in \mathcal{W}(F)$, αναλύουμε ως εξής: $f = Ref + iImf$, όπου $Ref, Imf : F \to \mathbb{R}$ και προφανώς $Ref, Imf \in \mathcal{W}_+(F)$.
Ορίζουμε $\Phi(f) = \Phi(Ref) + i\Phi(Imf)$

(*i*) *Η Φ είναι καλά ορισμένη.*

Έστω $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{W}_+(F)$, ώστε $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$. Τότε
$f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \Leftrightarrow f_1 + g_2 = g_1 + f_2 \Rightarrow \Phi_+(f_1 + g_2) = \Phi_+(g_1 + f_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Phi_+(f_1) + \Phi_+(g_2) = \Phi_+(g_1) + \Phi_+(f_2) \Leftrightarrow \Phi_+(f_1) - \Phi_+(f_2) = \Phi_+(g_1) - \Phi_+(g_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Phi(f_1 - f_2) = \Phi(g_1 - g_2)$.

(*ii*) *Η Φ είναι $*$-μορφισμός αλγεβρών.*

Προφανές.

[2]Κάθε SOT-συγκλίνουσα ακολουθία είναι κατά σημείο φραγμένη, οπότε από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Οπότε για κάθε $A_n, B_n \overset{\text{SOT}}{\to} 0$, έχουμε ότι $\|A_n\| < M$, για κάποιο $M > 0$. Συνεπώς για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε $\|A_n B_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|B_n x\| \leq M\|B_n x\| \to 0$.

(*iii*) *Η Φ διατηρεί τη διάταξη.*

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \geq 0$ ισχύει ότι $\Phi(f) \geq 0$. Έστω $f \geq 0$, οπότε επειδή $f \in \mathcal{W}_+(F)$ υπάρχουν $\exists\ f_n \in C_0(F)$ ώστε $0 \leq f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$.
Συνεπώς, $0 \leq \Phi_0(f_n) \overset{\text{SOT}}{\to} \Phi(f)$.

(*iv*) *Η Φ είναι συστολή*

Παρατηρούμε ότι $\forall f \in \mathcal{W}(F)$, έχουμε $0 \leq f^* f \leq \|f\|_\infty^2 \mathbb{1}$, όπου
$\mathbb{1} : F \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$. Έπεται λοιπόν από το (*iii*):
$0 \leq \|\Phi(f)\|^2 = \|\Phi(f)^*\Phi(f)\| \leq \|\Phi(f^* f)\| \leq \|f\|_\infty^2 \Phi(\mathbb{1}) = \|f\|_\infty^2\ I\ = \|f\|_\infty^2$

(*v*) *Αν $f_n, f \in \mathcal{W}_+(F)$ και $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$, τότε $\Phi(f) = SOT\text{-}\lim_n \Phi(f_n)$.*

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακολουθία $(f_{n,m})$ στην $C_0(F)$ ώστε :
$f_{n,m} \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f_n \Rightarrow \Phi(f_n) = \text{SOT-}\lim_m \Phi(f_{n,m})$
Θέτουμε $g_n = max\{f_{1,n}, f_{2,n}, ..., f_{n,n}\} \in C_0(F)$
Ισχυρισμός : $g_n \leq f_n$ και $g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f,\ \forall n \in \mathbb{N}$,
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_{n,m} \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f_n \Rightarrow f_{n,m} \leq f_n, \forall m \in \mathbb{N}$, ενώ επειδή $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$ έπεται ότι $f_i \leq f_n \leq f,\ \forall i \leq n$.
Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε : $f_{i,m} \leq f_i \leq f_n,\ \forall i \leq n, \forall m \in \mathbb{N}$.
Επομένως $\max_{1 \leq i \leq n}\{f_{i,n}\} = g_n \leq f_n$.
Εξάλλου $g_n \leq g_{n+1}$, οπότε αρκεί να δείξουμε $\forall x \in F$, ότι $\sup_n\{g_n(x)\} = f(x)$.
Σταθεροποιούμε το x.
Εφόσον $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,
ενώ αφού $f_{n_1,m} \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f_{n_1}$, υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_1,m_1}(x) - fn_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,
συνεπώς
$|f_{n_1,m_1}(x) - f(x)| \leq |f_{n_1,m_1}(x) - fn_1(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

- $\triangleright$ Αν $n_1 \leq m_1$, τότε $g_{m_1} = \max_{1 \leq i \leq m_1}\{f_{i,m_1}\} \geq f_{n_1,m_1}$, άρα $f(x) - \varepsilon \leq g_{m_1}(x) \leq f(x)$
- $\triangleright$ Αν $m_1 < n_1$, τότε $g_{n_1} = \max_{1 \leq i \leq n_1}\{f_{i,n_1}\} \geq f_{n_1,n_1} \geq f_{n_1,m_1}$, άρα
  $f(x) - \varepsilon \leq g_{n_1(x)} \leq f(x)$

Άρα θέτοντας $n_0 = max\{n_1, m_1\}$, έπεται ότι $g_{n_0}(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x)]$. Αφού η g_n είναι αύξουσα έχουμε ότι $g_n(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x)],\ \forall n \geq n_0$. Έπεται ότι $g_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$, άρα $\Phi(f) = \text{SOT-}\lim_n \Phi_0(g_n)$.

Έχουμε όμως δείξει ότι $\Phi_0(g_n) \leq \Phi(f_n) \leq \Phi(f), \forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή $\Phi(f) = \text{SOT-}\lim_n \Phi(f_n)$.

(*vi*) *Η μοναδικότητα της επέκτασης* Φ είναι προφανής.

□

Πόρισμα 2.1. *Από τις προτάσεις 2.1 και 2.2 προκύπτει ότι δοθείσας μίας φασματικής ανάλυσης της μονάδας* $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ *με φορέα* F*, ορίζεται ισομετρικός* $*$*-μορφισμός*

$$\varphi : (\mathbf{St}(F)), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dE = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}])$$

που επάγει την ισομετρική $*$*-αναπαράσταση*

$$\Phi_0 : C_0(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dE$$

η οποία επεκτείνεται σε μοναδικό $*$*-μορφισμό*

$$\Phi : \mathcal{W}(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

ώστε να ικανοποιείται η σχέση (2.3).

Ορίζουμε λοιπόν για κάθε $f \in \mathcal{W}(F)$ *τον τελεστή* $\int_{\mathbb{R}} f dE = \Phi(f)$.

Πρόταση 2.3. *Έστω* F *κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$*. Κάθε* $*$*-αναπαράσταση* π *της* $C_0(F)$ *σε έναν χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *ορίζει μοναδική φασματική ανάλυση της μονάδας* $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$*, με φορέα το σύνολο* F*, ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}} f dE = \pi(f), \forall f \in C_0(F) \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα, η $*$-αναπαράσταση π επεκτείνεται σε μοναδικό $*$-μορφισμό $\widetilde{\pi} : \mathcal{W}(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ώστε να ικανοποιείται η σχέση (2.3).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $e = \chi_F$ και παρατηρούμε ότι $e = \chi_F = \mathbb{1}_{\mathcal{W}(F)} \Rightarrow \widetilde{\pi}(e) = I$.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $e_t = \chi_{(-\infty,t]\cap F} \in \mathcal{W}(F)$. Οι τελεστές $\widetilde{\pi}(e_t) \overset{\sigma\upsilon\mu\beta}{=} E_t$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες :

1. $E_t^2 = [\widetilde{\pi}(e_t)]^2 = \widetilde{\pi}(e_t^2) = \widetilde{\pi}(e_t) = E_t$

2. $E_t^* = [\widetilde{\pi}(e_t)]^* = \widetilde{\pi}(e_t^*) = \widetilde{\pi}(e_t) = E_t$

3. αν $t \geq s$, τότε $e_t - e_s \geq 0 \Rightarrow \widetilde{\pi}(e_t - e_s) \geq 0 \Rightarrow \widetilde{\pi}(e_t) \geq \widetilde{\pi}(e_s) \Rightarrow E_t \geq E_s$

4. εάν $t \searrow s$, τότε $e - e_t \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} e - e_s \Rightarrow \widetilde{\pi}(e - e_t) \overset{\text{SOT}}{\to} \widetilde{\pi}(e - e_s) \Rightarrow I - E_t \overset{\text{SOT}}{\to} I - E_s \Rightarrow E_t \overset{\text{SOT}}{\to} E_s$

5. εάν $t \nearrow +\infty$, τότε $e_t \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} e \Rightarrow \widetilde{\pi}(e_t) \overset{\text{SOT}}{\to} \widetilde{\pi}(e) \Rightarrow E_t \overset{\text{SOT}}{\to} I$

6. εάν $t \nearrow -\infty$, τότε $e_t \overset{\kappa\sigma}{\searrow} 0 \Rightarrow \widetilde{\pi}(e_t) \overset{\text{SOT}}{\to} \widetilde{\pi}(0) \Rightarrow E_t \overset{\text{SOT}}{\to} 0$

Από τις ιδιότητες (1) - (6) προκύπτει ότι η οικογένεια $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι φασματική ανάλυση της μονάδας στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Μάλιστα, εάν $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ όπου $\eta < \xi$, παρατηρούμε ότι:

$$E_\xi - E_\eta = 0 \Leftrightarrow (\eta, \xi) \cup F = \emptyset$$

άρα ο φορέας της $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο F.
Επομένως, από το Πόρισμα 2.1 ορίζεται μοναδικός $*$-μορφισμός

$$\Phi : \mathcal{W}(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : f \mapsto \int_F f(t)dE$$

ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2.3).
Ισχυρισμός : $\widetilde{\pi}(f) = \Phi(f), \ \forall f \in \mathcal{W}(F)$
Αρκεί να δείξουμε την ισότητα για $f = e - e_\lambda$. Γνωρίζουμε ότι $\widetilde{\pi}(f) = I - E_\lambda$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων (B_n), όπου $B_n = (\lambda, \lambda + n] \cap F$, και έχουμε :

$$\Phi(\chi_{B_n}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(\lambda,\lambda+n]\cap F} dE = E((\lambda, \lambda + n]) = E_{\lambda+n} - E_\lambda \overset{\text{SOT}}{\to} I - E_\lambda$$

Εξάλλου, παρατηρούμε πως $\chi_{B_n} \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$, οπότε έχουμε ότι $\Phi(\chi_{B_n}) \overset{\text{SOT}}{\to} \Phi(f)$.
Έπεται λοιπόν ότι $\widetilde{\pi}(f) = I - E_\lambda = \Phi(f)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 2.1. *Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$, η συνάρτηση*

$$F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mapsto \langle E_t x, x \rangle.$$

είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής με $\lim_{t \to -\infty} F_x(t) = 0$. Ορίζεται λοιπόν το μέτρο Lebesgue - Stieltjes ν_x : $\nu_x((-\infty, t]) = F_x(t)$. Μάλιστα για κάθε $f \in \mathcal{W}(F)$, ισχύει ότι $\langle \int_{\mathbb{R}} f dEx, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\nu_x$.

Αρχικά να αποδείξουμε την τελευταία σχέση για κάθε κλιμακωτή συνάρτηση
$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1}] \cap F}$ στο F. Έχουμε λοιπόν ότι :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu_x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_{\mathbb{R}} \chi_{(\alpha_k,\alpha_{k+1}]} d\nu_x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nu((\alpha_k, \alpha_{k+1}]) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \{\nu(-\infty, \alpha_{k+1}] - \nu(-\infty, \alpha_k]\} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [\langle E_{\alpha_{k+1}} x, x\rangle - \langle E_{\alpha_k} x, x\rangle] =$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E((\alpha_k, \alpha_{k+1}])x, x\rangle = \langle \int_{\mathbb{R}} f dE x, x\rangle$$

Στην γενική περίπτωση, αρκεί να το δείξουμε για $f \in \mathcal{W}_+(F)$. Υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων f_n, ώστε να ισχύει $f_n \overset{\kappa\sigma}{\nearrow} f$. Από την πρόταση 2.2 έχουμε $\Phi(f_n) \overset{\text{SOT}}{\to} \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f dE$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathcal{H}$, ισχύει ότι $\langle \Phi(f_n)x, x\rangle \to \langle \Phi(f)x, x\rangle$. Όμως δείξαμε ότι $\langle \Phi(f_n)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n d\nu_x$, οπότε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε τη σχέση $\langle \Phi(f_n)x, x\rangle \to \int_{\mathbb{R}} f d\nu_x$ και έπεται το ζητούμενο.

Πόρισμα 2.2 (Φασματικό Θεώρημα). *Έστω αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$. Υπάρχει μοναδική φασματική ανάλυση της μονάδας $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ με φορέα $\sigma(A)$, ώστε:*

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(t) dE_t,\ \forall f \in C(\sigma(A)) \tag{2.5}$$

Επομένως, έχουμε $A = \int_{\sigma(A)} t dE_t$.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής . Γνωρίζουμε ότι το φάσμα σ(A) είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης, ο Συναρτησιακός Λογισμός για πολυώνυμα

$$\psi : \mathcal{P}(\sigma(A)) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : p \mapsto p(A)$$

είναι ισομετρικός $*$-μορφισμός, επόμενως επεκτείνεται ισομετρικά στην $*$-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων στο $\sigma(A)$, δηλαδή ορίζεται η $*$-αναπαράσταση:

$$\Psi_0 : C(\sigma(A)) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : f \mapsto f(A)$$

Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει μοναδική φασματική ανάλυση της μονάδας με φορέα το σύνολο $\sigma(A)$, ώστε

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f dE, \forall f \in C(\sigma(A)) \tag{2.6}$$

□

2.2 Φασματικά Μέτρα και Αναπαραστάσεις

Ορισμός 2.3. *Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$ τελεστών σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, καλείται* ***φασματικό μέτρο****, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :*

1. $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$
3. $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(\mathbb{R}) = I$
4. $\forall x, y \in \mathcal{H}$, *η απεικόνιση* $\mu_{x,y} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y\rangle$ *είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$

Παρατήρηση 2.2. *(i) Από τις (1),(2) έπεται ότι κάθε $E(\Omega)$ είναι προβολή στον $\mathcal{H}$. Εξάλλου αφού η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \mu_{xy}(\Omega)$ είναι sesquilinear, από την ταυτότητα πολικότητας* $4\mu_{xy}(\Omega) = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_{x+i^k y, x+i^k y}(\Omega)$, *η ιδιότητα (4) μπορεί να αντικατασταθεί από την :*

4΄. $\forall x \in \mathcal{H}$, *η απεικόνιση* $\mu_x \overset{\sigma\upsilon\mu\beta}{=} \mu_{x,x} : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, x\rangle$ *είναι θετικό μέτρο ορισμένο στην* $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

Μάλιστα, επειδή τα μέτρα μ_x είναι πεπερασμένα Borel μέτρα στο χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, είναι κανονικά.

(ii) Το φασματικό μέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό, αλλά δεν είναι αριθμήσιμα προσθετικό ως προς την $\|\cdot\|$.

Έστω $x \in \mathcal{H}$. Αν $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ ξένα σύνολα, έχουμε:

$$\langle\{E(\Omega_1) + E(\Omega_2)\}\, x, x\rangle = \langle E(\Omega_1)x, x\rangle + \langle E(\Omega_2)x, x\rangle = \mu_x(\Omega_1) + \mu_x(\Omega_1) =$$
$$= \mu_x((\Omega_1 \cup \Omega_2)) = \langle E(\Omega_1 \cup \Omega_2)x, x, \rangle \text{ δηλαδή } E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = E(\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

Εάν όμως $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων στο $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, με $E(\Omega_n) \neq 0$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\left\| \sum_k^{n+1} E(\Omega_k) - \sum_k^{n} E(\Omega_k)\right\| = \|E(\Omega_{n+1})\| = 1$, οπότε από το κριτήριο *Cauchy*, η σειρά $\sum_n E(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει.

(iii) Η σειρά $\sum_n E(\Omega_n)$ συγκλίνει ως προς την SOT-τοπολογία.

Έστω $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Θεωρούμε τα σύνολα $V_n = \cup\{\Omega_\kappa : \kappa \leq n\}$.
Από το (*ii*) έχουμε ότι $E(\Omega) = E(V_n) + E(\Omega \setminus V_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\Omega_k) + E(\Omega \setminus V_n)$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \|E(\Omega \setminus V_n)x\| = 0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\|E(\Omega \setminus V_n)x\|^2 = \langle E(\Omega \setminus V_n)x, E(\Omega \setminus V_n)x\rangle = \langle E(\Omega \setminus V_n)x, x\rangle = \mu_x(\Omega \setminus V_n) \to 0,$$

καθώς το μ_x είναι σ-προσθετικό μέτρο.

Πρόταση 2.4. *Κάθε φασματική ανάλυση της μονάδας σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ ορίζει μοναδικό φασματικό μέτρο στον ίδιο χώρο ώστε $E((-\infty, t]) = E_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Έστω $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ φασματική ανάλυση της μονάδας στον $\mathcal{H}$.
Ορίζουμε για κάθε [3] $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, τον τελεστή $E(\Omega) = \wedge\left\{\bigvee_n E((a_n, b_n]) : \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \supseteq \Omega\right\}$
Ισχυρισμός: Η οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$ είναι φασματικό μέτρο στον $\mathcal{H}$.

1. Από τον ορισμό 1.2 η $E(\Omega)$ είναι προβολή οπότε έχουμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega)^*$

2. Εάν $t_n \searrow t$, παρατηρούμε ότι $0 \leq E(\emptyset) \leq E(t, t_n] \overset{\text{SOT}}{\to} 0$, οπότε $E(\emptyset) = 0$.
   Όμοια έχουμε ότι $I \geq E(\mathbb{R}) \geq E((-\infty, n])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, όπου $E((-\infty, n]) = E_n \overset{SOT}{\to} I$, καθώς $n \to +\infty$. Συνεπώς $E(\mathbb{R}) = I$.

3. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mu_x^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, x\rangle \tag{2.7}$$

   Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση μ_x^* είναι εξωτερικό μέτρο.
   Αρχικά, βλέπουμε ότι $\mu_x^*(\emptyset) = \langle E(\emptyset)x, x\rangle = 0$
   Εξάλλου, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow E(\Omega_1) \leq E(\Omega_2) \Rightarrow \langle E(\Omega_1)x, x\rangle \leq \langle E(\Omega_2)x, x\rangle$
   $\Rightarrow \mu_x^*(\Omega_1) \leq \mu_x^*(\Omega_2)$
   Έστω τώρα $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.
   Από το πόρισμα 1.1 υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία $\{(a_{n,i}, b_{n,i}] : i \in \mathbb{N}\}$, η οποία καλύπτει το Ω_n και ισχύει $\|\left(\vee_i E(a_{n,i}, b_{n,i}]\right)x - E(\Omega_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.
   Η οικογένεια διαστημάτων $\{(a_{n,i}, b_{n,i}] : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη, ενώ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \subseteq \bigcup_{n,i}(a_{n,i}, b_{n,i}]$. Συνεπώς, έχουμε $\left\|\left(\vee_{n,i} E(a_{n,i}, b_{n,i}]\right)x - \sum_{n=1}^{\infty} E(\Omega_n)x\right\| \leq \varepsilon$.

[3] Με $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

Εφόσον, το σύνολο $\{(a_{n,i}, b_{n,i}] : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο, μπορεί να γραφτεί ως ακολουθία ξένων ανά δύο ημιάνοικτων διαστημάτων J_m. Μάλιστα ορίζοντας την ακολουθία διαστημάτων $J_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} J_k$ έχουμε μία ακολουθία ξένων συνόλων, όπου κάθε ένα από αυτά αποτελεί πεπερασμένη ένωση ημιάνοικτων διαστημάτων. Επομένως, υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο ημιάνοικτων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, έστω $\{I_n\}_n$, ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και μάλιστα

$$\Big\| \vee_{n,i} E(a_{n,i}, b_{n,i}]x - \sum_{n=1}^{\infty} E(\Omega_n)x \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} E(I_n)x - \sum_{n=1}^{\infty} E(\Omega_n)x \Big\| \leq \varepsilon.$$

Επομένως $\forall x \in \mathcal{H}$ έχουμε ότι:

$$\langle E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n)x, x\rangle \leq \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} I_n x, x\Big\rangle \leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\Omega_n)x, x\rangle + \varepsilon \Rightarrow \mu_x^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x^*(\Omega_n).$$

Οπότε πράγματι η απεικόνιση μ_x^* είναι εξωτερικό μέτρο. Συνεπώς από το θεώρημα Καραθεοδωρή, ο περιορισμός του μ_x^* στη σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι πλήρες μέτρο, το οποίο θα συμβολίζουμε μ_x.

4. Θα δείξουμε ότι $E(\Omega_1)E(\Omega_2) = E(\Omega_1 \bigcap \Omega_2), \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.
   Αρχικά παρατηρούμε ότι $E((a, b])E((c, d]) = E((a, b] \bigcap (c, d])$.
   Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι $a \leq c$ και έχουμε :

$$E((a, b])E((c, d]) = (E_b - E_a)(E_d - E_c) = E_b E_d - E_b E_c - E_a E_d + E_a E_c =$$
$$= E_{min\{b,d\}} - E_{min\{b,c\}} - E_a + E_a = E_{min\{b,d\}} - E_{min\{b,c\}} = E((a, b] \cap (c, d])$$

   Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) : E(D)E((a, b]) = E(D \bigcap (a, b]),\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

   είναι κλάση Dynkin.

   - $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$, γιατί $E(\mathbb{R})E((a, b]) = E(\Omega) = E(\mathbb{R} \bigcap (a, b])$
   - Αν $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$. Πράγματι,
     $E(B \setminus A)E((a, b]) = E(B)E((a, b]) - E(A)E((a, b]) =$
     $= E(B \bigcap (a, b]) - E(A \bigcap (a, b]) = E((B \setminus A) \bigcap (a, b])$
   - Αν $\{B_n\}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε το $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$.
     Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}$, παρατηρούμε :

$$\langle E(B_n)x, x\rangle = \mu_x(\chi_{B_n}) \to \mu_x(\chi_B) = \langle E(B)x, x\rangle \Rightarrow E(B_n) = E(B).$$

Έπεται λοιπόν ότι :

$$E(B)E((a,b])x = \lim_{n\to+\infty} E(B_n)E((a,b])x = \lim_{n\to+\infty} E(B_n \cap (a,b])x = E(B \cap (a,b])x,$$

Οπότε $E(B)E((a,b]) = E(B \bigcap (a,b])$

Οπότε πράγματι η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin κι επειδή περιέχει το σύνολο των ημιάνοικτων διαστημάτων $Q = \{(a,b],\ a,b \in \mathbb{R}\}$, περιέχει και την παραγόμενη κλάση Dynkin $\delta(Q)$. Όμως, εφόσον το σύνολο Q είναι κλειστό προς τις πεπερασμένες τομές, έπεται ότι η $\delta(Q)$ είναι ίση με τη σ-άλγεβρα που παράγει το σύνολο Q, δηλαδή την $\mathbb{B}(\mathbb{R})$. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε

$$\mathbf{D} = \{\Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) : E(D)E(\Omega) = E(D \bigcap \Omega),\ \forall D \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$$

και δείχνουμε ότι είναι κλάση Dynkin, η οποία περιέχει την $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.
Επομένως, δείξαμε $E(\Omega_1)E(\Omega_2) = E(\Omega_1 \bigcap \Omega_2), \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$,
οπότε ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

5. Έστω $E_1(\cdot), E_2(\cdot)$ δύο φασματικά μέτρα στον $\mathcal{H}$, ώστε

$$E_t = E_1((-\infty, t]) = E_2((-\infty, t]),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τα αντίστοιχα επαγόμενα μέτρα μ_x^1, μ_x^2 είναι ίσα, καθώς προκύπτουν ως μέτρα Lebesgue - Stieltjes της συνάρτησης κατανομής $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \langle E_t x, x\rangle$. Συνεπώς για κάθε Borel $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\mu_x^1(\Omega) = \mu_x^2(\Omega)$ ή ισοδύναμα ότι $\langle E_1(\Omega)x, x\rangle = \langle E_2(\Omega)x, x\rangle,\ \forall x \in \mathcal{H}$. Έπεται λοιπόν ότι $E_1(\Omega) = E_2(\Omega), \forall \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Επομένως, τα δύο φασματικά μέτρα $E_1(\cdot), E_2(\cdot)$ είναι ίσα.

Αντίστροφα έστω $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$ ένα φασματικό μέτρο. Ορίζουμε $\forall t \in \mathbb{R}$ την προβολή $E_t = E((-\infty, t])$.
Ισχυρισμός Η οικογένεια $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι φασματική ανάλυση της μονάδας στον $\mathcal{H}$.

- Αν $s \le t$, τότε $E_s = E_t + E((t,s]) \ge E_t$.

- Σταθεροποιούμε τυχαίο $x \in \mathcal{H}$. Έστω $t \in \mathbb{R}$ και $\{t_n\}$ φθίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$. Έχουμε ότι $\|E_{t_n}x - E_t x\|^2 = \langle (E_{t_n} - E_t)x, x\rangle = \mu_x((t, t_n]) \to 0$, καθώς η απεικόνιση $t \mapsto \mu_x((-\infty, t])$ είναι δεξιά συνεχής.

Επομένως η απεικόνιση $t \mapsto E_t$ είναι SOT-δεξιά συνεχής.

- Όμοια έχουμε ότι SOT-$\lim\limits_{t\to-\infty} E_t = 0$ και SOT-$\lim\limits_{t\to+\infty} E_t = I$

$\square$

Παρατήρηση 2.3. *Έστω $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μία φασματική ανάλυση της μονάδας με φορέα F και $\chi_\Omega \in \mathcal{W}(F)$. Από την πρόταση 2.2, παρατηρούμε ότι $\Phi(\chi_\Omega) = \Phi(\chi_\Omega)^2 = \Phi(\chi_\Omega)^*$, δηλαδή ο τελεστής $\Phi(\chi_\Omega)$ είναι προβολή. Μάλιστα αν $E(\Omega) = \wedge \left\{ \bigvee\limits_n E((a_n, b_n]) : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] \supseteq \Omega \right\}$ ο τελεστής που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση για το Borel Ω, τότε έχουμε $\Phi(\chi_\Omega) = E(\Omega)$.*

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε ορίσει τα ακόλουθα δύο μέτρα :
Το μέτρο $\mu_x(B) = \langle E(B)x, x\rangle$, καθώς και το μέτρο ν_x^2, το οποίο προκύπτει από την συνάρτηση κατανομής $t \mapsto \langle E_t x, x\rangle$. Τα δύο μέτρα είναι προφανώς ίσα, οπότε από την παρατήρηση 2.1 έχουμε ότι :

$$\langle E(\Omega)x, x\rangle = \mu_x(\Omega) = \nu_x(\Omega) = \int \chi_\Omega d\nu_x = \langle \int \chi_\Omega dEx, x\rangle = \langle \Phi(\chi_\Omega)x, x\rangle$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Συνεπώς, έπεται το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 3

Άλγεβρες von Neumann

3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1. *Έστω χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Καλούμε* ***μεταθέτη*** *του $\mathcal{S}$ το σύνολο:*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : TS = ST, \forall S \in \mathcal{S}\} \tag{3.1}$$

Το σύνολο $\mathcal{S}'$ είναι άλγεβρα με μονάδα και μάλιστα SOT-κλειστή. Πράγματι, αν $(A_i)_{i\in I}$ δίκτυο με $A_i \in \mathcal{S}'$, ώστε $\lim_i \|A_i x - Ax\| = 0, \forall x \in \mathcal{H}$, τότε για κάθε $S \in \mathcal{S}$ έχουμε:

$$S(Ax) = S(\lim_i A_i x) = \lim_i S A_i x = \lim_i A_i (Sx) = A(Sx).$$

Έπεται λοιπόν ότι το $\mathcal{S}'$ είναι και norm-κλειστή άλγεβρα.

Ορισμός 3.2. *Έστω χώρος Hilbert $\mathcal{H}$. Μια* ***άλγεβρα von Neumann*** *$\mathcal{M}$ στον $\mathcal{H}$ είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.*

Μία άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα, η οποία είναι SOT-κλειστή. Για κάθε $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$, η $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann, η οποία περιέχει το $\mathcal{S}$, και καλείται η παραγόμενη άλγεβρα von Neumann από το $\mathcal{S}$.

Ορισμός 3.3. *Έστω $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Ένας υπόχωρος $E \subseteq \mathcal{H}$ καλείται* ***A-αναλλοίωτος*** *εάν $A(E) \subseteq E$. Εφόσον ο A είναι φραγμένος τελεστής, έπεται πως ο $\overline{E}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος. Αποδεικνύεται εύκολα για ένα κλειστό υπόχωρο E, ότι είναι A-αναλλοίωτος, αν και μόνον αν $AP = PAP$ όπου $P = proj(E)$. Επιπλέον θα λέμε* *ότι ο E **ανάγει** τον A, εάν είναι A-αναλλοίωτος και A^*-αναλλοίωτος. Έπεται ότι ο E ανάγει τον A, αν και μόνον αν $AP = PA$, δηλαδή $P \in \{A\}'$.*

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ο E καλείται **$\mathcal{S}$-αναλλοίωτος** εάν $S(E) \subseteq E, \forall S \in \mathcal{S}$. Μάλιστα, εάν το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο και ο E είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος, τότε ο E **ανάγει** το $\mathcal{S}$, δηλαδή ανάγει κάθε $S \in \mathcal{S}$.

3.2 Παραγόμενες Άλγεβρες von Neumann

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα von Neumann η οποία δρα σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, $E \in \mathcal{A}$ προβολή και $K = E(\mathcal{H})$. Τότε οι άλγεβρες*

$$\mathcal{A}_E = \{EA|_K : A \in \mathcal{A}\} \text{ και } \mathcal{A}'|_K = \{A'|_K : A' \in \mathcal{A}'\}$$

είναι άλγεβρες von Neumann , οι οποίες δρουν στον K.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι $\mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}'|_K$ είναι $*$-υπάλγεβρες του $\mathbf{B}(K)$ με μονάδα, και μάλιστα για κάθε $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}', x \in K$ έχουμε:

$$(EAE)(EA'E)x \overset{EA'=A'E}{=} EAA'Ex = EA'AEx = (EA'E)(EAE)x \Rightarrow EA|_K A'|_K = A'|_K EA|_K.$$

οπότε $\mathcal{A}_E \subseteq (\mathcal{A}'|_K)'$ και $\mathcal{A}'|_K \subseteq (\mathcal{A}_E)'$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει ισότητα στις δύο παραπάνω σχέσεις.

(*i*) Έστω $T \in (\mathcal{A}'|_K)'$. Ορίζουμε $S = \left[\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Τότε $S \in \mathcal{A}''$, καθώς για κάθε $X \in \mathcal{A}'$, έχουμε:

$$ESX = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X|_K & 0 \\ 0 & X|_{K^\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TX|_K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X|_K T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X|_K & 0 \\ 0 & X|_K{}^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = XS$$

Αφού $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, έχουμε ότι $S \in \mathcal{A}$, οπότε $T = ES|_K \in \mathcal{A}_E$

(*ii*) Θέλουμε να δείξουμε ότι $(\mathcal{A}_E)' \subseteq \mathcal{A}'|_K$.

Αφού η $(\mathcal{A}_E)'$ είναι άλγεβρα von Neumann, παράγεται από unitary [1]τελεστές.

[1] Κάθε τελεστής A γράφεται ως $A = A_1 + iA_2$, όπου $A_1 = \frac{A+A^*}{2}$, $A_2 = i\frac{A-A^*}{2}$ αυτοσυζυγείς. Έστω τώρα A αυτοσυζυγής με $\|A\| \leq 1$. Τότε ο τελεστής $I - A^2$ είναι θετικός, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $U = A + i\sqrt{1 - A^2}$. Παρατηρούμε ότι ο U είναι unitary, και ότι $A = \frac{U+U^*}{2}$. Μάλιστα, εφόσον η άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ είναι norm-κλειστή, τότε από τον Συναρτησιακό Λογισμό έπεται ότι ο τελεστής U ανήκει σε αυτήν.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι για τον τυχαίο unitary τελεστή $T' \in (\mathcal{A}_E)'$, ισχύει ότι $T' \in \mathcal{A}'|_K$. Ψάχνουμε λοιπόν έναν φραγμένο τελεστή $S' \in \mathcal{A}'$, ώστε $S'|_K = T'$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $H_0 = \left\{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i : A_i \in \mathcal{A}, x_i \in K, n \in \mathbb{N}\right\}$, και παρατηρούμε ότι η κλειστή του θήκη $H_1 = \overline{H_0}$ είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος υπόχωρος. Ορίζουμε τον τελεστή S' ως εξής :

Για κάθε $x = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$ στον H_0, ορίζουμε $S'\left(\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i$,

ενώ θέτουμε $S'(H_1^{\perp}) = 0$.

Χρειάζεται να εξετάσουμε εάν ο τελεστής αυτός είναι καλά ορισμένος, καθώς εάν έχουμε $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = \sum_{i=1}^{m} B_i y_i$, όπου $A_i, B_i \in \mathcal{A}$, $x_i, y_i \in K$, τότε πρέπει να ισχύει $\sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i = \sum_{i=1}^{m} B_i T' y_i$ ή ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι εάν $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 0$, τότε έχουμε $\sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i = 0$. Το τελευταίο όμως ισχύει καθώς :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i, \sum_{j=1}^{n} A_j T' x_j \Big\rangle = \sum_{i,j} \langle A_i T' x_i, A_j T' x_j \rangle \overset{x_i = E x_i}{=}$$
$$\overset{T'E=ET'}{=} \sum_{i,j} \langle A_i E T' x_i, A_j E T' x_j \rangle = \sum_{i,j} \langle (E A_j^* A_i E) T' x_i, T' x_j \rangle \overset{T' \in (\mathcal{A}_E)'}{=}$$
$$\sum_{i,j} \langle T'(E A_j^* A_i E) x_i, T' x_j \rangle \overset{T' unitary}{=} \sum_{i,j} \langle (E A_j^* A_i E) x_i, x_j \rangle = \Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \Big\|^2$$

Επομένως έχουμε $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \right\| = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i \right\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i = 0$, οπότε ο τελεστής S' είναι καλά ορισμένος.

Μάλιστα η ισότητα $\left\| \sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \right\|$ δίνει ότι ο $S'|_{H_0}$ είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία στον $\mathcal{H}_1$ και αφού έχουμε ορίσει $S'(H_1^{\perp}) = 0$, ο S' είναι φραγμένος τελεστής, και μάλιστα μερική ισομετρία. Προφανώς, για κάθε $x \in K$ έχουμε ότι $S'x = T'x$, οπότε $S'|_K = T'$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $S' \in \mathcal{A}'$. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Αφού $S'(H_1^{\perp}) = 0$ και ο H_1 είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in H_0$ ισχύει ότι

$S'Ax = AS'x$. Έστω $x = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \in H_0$. Τότε

$$S'Ax = S'A\left(\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\right) = S'\left(\sum_{i=1}^{n} AA_i x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} AA_i T' x_i\right) =$$
$$A\left(\sum_{i=1}^{n} A_i T' x_i\right) = AS'\left(\sum_{i=1}^{n} A_i x_i\right) = AS'x$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Πρόταση 3.2. *Έστω $\{\mathcal{H}_a\}$ μία οικογένεια χώρων Hilbert. Εάν $\{\mathcal{A}_a\}$ είναι μία οικογένεια αλγεβρών von Neumann ώστε κάθε $\mathcal{A}_a$ να δρα στο χώρο $\mathcal{H}_a$, τότε η άλγεβρα $\mathcal{A} = \oplus_a \mathcal{A}_a = \{\oplus_a A_a : A_a \in \mathcal{A}$, ώστε $sup_a\{\|A_a\|\} < +\infty\}$ είναι επίσης άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα στο χώρο Hilbert $\mathcal{H} = \oplus_a \mathcal{H}_a = \{\widetilde{x} = (x_a)_a \ : \ \sum_a \|x_a\| < +\infty\}$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι η $\mathcal{A}$ είναι $*$-υπάλγεβρα του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $S \notin \mathcal{A}$, τότε $S \notin \mathcal{A}''$.
Έστω $S = \oplus_a S_a \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ώστε $S \notin \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει μη μηδενικός $S_{a_0} \notin \mathcal{A}_{a_0}$, και αφού η $\mathcal{A}_{a_0}$ είναι επίσης άλγεβρα von Neumann, έχουμε ότι $S_{a_0} \notin \mathcal{A}''_{a_0}$. Συνεπώς υπάρχει τελεστής $T_{a_0} \in \mathcal{A}'_{a_0}$, ώστε $S_{a_0} T_{a_0} \neq T_{a_0} S_{a_0}$. Όμως τότε ορίζεται ο τελεστής $T = \begin{cases} T_{a_0}, & a = a_0 \\ 0 \ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$, για τον οποίο παρατηρούμε ότι $T \in \mathcal{A}'$, και μάλιστα $TS \neq ST$, οπότε $S \notin \mathcal{A}''$. □

Πρόταση 3.3. *Έστω χώρος Hilbert $\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα von Neumann , η οποία δρα στον $\mathcal{H}$. Για κάθε τελεστή $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε τον τελεστή $A^{(n)} = (A\delta_{ij})_{n\times n}$,[2] ο οποίος δρα στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}$. Το σύνολο $\mathcal{A}^{(n)} = \left\{A^{(n)} : A \in \mathcal{A}\right\}$ είναι επίσης άλγεβρα von Neumann, και μάλιστα ισχύει ότι $(\mathcal{A}^{(n)})'' = (\mathcal{A}'')^{(n)}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathcal{A}^{(n)}$ είναι $*$-υπάλγεβρα του $\mathbf{B}(\mathcal{H}^n)$. Εξάλλου, παρατηρούμε ότι αν $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ και $S = (S_{ij}) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}^n)$, τότε έχουμε :

$$T^{(n)}S = (TS_{ij}) \text{ και } ST^{(n)} = (S_{ij}T)$$

[2] το δέλτα του Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ i=j \\ 0 & , \ \text{αλλιώς} \end{cases}$

Συνεπώς ο $T^{(n)}$ μετατίθεται με τον S αν και μόνον αν ο T μετατίθεται με κάθε S_{ij}. Αυτό αποδεικνύει ότι $(\mathcal{A}^{(n)})' = \mathbf{M_n}(\mathcal{A}')$ και ότι $(\mathcal{A}')^{(n)} \subseteq \mathbf{M_n}(\mathcal{A})'$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $S = (S_{ij}) \in \mathbf{M_n}(\mathcal{A})'$. Για κάθε τελεστή $E_{ij} = \begin{cases} I_{\mathcal{H}}, & \text{θέση } ij \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ και $A \in \mathcal{A}$, έχουμε την ισότητα $SAE_{ij} = AE_{ij}S$, από τη οποία προκύπτει ότι $S_{ki}A\delta_{jl} = A\delta_{ki}S_{jl}$ για κάθε k, l, άρα $S_{ij} = 0$ για $i \neq j$, ενώ $S_{ii}A = AS_{jj}$, $\forall i, j$, οπότε $S \in (\mathcal{A}')^{(n)}$. □

3.3 Το Θεώρημα του Δεύτερου Μεταθέτη

Λήμμα 3.1. *Έστω χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και $\mathcal{A}$ μοναδιαία $*$-υπάλγεβρα του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι SOT-πυκνή στην $\mathcal{A}''$*

Απόδειξη.

1. Έστω $T \in \mathcal{A}''$, $x \in \mathcal{H}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $\overline{\mathcal{A}x}$, ο οποίος είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Εάν $P = proj(\overline{\mathcal{A}x})$, τότε $P \in \mathcal{A}'$, οπότε $PTx = TPx$. Αφού $I \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $x \in \overline{\mathcal{A}x}$. Έπεται ότι $Tx \in \overline{\mathcal{A}x}$, δηλαδή υπάρχει $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, ώστε $Tx = \lim_n A_n x$.

2. Η απεικόνιση $\phi_k : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}^k) : A \mapsto A^{(n)}$ είναι $*$-μορφισμός ενώ από την πρόταση 3.3 έπεται ότι $\phi_k(T) \in (\phi_k(\mathcal{A}))''$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό (1), εάν $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{H}^k$, υπάρχει $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$, ώστε $\phi_k(T)\widetilde{x} = \lim_k \phi_k(A_m)$, άρα $Tx_j = \lim_m A_m(x_j)$, $\forall j = 1, \ldots, k$.

3. **Ισχυρισμός :** $T \in \overline{\mathcal{A}}^{SOT}$
   Έστω $W = \{A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : \|Ax_i - Tx_i\| < \varepsilon, i = 1, \ldots, k_0\}$ μία SOT-περιοχή του T. Τότε από το συλλογισμό (2), υπάρχει ακολουθία $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$, ώστε $\phi_{k_0}(T) = \lim_k \phi_{k_0}(A_m)$ άρα $Tx_j = \lim_m A_m(x_j)$, $\forall j = 1, \ldots, k_0$. Οπότε για αρκετά μεγάλο $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|A_N(x_j) - Tx_j\| < \varepsilon$, $\forall j = 1, \ldots, k_0$, οπότε $A_n \in W$, άρα $W \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

□

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Δεύτερου Μεταθέτη). *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής άλγεβρα με μονάδα, τότε $\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{SOT} = \overline{\mathcal{A}}^{WOT}$. Ειδικότερα , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann

(β) η $\mathcal{A}$ είναι SOT-κλειστή

(γ) η $\mathcal{A}$ είναι WOT-κλειστή

Απόδειξη. Έπεται από τα λήμματα 3.1 και 1.2. □

Πρόταση 3.4. *Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι η norm κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα von Neumann. Παρατηρούμε ότι κάθε τελεστής $A \in \mathcal{M}$, γράφεται στη μορφή $A = A_1 + iA_2$, όπου $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ αυτοσυζυγείς τελεστές. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αυτοσυζυγής τελεστής της $\mathcal{M}$ ανήκει στην norm κλειστή θήκη των προβολών που περιέχει.
Έστω λοιπόν A αυτοσυζυγής τελεστής. Από το φασματικό θεώρημα έχουμε ότι $A \in \overline{[\{E(\Omega) : \Omega \in \mathbb{B}(\sigma(A))]}^{\|\cdot\|}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $E(\Omega) \in \mathcal{M}, \forall \Omega \in \mathbf{B}(\sigma(A))$.
Έστω $T \in \mathcal{M}'$. Αφού ο T αντιμετατίθεται με τον A, από το Συναρτησιακό Λογισμό αντιμετατίθεται με κάθε τελεστή $f(A)$, όπου $f \in C(\sigma(A))$.
Επομένως, $\forall x, y \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ έχουμε :

$$\langle f(A)Tx, y\rangle = \langle Tf(A)x, y\rangle \Leftrightarrow \langle f(A)Tx, y\rangle = \langle f(A)x, T^* y\rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int f\mu_{Tx,y} = \int f\mu_{x,T^*y}, \forall f \in C(\sigma(A)).$$

Άρα τα μέτρα $\mu_{Tx,y}, \mu_{x,T^*y}$ είναι ίσα, οπότε

$$\int \chi_\Omega \mu_{Tx,y} = \int \chi_\Omega \mu_{x,T^*y} \Leftrightarrow \langle E(\Omega)Tx, y\rangle = \langle E(\Omega)x, T^* y\rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle E(\Omega)Tx, y\rangle = \langle TE(\Omega)x, y\rangle, \forall \Omega \in \sigma(A), \forall x, y \in \mathbf{B}(\mathcal{H}).$$

Επομένως $E(\Omega)T = TE(\Omega)$, $\forall \Omega \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. □

Πόρισμα 3.1. *Έστω $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής και $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ φασματική ανάλυση της μονάδας στον $\mathcal{H}$, ώστε $A = \int_{\mathbb{R}} t dE_t$. Τότε από την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι $\{A\}'' = \{E_t : t \in \mathbb{R}\}''$.*

Πρόταση 3.5. *Αν $\mathcal{M}$ είναι μία άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, τότε υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ προβολών, το οποίο παράγει την $\mathcal{M}$ ως άλγεβρα von Neumann, δηλαδή $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 1.3 η μοναδιαία μπάλα του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ είναι WOT-συμπαγής, οπότε υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ το οποίο είναι WOT-πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα της $\mathcal{M}$ [3]. Από την προηγούμενη πρόταση, κάθε A_n ανήκει στην norm κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχονται στην $\mathcal{M}$. Επομένως, υπάρχουν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ένα πεπερασμένο σύνολο προβολών $\mathcal{E}_{n,m} = \{E_1^{n,m}, \dots, E_{k_{n,m}}^{n,m}\} \subseteq \mathcal{M}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ώστε $\|A_n - \sum_{i=1}^{k_{n,m}} \lambda_i E_i^{n,m}\| < \frac{1}{m}$ ή ισοδύναμα $A_n \in \overline{< \mathcal{E}_{n,m} >}^{\|\cdot\|}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n$, όπου $\mathcal{E}_n = \bigcup_m \mathcal{E}_{n,m}$.
Εφόσον $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ και η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann έπεται ότι $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{M}$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.
Έστω $T \in \mathcal{E}'$ ή ισοδύναμα $T \in \mathcal{E}_n'$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε $TA_n = A_n T$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $\overline{\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}^{WOT} = (\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1 \cap \mathcal{M}$, ο T μετατίθεται με τη μοναδιαία μπάλα της $\mathcal{M}$, συνεπώς και με όλη την $\mathcal{M}$, άρα $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}'$, άρα $\mathcal{M} = \mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{E}''$. □

3.4 Αβελιανές Άλγεβρες von Neumann

Πρόταση 3.6. *Έστω αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$, η οποία δρα σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$, ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε τον A, ώστε $0 \leq A \leq I$*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.5, υπάρχει $\mathcal{E} = \{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμη οικογένεια προβολών της $\mathcal{M}$, ώστε $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$. Ορίζουμε τον τελεστή $B = \sum_n \frac{1}{4^n}(2E_n - I) = \sum_n \frac{1}{4^n} S_n$, όπου $S_n = 2E_n - I$. Παρατηρούμε ότι $B \in \mathcal{M}$ ενώ: $-\frac{1}{3}I \leq \sum_n \frac{1}{4^n}(-I) \leq B \leq \sum_n \frac{1}{4^n} I \leq \frac{1}{3}I$.
Αρκεί να δείξουμε ότι εάν $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ μετατίθεται με τον B, τότε μετατίθεται με κάθε προβολή E_n. Υποθέτουμε αρχικά ότι ο T μετατίθεται με τον B και τις προβολές $E_1, \dots E_{n-1}$, άρα μετατίθεται και με τον τελεστή:

$$4^n(B - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} S_k) = 4^n(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4^k} S_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4^n}{4^k} S_k = S_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{n+k} = S_n + B_1,$$

[3] Έστω Ξ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Το σύνολο $\Omega = \{\omega_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \Xi\}$ είναι αριθμήσιμο, οπότε υπάρχει αρίθμηση του συνόλου, ώστε $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση

$$d : ((\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1, (\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1) \to \mathbb{R}^+ : (T, S) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\omega_n(T-S)|}{\|\omega_n\|}$$

είναι μετρική. Συνεπώς ο περιορισμός της WOT-τοπολογίας στην $(\mathbf{B}(\mathcal{H}))_1$ είναι μετρικοποιήσιμη, άρα διαχωρίσιμη, αφού είναι συμπαγής.

όπου $B_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{n+k}$
Έπεται λοιπόν ότι ο T μετατίθεται και με τον τελεστή

$$\frac{1}{2}[3(S_n + B_1) - (S_n + B_1)^3] = \frac{3}{2}S_n + \frac{3}{2}B_1 - \frac{1}{2}S_n^3 - \frac{3}{2}S_n^2 B_1 - \frac{3}{2}S_n - B_1^2 - \frac{1}{2}B_1^3 \overset{S_n^2=I}{=}$$
$$= (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})S_n + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2})B_1 - \frac{3}{2}S_n B_1^2 - \frac{1}{2}B_1^3 = S_n + B_2,$$

όπου $B_2 = -\frac{3}{2}S_n B_1^2 - \frac{1}{2}B_1^3$
Ως προς τη νόρμα του τελεστή $\|B_2\|$ βλέπουμε ότι:

$$\|B_2\| = \Big\| - \frac{3}{2}S_n B_1^2 - \frac{1}{2}B_1^3\Big\| \le \frac{3}{2}\|S_n\| \cdot \|B_1^2\| - \frac{1}{2}\|B_1^3\| \le \frac{3}{2}\|B_1\|^2 - \frac{1}{2}\|B_1\|^3 \le \frac{5}{9}\|B_1\|,$$

καθώς $\|S_n\| = 1$ και $\|B_1\| \le \frac{1}{3}$.
Τοποθετώντας τον τελεστή B_2 στη θέση του τελεστή B_1, παρατηρούμε ότι ο T μετατίθεται με τον τελεστή $\frac{1}{2}[3(S_n + B_2) - (S_n + B_2)^3] = S_n + B_3$, όπου $B_3 = -\frac{3}{2}S_n B_2^2 - \frac{1}{2}B_2^3$, οπότε $\|B_3\| \le \frac{5}{9}\|B_2\| \le (\frac{5}{9})^2\|B_1\|$.
Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία B_k με νόρμα $\|B_k\| \le (\frac{5}{9})^{k-1}\|B_1\|$, ώστε ο T να μετατίθεται με τον τελεστή $S_n + B_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς ο T μετατίθεται και με τον τελεστή $\lim\limits_{k\to+\infty}(S_n + B_k) = S_n$, οπότε και με την προβολή E_n.
Για να ολοκληρωθεί η διαδικασία, αρκεί να δείξουμε ότι $TE_1 = ET_1$ ή ισοδύναμα $TS_1 = S_1 T$. Παρατηρούμε ότι

$$4B = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n-1}}S_n = S_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}S_{n+1} = S_1 + A_1,$$

όπου $A_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}S_{n+1}$.
Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό όπως πριν κατασκευάζουμε ακολουθία A_k με νόρμα $\|A_k\| \le (\frac{5}{9})^{k-1}\|A_1\|$, ώστε ο T να μετατίθεται με τον τελεστή $S_1 + A_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Επομένως, όμοια ο T θα μετατίθεται και με την προβολή E_1. Θέτοντας $A = \frac{3}{2}(B + \frac{1}{3}I)$, έχουμε ότι $0 \le A \le I$, ενώ $\{A\}' = \{B\}'$. Επομένως, ο A είναι ο ζητούμενος τελεστής. □

Παρατήρηση 3.1. *Έστω $\mathcal{M}$ μια αβελιανή άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$. Από το φασματικό θεώρημα έχουμε ότι $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$, οπότε από την πρόταση 3.4* *έπεται ότι* $\mathcal{M} = \overline{\{E(\Omega) : \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R}\}}^{\|\cdot\|}$. *Εάν* $P = E(\Omega_0)$ *προβολή, τότε για κάθε* $x \in P(\mathcal{H})$ *παρατηρούμε ότι :*

$$A|_{P(\mathcal{H})}x = AE(\Omega_0)x = E(\Omega_0)AE(\Omega_0)x = E(\Omega_0)\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda\right)E(\Omega_0)x =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \lambda d(E(\Omega_0)E_\lambda E(\Omega_0))x = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(F_\lambda)x, \text{ όπου } F_\lambda = E_\lambda|_{P(\mathcal{H})}$$

καθώς η οικογένεια $\{F_\lambda = \lambda \in \mathbb{R}$ *είναι φασματική ανάλυση της μονάδας στον* $P(\mathcal{H})$. *Έπεται λοιπόν ότι* $\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})} = \overline{\{E_\lambda|_{P(\mathcal{H})} : \Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}}^{\|\cdot\|} = \{A|_{P(\mathcal{H})}\}''$.

Ορισμός 3.4. *Μια αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *καλείται* ***μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra)*** *ή για λόγους συντομίας masa εάν δεν περιέχεται σε άλλη αβελιανή αυτοσυζυγή άλγεβρα στον* $\mathcal{H}$. *Από το Λήμμα του Zorn προκύπτει ότι κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *περιέχεται σε μία masa. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι για κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann* $\mathcal{M}$ *ισχύει ότι* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$, *ενώ η άλγεβρα αυτή είναι masa αν και μόνο αν* $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Πρόταση 3.7. *Αν ο* (X, μ) *είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, τότε η* $\mathcal{M}_\mu$ *είναι masa.*

Απόδειξη. Εφόσον η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $T \in (\mathcal{M}_\mu)'$, υπάρχει $g \in L^\infty(X, \mu)$, ώστε $T = M_g$.

(i) Αρχικά, υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$, οπότε η σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1} \in L^2(X, \mu)$.

Ισχυρισμός : Για κάθε $T \in (\mathcal{M}_\mu)'$ ισχύει ότι $T = M_g$, όπου $g = T\mathbb{1}$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$, έχουμε ότι :

$$Tf = T(f\mathbb{1}) = TM_f\mathbb{1} = M_fT\mathbb{1} = M_fg = fg = gf.$$

Εφόσον ο χώρος $L^\infty(X, \mu)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(X, \mu)$, οι τελεστές T και M_g ταυτίζονται στον $L^2(X, \mu)$. Αρκεί πλέον να δείξουμε ότι $g \in L^\infty(X, \mu)$.

Έστω $\alpha > 0$, ώστε το σύνολο $U_\alpha = \{t \in X : |g(t)| > \alpha\}$ να έχει μέτρο θετικό.

Έχουμε : $\|T\|^2\|\chi_{U_\alpha}\|_2^2 \geq \|T\chi_{U_\alpha}\|^2 = \int |\chi_\alpha g|^2 d\mu \geq \int |\alpha\chi_{U_\alpha}|^2 d\mu = \alpha\|\chi_{U_\alpha}\|_2^2$.

συνεπώς $\|T\| \geq \alpha$, οπότε $\|T\| \geq \|g\|_\infty$.

(*ii*) Στη σ-πεπερασμένη περίπτωση, γράφουμε το χώρο X, ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανα δύο υποσυνόλων X_n πεπερασμένου μέτρου. Από το (*i*), γνωρίζουμε ότι $T|_{X_n} = M_{g_n}$, όπου $g_n = T\chi_n$, και μάλιστα ότι οι τελεστές M_{g_n} είναι ομοιόμορφα φραγμένοι από τη νόρμα του τελεστή T.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο X, η οποία ορίζεται από τη σχέση $g|_{X_n} = g_n|_{X_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι $g \in L^\infty(X, \mu)$, αφού $\|g\|_\infty \leq \sup_n \|g_n\|_\infty \leq \|T\|$. Εφόσον οι τελεστές M_g και T συμπίπτουν στους χώρους $L^2(X_n, \mu)$, συμπίπτουν και στην κλειστή γραμμική τους θήκη, δηλαδή σε όλο τον $L^2(X, \mu)$.

□

Ορισμός 3.5. *Έστω $\mathcal{S}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Ένα διάνυσμα $\xi \in \mathcal{H}$ καλείται* ***διαχωρίζον*** *στον $\mathcal{S}$, αν $S\xi \neq 0, \forall S \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Το ξ καλείται* ***κυκλικό*** *για τον $\mathcal{S}$, αν ο υπόχωρος $\mathcal{S}\xi$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.*

Λήμμα 3.2. *(i) Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$ και $\xi \in \mathcal{H}$ κυκλικό διάνυσμα για τον $\mathcal{S}$, τότε το ξ είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{S}'$*

(ii) Αν η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann και $\xi \in \mathcal{H}$ διαχωρίζον στην $\mathcal{M}$, τότε το ξ είναι κυκλικό διάνυσμα για την $\mathcal{S}'$

Απόδειξη. (*i*) Έστω $T \in \mathcal{S}$ ώστε$T\xi = 0$. Τότε για κάθε $S \in \mathcal{S}$, ισχύει ότι $T(S\xi) = S(T\xi) = 0$. Εφόσον $\overline{\mathcal{S}\xi} = \mathcal{H}$, έπεται ότι $T = 0$

(*ii*) Έστω $P = proj(\overline{\mathcal{M}'\xi})$. Ο $\overline{\mathcal{M}'\xi}$ είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος, άρα $P \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$. Όμως, αφού $I \in \mathcal{M}$, έχουμε ότι $P\xi = \xi$ ή ισοδύναμα $(I - P)\xi = 0$, άρα $I = P$, καθώς το ξ είναι διαχωρίζον για την $\mathcal{M}$. Συνεπώς ο υπόχωρος $\overline{\mathcal{M}'\xi}$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.

□

Λήμμα 3.3. *Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ έχει διαχωρίζον διάνυσμα ξ. Μάλιστα εάν η $\mathcal{M}$ είναι masa τότε το ξ είναι και κυκλικό.*

Απόδειξη. Έστω αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$, και $\mathcal{N}$ μία masa ώστε $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Θα καλούμε δύο διανύσματα ξ, η **πολύ κάθετα** εάν οι υπόχωροι $\mathcal{N}\xi$, $\mathcal{N}\eta$ είναι κάθετοι. Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστική αριθμήσιμη οικογένεια $\Xi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$, αποτελούμενη από πολύ κάθετα μοναδιαία διανύσματα. Έστω $P_n = proj(\mathcal{N}\xi_n)$. Εφόσον $\mathcal{N}\xi_n$ είναι $\mathcal{N}$-αναλλοίωτος, έπεται ότι $P_n \in \mathcal{N}' = \mathcal{N}$.

Ισχυρισμός : Το διάνυσμα $\xi = \sum_n \frac{1}{2^n}\xi_n$ είναι κυκλικό για την $\mathcal{N}$.

Αν το ξ δεν είναι κυκλικό, τότε υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $\eta \in \mathcal{H}$ κάθετο στον υπόχωρο $\mathcal{N}\xi$, οπότε για κάθε $T, S \in \mathcal{N}$ έχουμε ότι $\langle T\eta, S\xi_n\rangle = \langle \eta, T^*S(2^n P_n \xi)\rangle = 0$, αφού $T^*SP_n \in \mathcal{N}$.

Συνεπώς, $\mathcal{N}\eta \perp \mathcal{N}\xi_n, \forall n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς η Ξ είναι μεγιστική οικογένεια πολύ κάθετων διανυσμάτων. □

Ορισμός 3.6. *Αν $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ δύο χώροι Hilbert, δύο υποσύνολα $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{K})$ καλούνται* ***unitarily ισοδύναμα****, αν υπάρχει unitary τελεστής $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, ώστε η απεικόνιση*

$$ad_U : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbf{B}(\mathcal{K}) : A \mapsto UAU^*$$

να απεικονίζει το $\mathcal{S}$ επί του $\mathcal{T}$.

Λήμμα 3.4. *Δύο άλγεβρες von Neumann είναι unitarily ισοδύναμες αν και μόνον αν οι μεταθέτες τους είναι unitarily ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. (⇒) Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{N} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{K})$ δύο άλγεβρες von Neumann και U unitary τελεστής ώστε η απεικόνιση $ad_U : \mathbf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbf{B}(\mathcal{K}) : A \mapsto UAU^*$ να απεικονίζει την $\mathcal{M}$ επί της $\mathcal{N}$. Έστω $T \in \mathcal{M}'$, οπότε $TM = MT, \forall M \in \mathcal{M}$.
Παρατηρούμε ότι $(UTU^*)(UMU^*) = UTMU^* = UMTU^* = UMU^*UTU^*$, $\forall UMU^* \in \mathcal{N}$. Αφού $ad_U(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$, έχουμε ότι $UTU^* \in \mathcal{N}'$.
Όμοια, έχουμε $\forall S \in \mathcal{N}'$ ότι $U^*SU \in \mathcal{M}'$, οπότε η ad_U απεικονίζει την $\mathcal{M}'$ επί της $\mathcal{N}'$. Συνεπώς οι $\mathcal{M}', \mathcal{N}'$ είναι unitarily ισοδύναμες.

(⇐) Εφόσον $(\mathcal{M}')' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$, επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα σε αυτήν την κατεύθυνση, όπως και στην (⇒) και έχουμε το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 3.2. *Αν μία άλγεβρα von Neumann είναι unitarily ισοδύναμη με μία masa, τότε είναι και αυτή masa.*

Παρατήρηση 3.2. *Η απεικόνιση ad_U είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός. Επομένως, εάν δύο C^*-άλγεβρες είναι unitarily ισοδύναμες, τότε είναι και ισομετρικά $*$-ισόμορφες. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει. Πράγματι, εάν $\mathcal{M}$ είναι μία masa, τότε είναι ισομετρικά $*$-ισόμορφη με την $\mathcal{M}^{(2)}$. Όμως ο μεταθέτης της $\mathcal{M}^{(2)}$ είναι η άλγεβρα $\mathbf{M_2}(\mathcal{M})$, οπότε η $\mathcal{M}^{(2)}$ δεν είναι masa . Συνεπώς $\mathcal{M}, \mathcal{M}^{(2)}$ δεν είναι unitarily ισοδύναμες.*

Παρατήρηση 3.3. *Έστω $E(\cdot)$ ένα φασματικό μέτρο. Τότε για κάθε $\xi \in \mathcal{H}$ διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M} = \{E(\cdot)\}''$, ισχύει ότι το μέτρο μ_ξ, όπου $\mu_\xi(\Omega) = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle$ για κάθε $\Omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, είναι ισοδύναμο με το $E(\cdot)$, δηλαδή έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα. Πράγματι, έστω ένα $\Omega \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ώστε $\mu_\xi(\Omega) = 0$. Έχουμε λοιπόν:*

$$0 = \mu_\xi(\Omega) = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle = \|E(\Omega)\xi\|^2 \Leftrightarrow E(\Omega)\xi = 0 \overset{\xi \text{ διαχωρίζον}}{\Leftrightarrow} E(\Omega) = 0,$$

Συνεπώς, αν ξ, ψ διαχωρίζοντα διανύσματα για την $\mathcal{M}$, τότε τα μ_ξ και μ_ψ είναι ισοδύναμα μέτρα, οπότε έχουμε $L^\infty(X, \mu_\xi) = L^\infty(X, \mu_\psi)$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$. Το τελευταίο αποδεικνύεται εύκολα:

$$f \equiv 0 \in L^\infty(X, \mu_\xi) \Leftrightarrow \mu_\xi(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu_\psi(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \in L^\infty(X, \mu_\psi)$$

Πρόταση 3.8. *Έστω $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ μία φασματική ανάλυση της μονάδας με φορέα F σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και κανονικό μέτρο Borel μ, ισοδύναμο του φασματικού μέτρου που επάγει η $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$. Από το πόρισμά 2.1 ορίζεται ο $*$-μορφισμός*

$$\Phi : \mathcal{W}(F) \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dE$$

Εφόσον ο χώρος $(F, \mathbb{B}(F), \mu)$ είναι χώρος κανονικού μέτρου, έπεται ότι για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη $f : F \to \mathbb{C}$ υπάρχει συνάρτηση $g \in \mathcal{W}(F)$, ώστε $g = f$ μ-σ.π.. Θέτοντας $\mathcal{M} = \{E_t : t \in \mathbb{R}\}''$, ορίζουμε την απεικόνιση :

$$\widetilde{\Phi} : L^\infty(F, \mu) \to \mathcal{M} : f \mapsto \Phi(g)$$

Τότε :

(i) *Η απεικόνιση $\widetilde{\Phi}$ είναι ισομετρικός $*$-μορφισμός*

(ii) *Έστω $\xi \in \mathcal{H}$ διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$. Υπάρχει unitary τελεστής :*

$$U : \overline{\mathcal{M}\xi} \mapsto L^2(F, \mu_\xi), \text{ ώστε } U\widetilde{\Phi}(f)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}}U^* = M_f, \forall f \in L^\infty(F, \mu_\xi)$$

(iii) *Η απεικόνιση $\widetilde{\Phi}$ είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός C^*-αλγεβρών.*

Απόδειξη. (*i*) Πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{\Phi}$ είναι καλά ορισμένη, $*$-μορφισμός και ισομετρία.

- Η $\widetilde{\Phi}$ είναι καλά ορισμένη.
  Έστω $\Omega \in \mathbb{B}(F)$. Τότε υπάρχει σύνολο $\Omega_1 \in \mathbb{B}(F)$, ώστε $\mu(\Omega \triangle \Omega_1) = 0$ και $\chi_{\Omega_1} \in \mathcal{W}(F)$, οπότε έχουμε ότι $\widetilde{\Phi}(\chi_\Omega) = E(\Omega_1)$. Όμως επειδή $\mu(\Omega \triangle \Omega_1) = 0$, έπεται ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1)$, οπότε ισχύει ότι $\widetilde{\Phi}(\chi_\Omega) = E(\Omega)$. Αφού $E(\Omega) \in \mathcal{M}$, για κάθε $\Omega \in \mathbb{B}(F)$ και η $\mathcal{M}$ είναι norm-κλειστή άλγεβρα, έχουμε ότι $\widetilde{\Phi}(L^\infty(F,\mu)) \subseteq \mathcal{M}$.
  Εξάλλου, για κάθε $f, g \in \mathcal{W}(F)$, όπου $f = g$ μ-$\sigma.\pi.$, ισχύει ότι $\Phi(f) = \Phi(g)$ οπότε $\widetilde{\Phi}(f) = \widetilde{\Phi}(g)$.
- Εύκολα βλέπουμε ότι η $\widetilde{\Phi}$ είναι $*$-μορφισμός C^*-αλγεβρών.
- Η $\widetilde{\Phi}$ είναι ισομετρία.
  Έστω απλή συνάρτηση $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Omega_k}$. Έχουμε λοιπόν ότι:
  $$\|\widetilde{\Phi}(f)\| = \max_{1\le k\le n}\{|c_k| : E(\Omega_k) \neq 0\} = \max_{1\le k\le n}\{|c_k| : \mu(\Omega_k) \neq 0\} = \|f\|_\infty.$$
  Εφόσον η $\widetilde{\Phi}$ διατηρεί τις αποστάσεις στον πυκνό υπόχωρο των απλών συναρτήσεων, η $\widetilde{\Phi}$ είναι ισομετρία.

(*ii*) Ορίζουμε το χώρο $\mathcal{H}_0 = \{\widetilde{\Phi}(f)\xi : \ f \text{ απλή } \in L^\infty(F,\mu_\xi)\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{H}_0$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Μάλιστα, από το θεώρημα δεύτερου μεταθέτη, παρατηρούμε ότι $\mathcal{M} = \overline{\{E_t : t \in \mathbb{R}\}}^{SOT} = \overline{\{\widetilde{\Phi}(\chi_{(-\infty,t]}) : t \in \mathbb{R}\}}^{SOT}$. Συνεπώς για κάθε τελεστή $M \in \mathcal{M}$ υπάρχει ακολουθία $(\xi_n)_n$ στον $\mathcal{H}_0$, ώστε $\xi_n \to M\xi$. Συνεπώς, ο υπόχωρος $\mathcal{H}_0$ είναι πυκνός στον $\overline{\mathcal{M}\xi}$.
Ορίζουμε τον τελεστή $U_0 : \mathcal{H}_0 \to L^2(F,\mu_\xi) : \widetilde{\Phi}(f)\xi \mapsto f$. Ισχυριζόμαστε ότι ο τελεστής U_0 είναι ισομετρία.
Έστω $f = \sum \lambda_\kappa \chi_{\Omega_\kappa}$, όπου Ω_κ ξένα ανά δύο σύνολα. Έχουμε:

$$\|f\|_2^2 = \int \Big|\sum_{k=1}^{n} \lambda_\kappa \chi_{\Omega_\kappa}\Big|^2 d\mu_\xi = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_\kappa|^2 \mu_\xi(\Omega_\kappa) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_\kappa|^2 \langle E(\Omega_\kappa)\xi, \xi\rangle =$$
$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_\kappa|^2 \|E(\Omega_\kappa)\xi\|^2 \overset{\Pi.\Theta.}{=} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_\kappa E(\Omega_\kappa)\xi\Big\|^2 = \|\widetilde{\Phi}(f)\xi\|^2$$

Συνεπώς ο τελεστής U_0 δέχεται ισομετρική επέκταση $U : \overline{\mathcal{M}\xi} \to L^2(F, \mu_\xi)$.

Μάλιστα, ο τελεστής U είναι επί, καθώς :

$$U(\overline{\mathcal{M}\xi}) = U(\overline{\mathcal{H}_0}) \overset{U \text{ συνεχής}}{=} \overline{U_0(\mathcal{H}_0)}^{\|\cdot\|_2} = \overline{\{f : f \text{ απλή}\}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(F, \mu_\xi)$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in L^\infty(F, \mu_\xi)$, ισχύει ότι $U\widetilde{\Phi}(f)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}}U^* = M_f$.

Αρκεί να το δείξουμε για κάθε f απλή συνάρτηση.

Έστω g απλή συνάρτηση στο χώρο $L^2(F, \mu_\xi)$. Τότε έχουμε:
$(U\widetilde{\Phi}(f)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}}U^*)g = (U\widetilde{\Phi}(f)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}})(U^*g) = (U\widetilde{\Phi}(f)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}})(\widetilde{\Phi}(g)\xi) = U(\widetilde{\Phi}(f)\widetilde{\Phi}(g))\xi = U(\widetilde{\Phi}(fg))\xi = fg = M_f g$.

(iii) Αν $T \in \mathcal{M}$, τότε ο T μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της μορφής $\widetilde{\Phi}(f)$ και άρα ο $UT|_{\overline{\mathcal{M}_\xi}}U^*$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο της $\mathcal{M}_\mu$. Συνεπώς, αφού η $\mathcal{M}_\mu$ είναι masa, έχουμε ότι $UT|_{\overline{\mathcal{M}_\xi}}U^* \in \mathcal{M}_\mu$, οπότε υπάρχει $f \in L^\infty(F, \mu)$ ώστε :
$UT|_{\overline{\mathcal{M}\xi}}U^* = M_f \Rightarrow T|_{\overline{\mathcal{M}\xi}} = U^*M_fU = \widetilde{\Phi}(f) \Rightarrow T\xi = \widetilde{\Phi}(f)\xi \Rightarrow$
$\Rightarrow (T - \widetilde{\Phi}(f))\xi = 0 \overset{\xi \text{ διαχωρίζον}}{\Rightarrow} T = \widetilde{\Phi}(f)$

□

Παρατήρηση 3.4. **(α)** *Για κάθε προβολή P στην $\mathcal{M} = \{E_t : t \in \mathbb{R}\}''$, υπάρχει Borel σύνολο $\Omega \in \mathbb{B}(F)$, ώστε $P = E(\Omega)$. Πράγματι, έστω προβολή $P \in \mathcal{M}$. Από την πρόταση 3.8 υπάρχει $f \in L^\infty(F, \mu)$, όπου μ κανονικό μέτρο ισοδύναμο του φασματικού μέτρου $E(\cdot)$, ώστε $\int f dE = P$, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int f dE = \int f^2 dE = \int \overline{f} dE.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $f = f^2 = \overline{f}$ μ-σ.π., άρα $f(x) \in \{0, 1\}$, σχεδόν για κάθε x. Θέτοντας $\Omega = \{x \in F : f(x) = 1\}$, έχουμε ότι $f = \chi_\Omega$, οπότε $P = E(\Omega)$.

(β) *Έστω αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ και $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ η φασματική ανάλυση της μονάδας του A. Τότε η απεικόνιση $\widetilde{\Phi}$, όπως ορίστηκε στην πρόταση 3.8 αποτελεί επέκταση του Συναρτησιακού Λογισμού του τελεστή A, οπότε σε αυτήν την περίπτωση θα γράφουμε $f(A) = \widetilde{\Phi}(f), \forall f \in L^\infty(\sigma(A), \mu)$.*

Πόρισμα 3.3. *Από την πρόταση 3.6 γνωρίζουμε ότι σε κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$, η οποία δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$, ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$. Γνωρίζουμε ότι αν $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι η φασματική* *ανάλυση της μονάδας του A, τότε* $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}'' = \{A\}''$. *Συνεπώς επαναδιατυπώνοντας την πρόταση 3.8, έχουμε τα εξής αποτελέσματα :*

1. *Η* $\mathcal{M}$ *είναι ισομετρικά ∗-ισόμορφη με τον* $L^\infty(\sigma(A), \mu)$, *όπου* μ *κανονικό μέτρο, ισοδύναμο του φασματικού του A.*

2. *Έστω* $\xi \in \mathcal{H}$ *διαχωρίζον διάνυσμα για την* $\mathcal{M}$. *Υπάρχει unitary τελεστής :*

$$U : \overline{\mathcal{M}\xi} \mapsto L^2(\sigma(A), \mu_\xi),\ \text{ώστε}\ Uf(A)|_{\overline{\mathcal{M}\xi}}U^* = M_f, \forall f \in L^\infty(\sigma(A), \mu_\xi)$$

Πόρισμα 3.4. *Στην πρόταση 3.8(ii), αν το* ξ *είναι επιπλέον κυκλικό διάνυσμα για την* $\mathcal{M}$, *τότε έχουμε ότι* $\overline{\mathcal{M}\xi} = \mathcal{H}$, *οπότε ορίζεται ο αντίστοιχος unitary τελεστής*

$$U : \mathcal{H} \to L^2(F, \mu_\xi),\ \text{όπου}\ U\widetilde{\Phi}(f)U^* = M_f,\ \forall f \in L^\infty(F, \mu_\xi),$$

άρα η $\mathcal{M}$ *είναι unitarily ισοδύναμη με την* $\mathcal{M}_{\mu_\xi}$. *Από το πόρισμα 3.2, η* $\mathcal{M}$ *είναι masa.*
Έστω τώρα σ*-πεπερασμένο κανονικό μέτρο* μ, *το οποίο είναι ισοδύναμο του* μ_ξ. *Από το θεώρημα Radon-Nikodym ([15]) υπάρχει θετική* μ*-σ.π. απεικόνιση* $f \in L^1(F, \mu)$, *ώστε*

$$\mu_\xi(\Omega) = \int_\Omega f d\mu,\ \forall \Omega \in \mathbb{B}(F).$$

Ο τελεστής $W : L^2(F, \mu_\xi) \to L^2(F, \mu) : g \mapsto \sqrt{f}g$ *είναι ισομετρία, επειδή για κάθε* $g \in L^2(\sigma(A_R), \mu_\xi)$, *έχουμε :*

$$\|Wg\|_2^2 = \int f|g|^2 d\mu_{x_i} = \int |g|^2 d\mu_{x_1} = \|g\|_2^2.$$

Μάλιστα, ο W είναι unitary, καθώς ορίζεται ο αντίστροφος τελεστής

$$W : L^2(F, \mu) \to L^2(F, \mu_\xi) : g \mapsto \frac{1}{\sqrt{f}}g.$$

Εξάλλου, για κάθε $f \in L^\infty(F, \mu)$ *ισχύει ότι :* $U^*W^*M_fWU = \widetilde{\Phi}(f)$.
Έπεται ότι η $\mathcal{M}$ *είναι unitarily ισοδύναμη με την* $\mathcal{M}_\mu$, *για κάθε* σ*-πεπερασμένο κανονικό μέτρο* μ, *ισοδύναμο του φασματικού μέτρου που επάγει η* $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω* $\mathcal{M}$ *αβελιανή άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *και αυτοσυζυγής τελεστής* $A \in \mathcal{M}$, *ώστε* $\{A\}'' = \mathcal{M}$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Η* $\mathcal{M}$ *είναι masa.*

(*ii*) *Η* $\mathcal{M}$ *έχει κυκλικό διάνυσμα.*

(*iii*) *Η* $\mathcal{M}$ *είναι unitarily ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα* $\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty((\sigma(A), \mu)\}$, *για κάθε* σ*-πεπερασμένο κανονικό μέτρο ισοδύναμο του φασματικού μέτρου του A.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Λήμμα 3.3

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Εάν $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι η φασματική ανάλυση της μονάδας του A, τότε $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}'' = \mathcal{M}$. Επομένως από το πόρισμα 3.4, η $\mathcal{M}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Πρόταση 3.7

□

Συμβαση : Στα επόμενα κεφάλαια, κάθε μέτρο θα θεωρείται ως σ-πεπερασμένο κανονικό μέτρο.

Κεφάλαιο 4

Φασματική Πολλαπλότητα

4.1 Εισαγωγή στην Θεωρία Πολλαπλότητας

Ορισμός 4.1. *Θα λέμε πως μία αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ έχει* ***ομοιόμορφη πολλαπλότητα*** *n, όπου $n \in \{+\infty, 1, 2, ...\}$, αν υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{M}'$ και unitary τελεστής $U : P(\mathcal{H}) \otimes \ell^2(n) \to \mathcal{H}$, ώστε η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}$ να είναι masa, και να ισχύει ότι:*

$$ad_U((A|_{P(\mathcal{H})})^{(n)}) = U(A|_{P(\mathcal{H})})^{(n)}U^* = A, \ \forall A \in \mathcal{M}$$

οπότε η $\mathcal{M}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})})^{(n)}$.

Παρατήρηση 4.1. **(α)** *Προφανώς εάν η $\mathcal{M}$ είναι masa τότε έχει πολλαπλότητα 1.*

(β) *Από το λήμμα 3.5, η ad_U μεταφέρει την $\left[(\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})})^{(n)}\right]'$ επί της $\mathcal{M}'$, όπου*

$$\left[(\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})})^{(n)}\right]' = (\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{B}(\ell^2(n)) = \begin{cases} (\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{M_n}(\mathbb{C}) & \text{εάν } n < +\infty \\ (\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{B}(\ell^2) & \text{εάν } n = +\infty \end{cases}$$

Λήμμα 4.1. *Κάθε μη μηδενικό ιδεώδες J του $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ περιέχει την άλγεβρα των τελεστών πεπερασμένης τάξης $\mathbf{F}(\mathcal{H})$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το J περιέχει τις προβολές τάξης 1 . Επειδή το J είναι μη μηδενικό ιδεώδες, υπάρχει μη μηδενικός τελεστής $T \in J$, δηλαδή $Tx = 0$, για κάποιο $x \in \mathcal{H}$. Έστω P μια προβολή τάξης 1, οπότε υπάρχει $y \in \mathcal{H}$, ώστε

$Pz = (y \otimes y^*)z = \langle z, y\rangle y$, για κάθε $z \in \mathcal{H}$. Προφανώς, μπορούμε να βρούμε τελεστή $S \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ώστε $S(Tx) = y$. Επομένως, έχουμε

$$Pz = \langle z, y\rangle y = \langle z, STx\rangle STx = ST\langle T^*S^*z, x\rangle x = ST(x \otimes x^*)T^*S^*z$$

Συνεπώς $P \in J$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2. *Εάν $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann με ομοιόμορφη πολλαπλότητα n, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι $n < +\infty$. Αφού η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n, υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{M}'$ και unitary τελεστής $U : (P(\mathcal{H}))^n \to \mathcal{H}$, ώστε από την προηγούμενη παρατήρηση, η ad_U να στέλνει την $(\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ επί της $\mathcal{M}'$. Έστω σ χαρακτήρας της masa $\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}$. Ορίζεται ο μορφισμός :

$$\sigma \otimes id_n : \mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})} \otimes \mathbf{M_n}(\mathbb{C}) \to \mathbf{M_n}(\mathbb{C}) : (M_{ij})_{n\times n} \mapsto (\sigma(M_{ij}))_{n\times n}$$

όπου $M_{ij} \in \mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}$. Έστω ότι η $\mathcal{M}$ έχει και ομοιόμορφη πολλαπλότητα m. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(α) Εάν $m < +\infty$, τότε υπάρχει προβολή $Q \in \mathcal{M}'$ και unitary τελεστής
$V : (Q(\mathcal{H}))^m \to \mathcal{H}$, ώστε η ad_V να στέλνει την $(\mathcal{M}|_{Q(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{M_m}(\mathbb{C})$ επί της $\mathcal{M}'$
Θεωρούμε τον τελεστή $J = I|_{Q(\mathcal{H})}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{C}J \subseteq \mathcal{M}|_{Q(\mathcal{H})}$.
Θέτουμε $\mathcal{A} = \mathbb{C}J \otimes \mathbf{M_m}(\mathbb{C}) \subseteq (\mathcal{M}|_{Q(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{M_m}(\mathbb{C})$.
Προφανώς η απεικόνιση $\omega : \mathbf{M_m}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A} : (\alpha_{ij}) \mapsto (\alpha_{ij}J)$ είναι $*$-ισομορφισμός.
Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\mathbf{M_m}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega} \mathcal{A} \xrightarrow{ad_V|_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}' \xrightarrow{ad_U^*} (\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}) \otimes \mathbf{M_n}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sigma\otimes id_n} \mathbf{M_n}(\mathbb{C})$$

Η απεικόνιση $\phi : \sigma \otimes id_n \circ ad_{U^*} \circ ad_V|_{\mathcal{A}} \circ \omega : \mathbf{M_m}(\mathbb{C}) \to \mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ είναι $*$-μορφισμός . Γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $ker\phi$ είναι ιδεώδες της άλγεβρας $\mathbf{M_m}(\mathbb{C})$, και μάλιστα $ker\phi \neq \mathbf{M_m}(\mathbb{C})$, καθώς $\phi(\mathbb{1}_{m\times m}) = \mathbb{1}_{n\times n}$. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι η άλγεβρα $\mathbf{M_m}(\mathbb{C})$ δεν έχει γνήσια ιδεώδη, εκτός του τετριμμένου, οπότε $ker\phi = 0$, άρα $n = m$.

(β) Εάν $m = +\infty$, επαναλαμβάνουμε τον ίδιο συλλογισμό όπως στο βήμα **(α)**, και καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς από το ίδιο λήμμα ο ο πυρήνας $ker\phi$ περιέχει την άλγεβρα $\mathbf{F}(\mathcal{H})$, η οποία είναι απειροδιάστατη.

□

Πρόταση 4.1. *Έστω $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}$ φασματική ανάλυση της μονάδας με φορέα F, η οποία δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και $\mathcal{M} = \{E_t : t \in \mathbb{R}\}''$. Εάν η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n, τότε υπάρχει unitary τελεστής $U : \mathcal{H} \to (L^2(F,\mu)) \otimes \ell^2(n)$, όπου μ ισοδύναμο μέτρο με το φασματικό που επάγει η $\{E_t\}_t$, ώστε $U\widetilde{\Phi}(f)U^* = (M_f)^{(n)}$, για κάθε $f \in L^\infty(F,\mu)$. Συνεπώς, η $\mathcal{M}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την άλγεβρα $(\mathcal{M}_\mu)^{(n)}$.*

Απόδειξη. Αφού η $\mathcal{M}$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n, υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{M}'$, και unitary τελεστής

$$U_1 : P(\mathcal{H})^{\otimes}\ell^2(n) \to \mathcal{H}, \text{ ώστε } U(\widetilde{\Phi}(f)|_{P(H)})^{(n)}U^* = \widetilde{\Phi}(f), \ \forall f \in L^\infty(F,\mu).$$

Εφόσον η $\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}$ είναι masa, από το πόρισμα 3.4, υπάρχει unitary τελεστής

$$U_2 : P(\mathcal{H}) \to (L^2(F,\mu)), \text{ ώστε } U_2^* M_f U_2 = \widetilde{\Phi}(f)|_{P(\mathcal{H})}, \ \forall f \in L^\infty(F,\mu).$$

Συνεπώς ορίζεται ο unitary τελεστής

$$U = (U_2)^{(n)} \circ U_1^* : \mathcal{H} \to L^2(F,\mu) \otimes \ell^2(n), \text{ ώστε } U\widetilde{\Phi}(f)U^* = (M_f)^{(n)}, \forall f \in L^\infty(F,\mu).$$

□

Ορισμός 4.2. *Έστω $\mathcal{M}$ μια αβελιανή άλγεβρα von Neumann. Θα λέμε ότι μία μη μηδενική προβολή $P \in \mathcal{M}$ είναι πολλαπλότητας n, όπου $n \in \{+\infty, 1, 2, \dots\}$ εάν η $\mathcal{M}|_{P(H)}$ έχει πολλαπλότητα n.*

Λήμμα 4.3. *Έστω $\mathcal{M}$ μία αβελιανή άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.*

(*i*) *Αν $P \in \mathcal{M}$ μία προβολή πολλαπλότητας n, τότε για κάθε προβολή $P' \in \mathcal{M}$ με $P' \leq P$, ισχύει ότι η P' είναι προβολή πολλαπλότητας n*

(*ii*) *Αν $P_a \in \mathcal{M}$ προβολές πολλαπλότητας n, τότε και η $P = \vee P_a$ είναι προβολή πολλαπλότητας n.*

Απόδειξη. (*i*) Αρκεί να δείξουμε ότι αν η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n και $P \in \mathcal{M}$, τότε η P έχει πολλαπλότητα n. Από την πρόταση 3.6, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$, ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$, και μάλιστα, αφού $P \in \mathcal{M}$, υπάρχει $\Omega \in \mathbf{B}(\sigma(A))$, ώστε $P = E(\Omega)$, όπου $E(\cdot)$ το φασματικό μέτρο του A.

Εφόσον η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n, υπάρχει unitary τελεστής

$$U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(A),\mu)\otimes \ell^2(n) \text{ ώστε } Uf(A)U^* = (M_f)^{(n)}, \forall f \in L^\infty(\sigma(A),\mu).$$

Θεωρούμε τον τελεστή $U|_{P(\mathcal{H})} : P(\mathcal{H}) \to (M_{\chi_\Omega}L^2(\sigma(A),\mu))\otimes \ell^2(n)$. Ο $U|_{P(\mathcal{H})}$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, και μάλιστα επί . Πράγματι, παρατηρούμε ότι :

$$UP(\mathcal{H}) = UE(\Omega)(\mathcal{H}) = U\chi_\Omega(A)(\mathcal{H}) = U\chi_\Omega(A)U^*(L^2(\sigma(A),\mu)\otimes \ell^2(n)) =$$
$$= (M_{\chi_\Omega})^{(n)}(L^2(\sigma(A),\mu)\otimes \ell^2(n)) = (M_{\chi_\Omega}L^2(\sigma(A),\mu))\otimes \ell^2(n)$$

Επομένως, ο $U|_{P(\mathcal{H})}$ είναι unitary τελεστής και μάλιστα ισχύει ότι:
$U|_{P(\mathcal{H})}f(A)|_{P(\mathcal{H})}\left(U|_{P(\mathcal{H})}\right)^* = (M_{\chi_\Omega f})^{(n)}, \forall f \in L^\infty(\sigma(A),\mu)$,
δηλαδή η $\mathcal{M}|_{P(H)}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την αβελιανή άλγεβρα von Neumann $M_{\chi_\Omega}\mathcal{M}_\mu = \{M_{\chi_\Omega f}\,,\ f \in L^\infty(\sigma(A),\mu)\}$.
Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι η άλγεβρα $M_{\chi_\Omega}\mathcal{M}_\mu$ είναι masa. Ορίζουμε το μέτρο $\mu|_\Omega : \mathbb{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^+ : B \mapsto \mu|_\Omega(B) = \mu(B)$.
Θεωρούμε τον τελεστή $J = M_{\chi_\Omega}L^2(\sigma(A),\mu) \to L^2(\Omega,\mu|_\Omega) : \chi_\Omega f \mapsto f|_\Omega$.
Προφανώς ο J είναι unitary, ενώ $JM_{\chi_\Omega}\mathcal{M}_\mu J^* = \mathcal{M}_{\mu|_\Omega}$. Εφόσον η $\mathcal{M}_{\mu|_\Omega}$ είναι masa, έπεται ότι και η $M_{\chi_\Omega}\mathcal{M}_\mu$ είναι masa.

(ii) Έστω $P = \bigvee_{a\in A} P_a$, όπου $P_a \in \mathcal{M}$. Για κάθε πεπερασμένο υπόσυνολο F του A, γνωρίζουμε ότι $\bigvee_{a\in F} P_a \in \mathcal{M}$. Αν θέσουμε $\mathbb{F} = \{F$ πεπερασμένο υποσύνολο του $A\}$, τότε η οικογένεια $\left\{\bigvee_{a\in F} P_a : F\in\mathbb{F}\right\}$ είναι αύξον δίκτυο, επομένως από την πρόταση (1.1), έχουμε ότι $\bigvee_{F\in\mathbb{F}}\left\{\bigvee_{a\in F} P_a : F\in\mathbb{F}\right\} = \bigvee_{a\in A} P_a \in \mathcal{M}$.
Έστω τώρα ξ διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$.
Εφόσον $P \in \mathcal{M}$, έπεται ότι υπάρχει $\Omega \in \mathbb{B}(\sigma(A))$, ώστε $P = E(\Omega)$.
Μάλιστα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει προβολή P_{a_k}, ώστε $\|P_{a_k}\xi - P\xi\| < \frac{1}{k}$.
Παρατηρούμε ότι $\| \vee P_{a_k}\xi - P\xi\| < \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N}$,
οπότε $P = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} P_{a_k}$, καθώς το ξ είναι διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$.
Εφόσον $P_{a_k} \in \mathcal{M}$, υπάρχουν $B_k \in \mathbb{B}(\sigma(A))$, ώστε $P_{a_k} = E(B_k)$.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε το Borel σύνολο $\Omega_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$. Άρα $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, για κάθε $i \neq j$, ενώ $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$. Θεωρούμε τις προβολές $P_k = E(\Omega_k) \in \mathcal{M}$, οι οποίες είναι κάθετες ανά δύο, οπότε $\forall x \in \mathcal{H},\ Px = \vee P_{a_k}x = \vee P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$.

Αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $P_k \le P_{a_k}$, από το (i) έχουμε ότι οι P_k είναι προβολές πολλαπλότητας n. Επομένως από την πρόταση 4.1, υπάρχουν unitaries
$U_k : P_k(\mathcal{H}) \to L^2(\Omega_k, \mu|_{\Omega_k}) \otimes \ell^2(n)$, ώστε $U_k \mathcal{M}|_{P_k(\mathcal{H})} U_k^* \to (\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}})^{(n)}$
Παίρνοντας ευθύ άθροισμα έχουμε τον unitary τελεστή:

$$U : \sum_{k=1}^{\infty} \oplus P_k(\mathcal{H}) = P(\mathcal{H}) \to \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \Big(L^2(\Omega_k, \mu|_{\Omega_k}) \otimes \ell^2(n)\Big),$$

όπου $U\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})} U^* = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \Big(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\Big)^{(n)}$.

Αρκεί πλέον να δείξουμε ότι η άλγεβρα $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus \Big(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\Big)^{(n)}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $\Big(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}}\Big)^{(n)}$. Θεωρούμε τον unitary τελεστή

$$W : \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \Big(L^2(\Omega_k, \mu|_{\Omega_k}) \otimes \ell^2(n)\Big) \to L^2(\Omega, \mu|_{\Omega}) \otimes \ell^2(n) : \sum_{k=1}^{\infty} \oplus f_k|_{\Omega_k}^{(n)} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{\Omega_k}\right)^{(n)},$$

και έχουμε ότι $W^* M_f^{(n)} W = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \Big(M_{f|_{\Omega_k}}\Big)^{(n)}$, $\forall f \in L^{\infty}(\Omega, \mu|_{\Omega})$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Λήμμα 4.4. *Έστω $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος χώρος Hilbert . Σε κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumannστον $\mathcal{H}$ υπάρχει μη μηδενική προβολή $P \in \mathcal{M}$, ώστε η $\mathcal{M}|_{P(\mathcal{H})}$ να έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $x_1 \in \mathcal{H}$ διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$, και θέτουμε Q_1 την προβολή στο χώρο $\overline{\mathcal{M}x_1}$, οπότε $Q_1 \in \mathcal{M}'$.
Όμοια επιλέγουμε $x_2 \in \mathcal{H}$ διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}|_{Q_1^{\perp}(\mathcal{H})}$, και θέτουμε Q_2 την προβολή στο χώρο $\overline{\mathcal{M}|_{Q_1^{\perp}(\mathcal{H})} x_2} = \overline{\mathcal{M}x_2}$, οπότε $Q_2 \in \mathcal{M}'$.
Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε μία ακολουθία διανυσμάτων $x_n \in \mathcal{H}$ και κάθετων ανά δύο προβολών $Q_n = proj(\overline{\mathcal{M}x_n})$, ώστε x_{n+1} διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^{\perp}(\mathcal{H})}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την προβολή $\overline{Q_n} = \wedge\{P \in \mathcal{M} : P \ge Q_n\}$, η οποία ανήκει στην $\mathcal{M}$.
Ισχυρισμός : $I = \overline{Q_1} \ge \overline{Q_n} \ge \overline{Q_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Για κάθε $P \in \mathcal{M}$, όπου $P \ge Q_1$, ισχύει $Px_1 = x_1 \Leftrightarrow (I - P)x_1 = 0$, οπότε αφού το x_1 είναι διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$, έχουμε ότι $I = P$, οπότε $\overline{Q_1} = I$.

Όμοια τώρα εάν $P \in \mathcal{M}$, όπου $P \geq Q_n$, ισχύει $Px_n = x_n \Leftrightarrow (I-P)x_n = 0$. Όμως το x_n είναι διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}|_{\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\right)^{\perp}(\mathcal{H})}$, άρα $(I-P)\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\right)^{\perp} = 0$

Εφόσον $Q_{n+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^{\perp} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\right)^{\perp}$, έχουμε ότι $(I-P)Q_{n+1} = 0$, άρα $PQ_{n+1} = Q_{n+1} \Rightarrow P \geq Q_{n+1}$, οπότε $\overline{Q_n} \geq \overline{Q_{n+1}}$, και ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(i) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $\overline{Q_{n_0}} = I > \overline{Q_{n_0+1}}$.

(ii) $\overline{Q_n} = I, \ \forall n \geq 1$.

Στην περιπτωση (i), θέτουμε $R = I - \overline{Q_{n_0+1}}$, άρα $R \in \mathcal{M}$. Συμβολίζουμε $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}|_{R(\mathcal{H})}$ και $A_R = A|_{R(\mathcal{H})}$.

Εφόσον το διάνυσμα x_{n_0+1} είναι διαχωρίζον για την $\mathcal{M}|_{\left(\sum_{i=1}^{n_0} Q_i\right)^{\perp}(\mathcal{H})}$, κι επειδή

$$R\left(\sum_{i=1}^{n_0} Q_i\right)^{\perp} x_{n_0+1} = Rx_{n_0+1} = (I - \overline{Q_{n_0+1}})x_{n_0+1} = 0,$$

έπεται ότι $R\left(\sum_{i=1}^{n_0} Q_i\right)^{\perp} = 0$, οπότε $R \leq R\left(\sum_{i=1}^{n_0} Q_i\right)^{\perp}$. Συνεπώς $R(\mathcal{H}) = \bigoplus_{i=1}^{n_0} RQi(\mathcal{H})$

Ισχυρισμός : Το διάνυσμα Rx_i είναι διαχωρίζον για την $\mathcal{M}_R$.

Έστω $M \in \mathcal{M}$, ώστε $M|_{R(\mathcal{H})}(Rx_i) = 0$. Παρατηρούμε ότι:

$M|_{R(\mathcal{H})}(Rx_i) = 0 \Rightarrow MRx_i = 0 \Rightarrow MRQ_i(x_i) = 0 \Rightarrow MR|_{Q_i(\mathcal{H})}(x_i) = 0$.

Εφόσον το διάνυσμα x_i είναι κυκλικό για την $\mathcal{M}|_{Q_i(\mathcal{H})}$, είναι διαχωρίζον στην $(\mathcal{M}|_{Q_i(\mathcal{H})})' \supseteq \mathcal{M}|_{Q_i(\mathcal{H})}$. Έπεται ότι :

$$MR|_{Q_i(\mathcal{H})} = 0 \Rightarrow MRQ_i = 0 \Rightarrow (I - MR)Q_i = Q_i \Rightarrow I - MR \supseteq Q_i, \ \forall i \in \{1, ..., n_0\}.$$

Συνεπώς έχουμε $MR = 0 \Rightarrow M|_{R(\mathcal{H})} = 0$.

Ισχυρισμός : $RQ_i(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$

$(\subseteq)$ Έστω $RQ_ix \in RQ_i(\mathcal{H})$. Εφόσον $Q_ix \in \overline{\mathcal{M}x_i}$, υπάρχει ακολουθία τελεστών $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{M}$, ώστε $Q_ix - \lim_n M_nx_i$. Οπότε $RQ_ix = \lim_n RM_nx_i = \lim_n M_nRx_i = \lim_n M_n|_{R(\mathcal{H})}Rx_i$.

Συνεπώς $RQ_i(\mathcal{H}) \subseteq \overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$.

$(\supseteq)$ Έστω $M \in \mathcal{M}$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$RQ_i\,(M|R(\mathcal{H})(Rx_i)) = RQ_iMRx_i = MRQ_ix_i = MRx_i = M|R(\mathcal{H})(Rx_i) \Rightarrow RQ_i(\mathcal{H}) \supseteq \overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$.

Επομένως από το πόρισμα 3.3, υπάρχει unitary τελεστής

$$U_i : L^2(\sigma(A_R), \mu_{Rx_i}) \to RQ_i(\mathcal{H}), \text{ ώστε } : U_iM_fU_i^* = f(A_R)|_{RQ_i(\mathcal{H})}, \forall f \in L^\infty(\sigma(A_R), \mu_{Rx_i}).$$

Εξ'αλλου επειδή τα μέτρα μ_{x_i} είναι ισοδύναμα υπάρχει για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, η παράγωγος Radon - Nikodym $f_i = \frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_i}} \in L^1(\sigma(A_R), \mu_{x_i})$.
Συνεπώς ο τελεστής $W_i : L^2(\sigma(A_R), \mu_{x_1}) \to L^2(\sigma(A_R), \mu_{x_i}) : g \mapsto \sqrt{f_i}g$ είναι unitary.
Θεωρούμε τον τελεστή $W = \left(\sum_{i=1}^{n_0} \oplus U_i W_i\right) \circ (U_1^*)^{(n_0)} : RQ_1(\mathcal{H})^{n_0} \to R(\mathcal{H})$, και παρατηρούμε ότι:

$$W\left(f(A_R)|_{RQ_1(\mathcal{H})}\right)^{(n_0)} W^* = \left(\sum_{i=1}^{n_0} \oplus U_i W_i\right)(U_1^*)^{(n_0)} \left(f(A_R)|_{RQ_1(\mathcal{H})}\right)^{(n_0)} (U_1)^{(n_0)} \left(\sum_{i=1}^{n_0} \oplus W_i^* U_i^*\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_0} \oplus U_i W_i\right)\left(U_1^*(f(A_R)|_{RQ_1(\mathcal{H})} U_1\right)^{(n_0)} \left(\sum_{i=1}^{n_0} \oplus W_i^* U_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n_0} \oplus \left(U_i W_i M_f W_i^* U_i^*\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} \oplus f(A_R)|_{RQ_i(\mathcal{H})} = f(A_R), \forall f \in L^\infty(\sigma(A_R), \mu)$$

Επομένως, η $\mathcal{M}_R$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n_0.

Στην περίπτωση (ii), όπου $\overline{Q_n} = I, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα x_n είναι διαχωρίζον της $\mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$. Από την πρόταση 3.2, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε προβολή $P \in \mathcal{M}$, όπου $Px_n = 0$, έπεται ότι $P = 0$.
Έστω λοιπόν $P \in \mathcal{M}$ ώστε $Px_n = 0$. Έχουμε :

$$PQ_n = 0 \Rightarrow I - P \geq Q_n \Rightarrow I - P \geq \overline{Q_n} = I \Rightarrow P = 0.$$

Εξάλλου, εξ' ορισμού των Q_n, γνωρίζουμε ότι $Q_i Q_j = 0$, αν $i \neq j$. Από το λήμμα του Zorn μπορούμε να επεκτείνουμε την οικογένεια $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, σε μία μεγιστική οικογένεια $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαχωρίζοντων διανυσμάτων της $\mathcal{M}$, ώστε για την οικογένεια $\{Q_n' : Q_n' = proj(\overline{\mathcal{M}y_n})\}$, να ισχύει ότι $Q_n' \perp Q_m'$, όταν $n \neq m$.
Θέτουμε $Q = \left(\sum_n Q_n'\right)^\perp$, άρα $Q \in \mathcal{M}'$, και $\overline{Q} = \wedge\{P : P$ προβολή στην $\mathcal{M}$, με $P \geq Q\}$.
Ισχυρισμός : $\overline{Q} \neq I$.
Έστω ότι $\overline{Q} = I$. Η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}|_{Q_n}$ έχει διαχωρίζον διάνυσμα $y \in Q(\mathcal{H})$. Όμως τότε το y είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$, γιατί όπως πριν, αν $P \in \mathcal{M}$ ώστε $Py = 0$, τότε έχουμε :

$$Py = 0 \Rightarrow PQ = 0 \Rightarrow I - P \geq Q \Rightarrow I - P \geq \overline{Q} = I \Rightarrow P = 0.$$

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι $QMy = MQy = My, \ \forall M \in \mathcal{M}$.
Έχουμε λοιπόν ότι $\overline{\mathcal{M}y} \leq Q(\mathcal{H})$ και συνεπώς $proj(\overline{\mathcal{M}y}) \perp Q_n', \ \forall n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς αντίκειται στην επιλογή της μεγιστικής οικογένειας $\{Q_n' : n \in \mathbb{N}\}$.

Θέτουμε $R = I - Q$, και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία όπως στην περίπτωση (i), ορίζουμε στον τελεστή
$W = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus U_i\right) \circ (U_1^*)^{(\infty)} : RQ_1(\mathcal{H}) \otimes \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}$, ώστε $W\left(f(A_R)|_{R_1(\mathcal{H})}\right)^{(\infty)} W^* = f(A_R)$, $\forall f \in L^\infty(\sigma(A_R), \mu)$ □

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα Ομοιόμορφης Πολλαπλότητας). *Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann, η οποία δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, και $\{E_t\}_t$ φασματική ανάλυση της μονάδας με φορέα F, ώστε $\{E_t : t \in \mathbb{R}\}'' = \mathcal{M}$.*

(α) *Υπάρχουν κάθετες ανά δύο προβολές $P_n \in \mathcal{M}$, $1 \leq n \leq +\infty$, μοναδικά ορισμένες, ώστε κάθε P_n να είναι πολλαπλότητας n και $\sum_{1 \leq n < +\infty} P_n + P_\infty = I$*

(β) *Υπάρχουν κάθετα ανά δύο μέτρα Borel μ_n στο F, όπου $1 \leq n \leq +\infty$, ώστε η $\mathcal{M}$ να είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\mathcal{M}_{\mu_\infty})^\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\mathcal{M}_{\mu_n})^n$, η οποία δρά στο χώρο $(L^2(F, \mu_\infty) \otimes \ell^2) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (L^2(F, \mu_n))^{(n)}$.*

Απόδειξη. **(α)** Για κάθε n, η προβολή $P_n \equiv \vee\{P_a : P_a$ έχει πολλαπλότητα $n\}$, είναι η μέγιστη προβολή πολλαπλότητας n. Αν $n \neq m$, η προβολή $P_n P_m$ είναι μικρότερη των P_n και P_m, επομένως έχει πολλαπλότητα και n και m, οπότε $P_n P_m = 0$, αφού από το λήμμα 4.3, η πολλαπλότητα μιας μη μηδενικής προβολής είναι μοναδική. Ισχυριζόμαστε ότι $\sum_{1 \leq n < +\infty} P_n + P_\infty = I$. Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός μας και $Q = I - \left(\sum_{1 \leq n < +\infty} P_n + P_\infty\right) \neq 0$. Από το προηγούμενο λήμμα η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}|_{Q(\mathcal{H})}$ έχει μη μηδενική προβολή R πολλαπλότητας m, για κάποιο $m \in \{\infty, 1, 2, ...\}$. Άρα $R \leq P_m$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς οι υπόχωροι $R(\mathcal{H}), P_m(\mathcal{H})$ είναι κάθετοι.

Έστω τώρα $Q_n \in \mathcal{M}$ προβολές πολλαπλότητας n, όπου $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$, κάθετες ανά δύο, ώστε $\sum_{1 \leq n \leq +\infty} Q_n = I$. Παρατηρούμε από τον ορισμό των P_n, ότι για κάθε n έχουμε ότι $Q_n \leq P_n$. Επομένως, $I = \sum_{1 \leq n < +\infty} Q_n + Q_\infty \leq \sum_{1 \leq n < +\infty} P_n + P_\infty = I$, έχουμε παντού ισότητα. Συνεπώς, για κάθε m έχουμε

$$P_m\left(\sum_{1\leq n<+\infty} Q_n + Q_\infty\right) = P_m\left(\sum_{1\leq n<+\infty} P_n + P_\infty\right) \Rightarrow P_m Q_m = P_m \Rightarrow P_m \leq Q_m.$$

Άρα $P_m = Q_m$ για κάθε $m \in \{\infty, 1, 2, ...\}$, οπότε οι P_n είναι μοναδικά ορισμένες.

(β) Αφού $P_n \in \mathcal{M}$, υπάρχουν $\Omega_n \in \mathbb{B}(F)$, ώστε $P_n = E(\Omega_n)$. Μάλιστα καθώς οι P_n είναι κάθετες ανά δύο και $\sum_{1\leq n<+\infty} P_n + P_\infty = I$, έπεται ότι τα Ω_n είναι $\sigma.\pi.$-ξένα ανά δύο και $\bigcup_{1\leq n<+\infty} \Omega_n \cup \Omega_\infty = F$.

Από την πρόταση 4.1, για κάθε $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$, η $\mathcal{M}|_{P_n(\mathcal{H})}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $\left(\mathcal{M}_\mu|_{\Omega_n}\right)^{(n)}$, όπου μ ισοδύναμο του φασματικού μέτρου που επάγει η $\{E_t\}_t$. Συνεπώς, η $\mathcal{M}$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $\left(\mathcal{M}_\mu|_{\Omega_\infty}\right)^{(\infty)} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \left(\mathcal{M}_\mu|_{\Omega_n}\right)^{(n)}$.

Ορίζοντας για κάθε $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$, το μέτρο $\mu_n : \mathbb{B}(F) \to \mathbb{C} : \Omega \mapsto \mu|_{\Omega_n}(\Omega \cap \Omega_n)$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Κεφάλαιο 5

Οι σχέσεις του Weyl

5.1 Το Θεώρημα του Stone

Ορισμός 5.1. *Μία SOT-συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα unitary τελεστών, είναι μια απεικόνιση* $V : \mathbb{R} \to \mathbf{B}(\mathcal{H}) : t \mapsto V_t$ *, έτσι ώστε:*

(*i*) $V_{t-s} = V_t V_s^{-1}$

(*ii*) *Για κάθε* $t \in \mathbb{R}$*, ο τελεστής* V_t *είναι unitary.*

(*iii*) $SOT\text{-}\lim_{t \to t_0} V_t = V_{t_0}, \ \forall t_0 \in \mathbb{R}$

Θεώρημα 5.1. *Έστω* $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$*, μία φασματική ανάλυση της μονάδας σε ένα χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$*. Ορίζουμε την οικογένεια τελεστών* $V_t = \Phi(u_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE_\lambda$*, όπου* $u_t(\lambda) = e^{it\lambda}$*. Η* $\{V_t\}_t$ *είναι SOT-συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα unitary τελεστών.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{V_t : t \in \mathbb{R}\}$ πληροί τις τρεις ιδιότητες του ορισμού 5.1.

(*i*) Από τη σχέση $u_{t-s} = u_t u_s^{-1}, \forall s, t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $V_{t-s} = V_t V_s^{-1}$, καθώς η απεικόνιση Φ είναι μορφισμός αλγεβρών.

(*ii*) Η Φ είναι συστολή, οπότε $\|V_t\| \leq \|u_t\| = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$, δηλαδή και η V_t είναι συστολή. Άρα, $\forall x \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\|x\| = \|V_{-t} V_t x\| \leq \|V_t x\| \leq \|x\|$, επομένως έχουμε παντού ισότητα. Έπεται ότι ο τελεστής V_t είναι unitary, ως ισομετρία και αντιστρέψιμος.

(*iii*) Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, ισχύει ότι:
$\|V_t x - x\|_2^2 = \langle \Phi^*(u_t - 1)\Phi(u_t - 1)x, x\rangle = \int |u_t(\lambda) - 1|^2 d\mu_x(\lambda)$.
Παρατηρούμε ότι $\lim_{t\to 0} |u_t(\lambda) - 1| \to 0$ και επίσης $|u_t(\lambda) - 1| \leq 2$, όπου η σταθερή συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto 2$ ανήκει στο χώρο $L^1(\mathbb{R}, \mu_x)$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ισχύει ότι : $\|V_t x - x\|_2^2 \to 0$, καθώς $t \to 0$.
Μάλιστα, επειδή η V_t είναι ισομετρία, έπεται ότι:
$\|V_t x - V_s x\| = \|V_s(V_{t-s}x - x)\| = \|V_{t-s}x - x\| \to 0$, καθώς $t \to s$.
Άρα η $\{V_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι SOT-συνεχής.

□

Θεώρημα 5.2 (Stone). *Για κάθε SOT-συνεχή μονοπαραμετρική ομάδα unitary τελεστών $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, υπάρχει φασματική ανάλυση της μονάδας $\{F_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ στον $\mathcal{H}$, ώστε $V_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dF_\lambda$.*

Απόδειξη. Ο χώρος Banach $L^1(\mathbb{R}, +, \cdot, *)$, εφοδιασμένος με την πράξη της συνέλιξης ως πολλαπλασιασμό δακτυλίου και με την ισομετρική ενέλιξη $f \to f^*$, όπου $f^*(t) = \overline{f(-t)}$, αποκτά δομή $*$-άλγεβρας. Ορίζουμε την ακόλουθη sesquilinear μορφή. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$, ορίζουμε : $\phi(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \eta\rangle f(t)dt$. Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
|\phi(\xi,\eta)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \eta\rangle f(t)dt\Big| \leq \int_{\mathbb{R}} |\langle V_t\xi, \eta\rangle f(t)|dt \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|V_t\xi\| \cdot \|\eta\| \cdot |f(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} \|\xi\| \cdot \|\eta\| \cdot |f(t)|dt = \|\xi\| \cdot \|\eta\| \cdot \|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η ϕ είναι φραγμένη sesquilinear μορφή, οπότε υπάρχει $\tau(f) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, ώστε $\langle \tau(f)\xi, \eta\rangle = \phi(\xi, \eta)$ και μάλιστα $\|\tau(f)\| \leq \|f\|_1$.
Ισχυρισμός : Η απεικόνιση τ είναι $*$-αναπαράσταση στο χώρο $\mathcal{H}$.

- Ο τελεστής τ είναι πολλαπλασιαστικός καθώς αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, έχουμε :

$$
\begin{aligned}
\langle \tau(f * g)\xi, \eta\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \eta\rangle \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds\right)dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \eta\rangle f(t-s)g(s)ds\right)dt = \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \eta\rangle f(t-s)dt\right)g(s)ds \overset{t'=t-s}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \langle V_{t'+s}\xi, \eta\rangle f(t')dt'\right)g(s)ds =
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle V_{t'}(V_s\xi), \eta \rangle f(t')dt' \right) g(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \langle \tau(f)(V_s\xi), \eta \rangle g(s)ds =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \langle (V_s\xi), \tau(f)^*\eta \rangle g(s)ds = \langle \tau(g)\xi, \tau(f)^*\eta \rangle = \langle \tau(f)\tau(g)\xi, \eta \rangle$$

- Η τ είναι $*$-ομομορφισμός. Πράγματι, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ παρατηρούμε ότι:

$$\langle \tau(f)^*\xi, \eta \rangle = \overline{\langle \tau(f)\eta, \xi \rangle} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\langle V_t\eta, \xi \rangle f(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \langle V_{-t}\xi, \eta \rangle \overline{f(t)} dt \overset{t'=-t}{=}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \langle V_{t'}\xi, \eta \rangle \overline{f(-t')} dt' = \langle \tau(f^*)\xi, \eta \rangle$$

Ισχυρισμός : Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\|\tau(f)\| \leq \|\hat{f}\|_\infty$.
Για την απόδειξη το ισχυρισμού μας θα χρειαστούμε στοιχεία ανάλυσης Fourier και θεωρίας Gel'fand. Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ είναι 1-1, συστολή, $*$-μορφισμός (όπου $g^*(t) = \overline{g(t)}, \forall g \in C_0(\mathbb{R})$) ([7]). Μάλιστα, από το θεώρημα Stone-Weierstrass ([16]), η εικόνα $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ είναι πυκνή υπάλγεβρα της $C_0(\mathbb{R})$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ διαχωρίζει τα σημεία του $\mathbb{R}$, καθώς και ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$, ώστε $\hat{f}(t) \neq 0$. Πράγματι, εάν $t \neq s$, τότε για τη συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R})$, όπου $f(x) = e^{-|x|}e^{itx}$, παρατηρούμε ότι :
$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|+i(t-s)x}dx = \int_{-\infty}^0 e^{x+i(t-s)x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x+i(t-s)x}dx = \frac{1}{i(t-s)+1} + \frac{1}{i(t-s)-1} = \frac{2}{(t-s)^2+1}$
ενώ όμοια έχουμε : $\hat{f}(t) = 2 \neq 0$.

Από το θεώρημα Beurling - Gel'fand[1] για τη φασματική ακτίνα μίας συνάρτησης f στον $L^1(\mathbb{R})$ ([4]), έχουμε ότι:

$$\lim_n \|f * f * \cdots * f\|_1^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}^{1/n} = sup\{|\phi(f)| \ : \ \phi \in \mathfrak{M}(L^1(\mathbb{R}))\},$$

όπου $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{R}))$ το σύνολο των χαρακτήρων στον $L^1(\mathbb{R})$. Όμως, κάθε χαρακτήρας στον $L^1(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $\phi_s \ : \ \phi_s(f) = \hat{f}(s)$ ([5]). Έπεται λοιπόν ότι :

$$\lim_n \|f * f * \cdots * f\|_1^{1/n} = \sup\{|\hat{f}(s)| \ : \ s \in \mathbb{R}\} = \|\hat{f}\|_\infty$$

Αν τώρα $f \in L^1(\mathbb{R})$, ώστε $f = f^*$, τότε ο τελεστής $\tau(f)$ είναι αυτοσυζυγής, καθώς $\langle \tau(f)^*\xi, \eta \rangle = \langle \tau(f^*)\xi, \eta \rangle = \langle \tau(f)\xi, \eta \rangle$, οπότε από το θεώρημα φασματικής απει-

[1] Έστω $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα Banach. Τότε $\lim_n \|x^n\|_1^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$, για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

κόνισης έχουμε :

$$\|\tau(f)\|^n = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\tau(f))\}^n = \sup\{|\lambda^n| : \lambda \in \sigma(\tau(f))\} = \|\tau(f)^n\| = \|\tau(f^n)\| \leq$$
$$\leq \|f * f * \cdots * f\|_1 \Rightarrow \|\tau(f)\| \leq \lim_n \|f * f * \cdots * f\|_1^{1/n} = \|\hat{f}\|_\infty.$$

Στην γενική περίπτωση παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ υπάρχουν $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ αυτοσυζυγείς συναρτήσεις, ώστε $f = f_1 + if_2$. Επομένως έχουμε ότι

$$\|\tau(f)\| \leq \|\tau(f_1)\| + \|\tau(f_2)\| \leq \|\hat{f}_1\|_\infty + \|\hat{f}_2\|_\infty \leq 2\|\hat{f}\|_\infty,$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Ορίζουμε $\pi_0(\hat{f}) = \tau(f), \forall f \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$.

Αφού για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$, υπάρχουν $f_i = f_i^*, i = 1, 2$, ώστε $f = f_1 + if_2$, έχουμε ότι :

$$\|\pi_0(\hat{f}))\| \leq \|\tau(f_1)\| + \|\tau(f_2)\| \leq \|\hat{f}_1\|_\infty + \|\hat{f}_2\|_\infty \leq 2\|\hat{f}\|_\infty,$$

οπότε ο τελεστής π_0 είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, μάλιστα $*$-ομομορφισμός, στο χώρο $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, ο οποίος είναι πυκνός στον $C_0(\mathbb{R})$, οπότε υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\pi : C_0(\mathbb{R}) \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$.

Από την πρόταση 2.3, υπάρχει μοναδική φασματική ανάλυση της μονάδας $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, ώστε δοθέντος ενός $\xi \in \mathcal{H}$, να ισχύει :

$$\langle \pi(f)\xi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_\xi, \ \forall f \in C_0(\mathbb{R})$$

όπου $\mu_\xi((-\infty, \lambda]) = \langle E_\lambda \xi, \xi \rangle$.

Αρκεί να δείξουμε ότι : $\langle V_t\xi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d\mu_\xi(\lambda)$. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi, \xi \rangle f(t) dt = \langle \tau(f)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(\hat{f})\xi, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} d\mu_\xi \tag{5.1}$$

Για $t_0 \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_n(t) = \frac{n}{2} e^{-n|t-t_0|}$ και εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier των f_n:

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) e^{-it\xi} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{2} e^{-n|t-t_0|} e^{-it\xi} dt \overset{t-t_0=x}{=}$$
$$= \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-n|x|} e^{-i(x+t_0)\xi} dx = \frac{n}{2} e^{-it_0\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-n|x|} e^{-ix\xi} dx =$$
$$= \frac{n}{2} e^{-it_0\xi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(n-i\xi)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(n+i\xi)x} dx \right) = \frac{n}{2} e^{-it_0\xi} \left(\frac{1}{n-i\xi} + \frac{1}{n+i\xi} \right) =$$
$$= \frac{n}{2} e^{-it_0\xi} \left(\frac{n+i\xi+n-i\xi}{n^2+\xi^2} \right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{2ne^{-it_0\xi}}{n^2\left(1+(\frac{\xi}{n})^2\right)} = \frac{e^{-it_0\xi}}{1+(\frac{\xi}{n})^2}$$

$$\textbf{Ισχυρισμός}: \int_{\mathbb{R}} \langle V_t\xi,\xi\rangle f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \langle V_{t+t_0}\xi,\xi\rangle f_n(t+t_0)dt \to \langle V_{t_0}\xi,\xi\rangle, \text{καθώς } n\to+\infty \tag{5.2}$$

Θέτουμε $g(t)=\langle V_{t+t_0}\xi,\xi\rangle$, και παρατηρούμε ότι $|g(t)|\le\|\xi\|^2$.
Εφόσον g συνεχής, γνωρίζουμε ότι δοθέντος $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$, ώστε $|g(t)-g(0)|<\varepsilon$, όταν $|t|<\delta$. Εξάλλου, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, ώστε $\int_{|t|\ge\delta} f_n(t+t_0)dt<\varepsilon,\ \forall n\ge n_0$. Πράγματι

$$\int_{|t|\ge\delta} f_n(t+t_0)dt = \lim_{M\to+\infty} 2\int_\delta^M \frac{n}{2}e^{-n|t|}dt = \lim_{M\to+\infty} n\int_\delta^M e^{-n|t|}dt =$$
$$\lim_{M\to+\infty} n\frac{e^{-nt}}{-n}\Big|_\delta^M = \lim_{M\to+\infty}\left(e^{-n\delta}-e^{-nM}\right) = e^{-n\delta}<\varepsilon$$

για αρκετά μεγάλο n. Έπεται λοιπόν ότι:

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} g(t)f_n(t+t_0)dt-g(0)\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}} g(t)f_n(t+t_0)dt-\int_{\mathbb{R}} g(0)f_n(t+t_0)dt\Big| =$$
$$=\Big|\int_{\mathbb{R}}(g(t)-g(0))f_n(t+t_0)dt\Big| \le \int_{|t|\ge\delta}|g(t)-g(0)|f_n(t+t_0)dt+\int_{|t|<\delta}|g(t)-g(0)|f_n(t+t_0)dt\le$$
$$\le 2\|\xi\|^2\int_{|t|\ge\delta} f_n(t+t_0)dt+\varepsilon\int_{|t|<\delta} f_n(t+t_0)dt\le\left(2\|\xi\|^2+1\right)\varepsilon,$$

για αρκετά μικρό δ, κι ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.
Εξάλλου $\hat{f}_n(s)=\frac{e^{-it_0s}}{1+(\frac{s}{n})^2}\to e^{-it_0s}$, καθώς $n\to+\infty, \forall s\in\mathbb{R}$, ενώ $|\hat{f}_n(s)-e^{-it_0s}|\le 2$.
Άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται ότι:

$$\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}_n(s)-e^{-it_0s}|d\mu_\xi(s)\to 0 \tag{5.3}$$

Επομένως από τις σχέσεις (5.1),(5.2) και (5.3) έχουμε

$$\langle V_{t_0}\xi,\xi\rangle=\lim_n\int_{\mathbb{R}}\langle V_t\xi,\xi\rangle f_n(t)dt=\lim_n\int_{\mathbb{R}}\hat{f}_n d\mu_\xi=\int_{\mathbb{R}}e^{-it_0\lambda}d\mu_\xi(\lambda)=\langle\int_{\mathbb{R}}e^{-it_0\lambda}dE_s\xi,\xi\rangle \tag{5.4}$$

Συνεπώς, έχουμε $V_{t_0}=\int_{\mathbb{R}}e^{-it_0\lambda}dE_\lambda$. Θεωρώντας την φασματική ανάλυση της μονάδας $\{F_\lambda : F_\lambda=I-E_{-\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, έπεται ότι $V_{t_0}=\int_{\mathbb{R}}e^{it_0\lambda}dF_\lambda$, δηλαδή το ζητούμενο. □

5.2 Το θεώρημα μοναδικότητας Stone-Von Neumann

Ορίζουμε τις ακόλουθες μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών :

$$S_\lambda : L^2(\mathbb{R}, m) \to L^2(\mathbb{R}, m) : f \mapsto u_\lambda f, \text{ όπου } u_\lambda(x) = e^{i\lambda x} \tag{5.5}$$

$$T_t : L^2(\mathbb{R}, m) \to L^2(\mathbb{R}, m) : f \mapsto T_t f, \text{ όπου } (T_t f)(x) = f(x-t) \tag{5.6}$$

Παρατηρούμε ότι οι ομάδες αυτές είναι SOT-συνεχείς. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και συνάρτηση $g \in C_C(\mathbb{R})$, η οποία φέρεται στο σύνολο $[-M, M]$, για κάποιο $M > 0$.
Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, οπότε υπάρχει $1 > \delta > 0$ ώστε $|g(x) - g(y)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4(M+1)}}$, όταν $|x - y| < \delta$. Επομένως για κάθε $t \in (t_0 - \delta, t + \delta)$ έχουμε ότι :

$$\|T_t g - T_{t_0} g\|_2^2 = \int_R |T_t g - T_{t_0} g|^2 dm = \int_{-M}^{M} |g(x-t) - g(x-t_0)|^2 dx <$$
$$< \int_{-M-1}^{M+1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{4(M+1)}} \right)^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω τώρα συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R}, m)$. Τότε υπάρχει $g \in C_C(\mathbb{R})$, ώστε $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Έπεται λοιπόν ότι :

$$\|T_t f - T_{t_0} f\|_2 \leq \|T_t f - T_{t_0} g\|_2 + \|T_t g - T_{t_0} g\|_2 + \|T_{t_0} g - T_{t_0} g\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Όμοια, προκύπτει ότι και η ομάδα $\{S_\lambda\}_\lambda$ είναι SOT-συνεχής.
Μάλιστα, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}, m)$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$(S_\lambda T_t f)(x) = u_\lambda(x)(T_t f)(x) = u_\lambda(x) f(x-t), \text{ ενώ}$$
$$(T_t S_\lambda f)(x) = [T_t(u_\lambda f)](x) = (u_\lambda f)(x-t) = u_\lambda(x-t) f(x-t) = e^{i\lambda(x-t)} f(x-t) =$$
$$= e^{-i\lambda t} u_\lambda(x) f(x-t)$$

δηλαδή $S_\lambda T_t = e^{i\lambda t} T_t S_\lambda$.

Ορισμός 5.2. *Έστω δύο μονοπαραμετρικές SOT-συνεχείς ομάδες unitary τελεστών $\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{V_t : t \in \mathbb{R}\}$ οι οποίες δρουν σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Θα λέμε ότι οι ομάδες αυτές πληρούν τις* ***σχέσεις αντιμετάθεσης του Weyl****, εάν ισχύει ότι:*

$$U_\lambda V_t = e^{it\lambda} V_t U_\lambda, \forall \lambda, t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Παρατήρηση 5.1. *Δείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι οι ομάδες unitary τελεστών* $\{S_\lambda\}$, $\{T_t\}$ *πληρούν την σχέση* (5.7). *Μάλιστα, αν* $R : L^2(\mathbb{R}, m) \to \mathcal{H}$ *unitary τελεστής, τότε και οι ομάδες τελεστών* $\{U_\lambda\}$, $\{V_t\}$, *όπου* $U_\lambda = RS_\lambda R^{-1}$ *και* $V_t = RT_tR^{-1}$ *πληρούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης του Weyl. Πράγματι έχουμε ότι:*

$$U_\lambda V_t = RS_\lambda R^{-1}RT_tR^{-1} = RS_\lambda T_tR^{-1} = Re^{it\lambda}T_tS_\lambda R^{-1} = e^{it\lambda}RT_tS_\lambda R^{-1} =$$
$$= e^{it\lambda}RT_tR^{-1}RS_\lambda R^{-1} = e^{it\lambda}V_tU_\lambda.$$

Ορισμός 5.3. *Θα λέμε για κάθε* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *και* $E \subseteq \mathbb{R}$, *ότι η* f ***φέρεται*** *στο* E, *αν* $f(t) = 0$, *σχεδόν για κάθε* $t \notin E$.

Λήμμα 5.1. *Για κάθε Borel υποσύνολο* A *του* $\mathbb{R}$, *το οποίο παραμένει αναλλοίωτο από τις μεταφορές κατά* t, $\forall t \in \mathbb{R}$, *δηλαδή* $m[(A + t) \vartriangle A] = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι είτε* $m(A) = 0$ *είτε* $m(A^{\mathrm{C}}) = 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τον υπόχωρο $\mathfrak{M}_A = \{f \in L^2(\mathbb{R}, m) : f$ φέρεται στο $A\}$. Θα δείξουμε ότι είτε ο $\mathfrak{M}_A$ είτε ο $\mathfrak{M}_A^\perp$ είναι ο τετριμμένος υπόχωρος.
Παρατηρούμε ότι εάν $f \in \mathfrak{M}_A$, τότε από την υπόθεση, η συνάρτηση T_tf φέρεται επίσης στο A, δηλαδή για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει υποσύνολο Borel $\mathcal{N}_t$ στο $\mathbb{R}$, ώστε $m(\mathcal{N}_t) = 0$, ώστε για κάθε $x \in A \cap \mathcal{N}_t^{\mathrm{C}}$, έχουμε ότι $(x - t) \in A$.
Έστω τώρα $\phi \in \mathfrak{M}_A$ και $\psi \in \mathfrak{M}_A^\perp$. Τότε για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R}, m) \cap L^\infty(\mathbb{R}, m)$ έχουμε ότι $M_g\psi \in \mathfrak{M}_A^\perp$ και $M_f\phi \in \mathfrak{M}_A$, οπότε $T_tM_f\phi \in \mathfrak{M}_A$.
Συνεπώς $\langle T_tM_f\phi, M_g\psi\rangle = 0$. Γράφοντας $\phi_1 = f\phi$ και $\psi_1 = \overline{g\psi}$, έχουμε ότι :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x - t)\psi_1(x)dx = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x - t)\psi_1(x)dx\right) dt = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(t, x) \mapsto \phi_1(t - x)\psi_1(x)$ είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^2, m^2)$, καθώς είναι το γινόμενο δύο L^2-συναρτήσεων, επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Fubini([15]). Συνεπώς :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x - t)\psi_1(x)dx\right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x - t)\psi_1(x)dt\right) dx =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(x - t)dt\right) \psi_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(y)dy\right) \psi_1(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(y)dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \psi_1(x)dx\right)$$

Εάν υποθέσουμε ότι $\phi \neq 0$ μπορούμε να διαλέξουμε κάποια $f \in L^2(\mathbb{R}, m) \cap L^\infty(\mathbb{R}, m)$, ώστε $\left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(y)dy\right) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(y)dy\right) \neq 0$.

Συνεπώς $\left(\int_{\mathbb{R}} \psi_1(x)dx\right) = \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)\psi(x)}dx\right) = 0,\ \forall g \in L^2(\mathbb{R}, m) \cap L^\infty(\mathbb{R}, m)$.
Επομένως $\psi = 0$, για την τυχούσα συνάρτηση $\psi \in \mathfrak{M}_A^\perp$, οπότε $\mathfrak{M}_A^\perp = \{0\}$. □

Λήμμα 5.2. *Ονομάζουμε Volterra Nest την φασματική ανάλυση της μονάδας $\{Q_t \overset{o\rho}{=} M_{\chi_{(-\infty,t]}} :\ t \in \mathbb{R}\}$ στον $L^2(\mathbb{R}, m)$. Τότε ισχύει ότι $S_\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t$*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα των τελεστών αυτών στον πυκνό υπόχωρο $C_C(\mathbb{R})$ του $L^2(\mathbb{R}, m)$. Έστω συνάρτηση $g \in C_C(\mathbb{R})$, η οποία φέρεται στο $[a, b]$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\{t_k\}$ του $[a, b]$, ώστε:
$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t g - \sum\limits_k e^{i\lambda t_k}(Q_{t_k+1} - Q_{t_k})g\right\|_2 < \varepsilon \Leftrightarrow \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t g - \sum\limits_k e^{i\lambda t_k} \chi_{(t_k,t_k+1]} g\right\|_2 < \varepsilon$
Εξάλλου για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $(S_\lambda g)(\xi) = e^{i\lambda\xi} g(\xi) = \sum\limits_k \chi_{(t_k,t_k+1]} e^{i\lambda\xi} g(\xi)$.
Συνεπώς, παρατηρούμε ότι:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t g - S_\lambda g\right\|_2 \le \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t g - \sum_k \chi_{(t_k,t_k+1]} e^{i\lambda t_k} g\right\|_2 + \left\| \sum_k \chi_{(t_k,t_k+1]} e^{i\lambda t_k} g - S_\lambda g\right\|_2 <$$

$$< \varepsilon/2 + \left(\int_a^b \left| \sum_k \chi_{(t_k,t_k+1]}(\xi) e^{i\lambda t_k} g(\xi) - \sum_k \chi_{(t_k,t_k+1]} e^{i\lambda\xi} g(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \le$$

$$\le \varepsilon/2 + \left(\sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| e^{i\lambda t_k} - e^{i\lambda\xi} \right|^2 |g(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \le \varepsilon/2 + \|g\|_\infty \left(\sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| e^{i\lambda t_k} - e^{i\lambda\xi} \right|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση $\{t_k\}$, ώστε $\left|e^{i\lambda t_k} - e^{i\lambda\xi}\right| < \frac{\varepsilon^2}{(b-a)^2\|g\|_\infty},\ \forall \xi, k$.
Εφόσον η συνάρτηση $u_\lambda : [a, b] \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{i\lambda x}$ είναι συνεχής σε συμπαγές διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x, \xi \in [a, b]$, όπου $|x - \xi| < \delta$, να ισχύει $|u_\lambda(x) - u_\lambda(\xi)| < \frac{\varepsilon^2}{(b-a)^2\|g\|_\infty}$. Επομένως διαλέγοντας διαμέριση ώστε $|t_{k+1} - t_k| < \delta$, για κάθε k, έχουμε ότι $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t g - S_\lambda g\right\|_2 \le \varepsilon$, για το τυχόν $\varepsilon > 0$, οπότε πράγματι $S_\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dQ_t$. □

Πρόταση 5.1. *Αν $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δύο SOT-συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών, οι οποίες δρουν σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και πληρούν τις σχέσεις του Weyl, τότε η ομάδα $\{U_\lambda\}_\lambda$ ειναι unitarily ισοδύναμη με την ομάδα $\{S_\lambda^{(n)}\}_\lambda$, για κάποιο $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$.*

Απόδειξη. Κάθε SOT-συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ unitary τελεστών σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ προκύπτει από το θεώρημα του Stone ως $U_\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda} dE_x$, όπου

$\{E_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ φασματική ανάλυση της μονάδας στο χώρο $\mathcal{H}$.
Παρατηρούμε ότι:

$$e^{-it\lambda}U_\lambda V_t = e^{-it\lambda}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda}dE_x V_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(x-t)}dE_x V_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi}dE_{\xi+t}V_t$$

ενώ

$$V_t U_\lambda = V_t \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi}dE_\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi}d(V_t E_\xi V_t^*)V_t$$

καθώς η οικογένεια $\{V_t E_\xi V_t^*\}_{\xi\in\mathbb{R}}$, είναι φασματική ανάλυση της μονάδας στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Επομένως, εφόσον $\{U_\lambda\}$, $\{V_t\}$ πληρούν τις σχέσεις του αντιμετάθεσης του Weyl, πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi}dE_{\xi+t} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\xi}d(V_t E_\xi V_t^*), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $\eta \in \mathcal{H}$, για τα μέτρα τα οποία επάγονται από τις σχέσεις

$$\mu_\eta((-\infty,\xi]) = \langle E_{\xi+t}\eta,\eta\rangle \text{ και } \nu_\eta((-\infty,\xi]) = \langle V_t E_\xi V_t^*\eta,\eta\rangle,\ \ \forall \xi \in \mathbb{R},$$

ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda\xi}d\mu_\eta(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda\xi}d\nu_\eta(\xi),\ \text{ δηλαδή } \hat{\mu}_\eta(\lambda) = \hat{\nu}_\eta(\lambda),\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier ενός μέτρου ([7]), έχουμε ότι $\mu_\eta = \nu_\eta$ ή ισοδύναμα $\langle E_{\xi+t}\eta,\eta\rangle = \langle V_t E_\xi V_t^*\eta,\eta\rangle$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathcal{H}$, οπότε $E_{\xi+t} = V_t E_\xi V_t^*$.
Θεωρούμε την παραγόμενη άλγεβρα von Neumann $\mathcal{A} = \{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}'' = \{E_\xi : \xi \in \mathbb{R}\}''$, η οποία είναι προφανώς αβελιανή. Έστω $x \in \mathcal{H}$ διαχωρίζουν διάνυσμα της $\mathcal{A}$, οπότε το μέτρο μ_x είναι ισοδύναμο του φασματικού μέτρου. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\mu_x(B) = 0 \Leftrightarrow E(B) = 0 \Leftrightarrow V_t^* E(B) V_t = 0 \Leftrightarrow E(B+s) = 0 \Leftrightarrow \mu_x(B+s) = 0.$$

Επομένως, ο φορέας της $\{E_t\}_t$ είναι το $\mathbb{R}$, καθώς αν υπάρχει ανοικτό διάστημα (a,b) το οποίο δεν ανήκει στον φορέα, τότε έχουμε ότι :

$$\mu_x((a,b)) = 0 \Rightarrow \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu_x((a,b)+q) = 0 \Rightarrow \mu_x(\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow E(\mathbb{R}) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Μάλιστα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini, προκύπτει πως το μέτρο μ_x είναι ισοδύναμο του μέτρου Lebesgue [2] m.

Από το θεώρημα πολλαπλότητας 4.1, υπάρχουν κάθετες ανά δύο προβολές $E(\Omega_n) \in \mathcal{A}$ όπου $\Omega_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, $n \in \{\infty, 1, 2, \dots\}$, ώστε η άλγεβρα von Neumann $\mathcal{A}|_{E(\Omega_n)}$ να είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n. Μάλιστα, για κάθε $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η προβολή $V_t^* E_(\Omega_n) V_t$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n, οπότε έπεται ότι $V_t^* E(\Omega_n) V_t \leq E(\Omega_n)$, καθώς $E(\Omega_n) = \sup\{P_n \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) : P_n$ προβολή πολλαπλότητας $n\}$. Όμοια όμως παρατηρούμε ότι $V_{-t}^* E(\Omega_n) V_{-t} \leq E(\Omega_n)$, οπότε ισχύει η ισότητα στην προηγούμενη σχέση. Επομένως, έχουμε $E(\Omega_n) = E(\Omega_n + t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Αφού $E(\cdot)$ ισοδύναμο του μέτρου Lebesgue, έπεται λοιπόν από το λήμμα 5.1 ότι $m(\Omega_n) = 0$ ή $m(\mathbb{R} \setminus \Omega_n) = 0$. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό $n \in \{\infty, 1, 2, ...\}$, ώστε $E(\Omega_n) = I$, οπότε η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n.

Από την πρόταση 4.1, υπάρχει unitary τελεστής

$$W : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, m) \otimes \ell^2(n), \text{ ώστε } UE(B)U^* = M_{\chi_B}^{(n)},\ \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}).$$

Συνεπώς η φασματική ανάλυση της μονάδας $\{WE_\lambda W^*\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ είναι η $\{M_{\chi_{(-\infty,\lambda]}}^{(n)} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ στο χώρο $L^2(\mathbb{R}, m) \otimes \ell^2(n)$. Επομένως, από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ότι $S_\lambda^{(n)} = WU_\lambda W^*$, οπότε η πρόταση αποδείχθηκε. □

Λήμμα 5.3. *Έστω T τελεστής στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}, m)$, ο οποίος μετατίθεται με την $\{S_\lambda\}$. Τότε ο τελεστής T είναι πολλαπλασιαστικός τελεστής, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $q \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$, έτσι ώστε $T = M_q$.*

Απόδειξη. Για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R}, m)$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$\langle T(u_\lambda f), g\rangle = \langle u_\lambda T f, g\rangle \Leftrightarrow \langle u_\lambda f, T^* g)\rangle = \langle u_\lambda T f, g\rangle \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} u_\lambda f \overline{T^* g} dm = \int_{\mathbb{R}} u_\lambda T f \overline{g} dm$$

Επομένως από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Fourier, ισχύει ότι :

[2] Έστω μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στο $\mathbb{R}$, τα οποία αφήνουν αναλλοίωτα από μεταφορές τα αντίστοιχα σύνολα μηδενικού μέτρου. Από την σ-προσθετικότητα των μέτρων υπάρχει Borel σύνολο E, ώστε $0 < \mu(E) < +\infty$ και $0 < \nu(E) < +\infty$. Έστω ότι υπάρχει Borel σύνολο F στο $\mathbb{R}$, ώστε $\mu(F) = 0$, ενώ $\nu(F) > 0$. Επομένως για κάθε f ολοκληρώσιμη και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_{F-y} f d\mu = 0$, οπότε :

$$0 = \int_F \chi_{E-y} d\mu = \int_{F-y} \chi_E d\mu,\ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_F \chi_{E-y}(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{F-y} \chi_E(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_F(x+y) \chi_E(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{F-x}(y) d\nu(y) \right) \chi_E(x) d\mu(x) = \int_E \nu(F - x) d\mu(x) > 0$$

καθώς η απεικόνιση $y \mapsto \nu(F - y)$ είναι θετική.

$$f\overline{T^*g} = Tf\overline{g}.$$

Οπότε για κάθε $h \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} hf\overline{T^*g}dm = \int_{\mathbb{R}} hTf\overline{g}dm \Leftrightarrow \langle hf, T^*g\rangle = \langle hTf, g\rangle \Leftrightarrow \langle T(hf), g\rangle = \langle hTf, g\rangle$$

Συνεπώς για κάθε $f, h \in L^2(\mathbb{R}, m) \cap L^\infty(\mathbb{R}, m)$, παρατηρούμε ότι :

$$\begin{cases} T(hf) = hTf \\ T(fh) = fTh. \end{cases}$$

Αν πάρουμε $h > 0$ σ.π., έχουμε $Tf = \frac{Th}{h}f, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}, m)$.
Θέτοντας $q = \frac{Th}{h}$, έχουμε ότι $q \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$, και $Tf = M_q f$. □

Πρόταση 5.2. *Έστω $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μία SOT-συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα unitary τελεστών, η οποία δρα στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}, m)\otimes\ell^2(n)$, όπου $n \in \{+\infty, 1, 2, \dots\}$, και πληροί τις σχέσεις του Weyl με την $\{S_\lambda^{(n)}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Τότε υπάρχει unitary $Q \in (\mathcal{M}_m) \otimes B(\ell^2(n))$, ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι $V_t = QT_t^{(n)}Q^*$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A_t = V_t T_{-t}^{(n)}$. Εφόσον η $\{S_\lambda^{(n)}\}_\lambda$ ικανοποιεί τις σχέσεις του Weyl με αμφότερες τις $\{V_t\}_t$ και $\{T_t^{(n)}\}_t$, παρατηρούμε ότι :

- $A_t S_\lambda^{(n)} = V_t T_{-t}^{(n)} S_\lambda^{(n)} = e^{-i\lambda t} V_t S_\lambda^{(n)} T_{-t}^{(n)} = e^{-i\lambda t} e^{i\lambda t} S_\lambda^{(n)} V_t T_{-t}^{(n)} = S_\lambda^{(n)} V_t T_{-t}^{(n)} = S_\lambda^{(n)} A_t \Rightarrow$
  $\Rightarrow A_t(S_\lambda \otimes I) = (S_\lambda \otimes I)A_t, \ \forall \lambda, t \in \mathbb{R}$
- $A_{s+t} = V_{s+t} T_{-s-t}^{(n)} = V_s V_t T_{-t}^{(n)} T_{-s}^{(n)} = V_t A_s T_{-s}^{(n)} = A_s T_s^{(n)} A_t T_{-s}^{(n)} \Rightarrow A_{s+t} = A_s T_s^{(n)} A_t T_{-s}^{(n)}$

Έστω $\xi, \eta \in \ell^2(n)$. Θεωρούμε την απεικόνιση :

$$\psi_{\xi,\eta} : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle A_t(f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle.$$

Η απεικόνιση $\psi_{\xi,\eta}$ είναι sesquilinear και φραγμένη, επειδή :

$$|\psi_{\xi,\eta}(f, g)| = |\langle A_t(f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle| \leq \|A_t\| \cdot \|f \otimes \xi\| \cdot \|g \otimes \eta\| \leq \|A_t\| \cdot \|f\| \cdot \|\xi\| \cdot \|g\| \cdot \|\eta\|$$

Επομένως υπάρχει τελεστής $A_t^{\xi\eta} \in \mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}))$, με νόρμα $\|A_t^{\xi\eta}\| \leq \|A_t\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|$, έτσι ώστε $\langle A_t^{\xi\eta} f, g\rangle = \psi_{\xi,\eta}(f, g)$. Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η απεικόνιση $t \to A_t^{\xi\eta}$ είναι WOT-συνεχής. Πράγματι, εάν $t_\lambda \to t$, τότε για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ έχουμε :

$$\langle (A_{t_\lambda}^{\xi\eta} - A_t^{\xi\eta})f, g\rangle = \langle (A_{t_\lambda} - A_t)(f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle \to 0$$

Επιπλέον από το γεγονός ότι $A_t(S_\lambda \otimes I) = (S_\lambda \otimes I)A_t$, $\forall \lambda, t \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε ξ, $\eta \in \ell^2(n)$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\langle A_t^{\xi\eta} S_\lambda f, g\rangle = \langle A_t(S_\lambda f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle = \langle A_t(S_\lambda \otimes I)(f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle = \\
&= \langle (S_\lambda \otimes I)A_t(f \otimes \xi), (g \otimes \eta)\rangle = \langle A_t(f \otimes \xi), (S_\lambda \otimes I)^*(g \otimes \eta)\rangle = \\
&= \langle A_t(f \otimes \xi), (S_\lambda^* g \otimes \eta)\rangle = \langle A_t^{\xi\eta} f, S_\lambda^* g\rangle = \langle S_\lambda A_t^{\xi\eta} f, g\rangle, \ \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Έπεται ότι οι τελεστές $S_\lambda, A_t^{\xi\eta}$ μετατίθενται για κάθε $\lambda, t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει φραγμένη συνάρτηση $\alpha_t^{\xi\eta} \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$, ώστε $M_{\alpha_t^{\xi\eta}} = A_t^{\xi\eta}$. Μάλιστα παρατηρούμε ότι :

$$\|\alpha_t^{\xi\eta}\|_\infty = \|M_{\alpha_t^{\xi\eta}}\| = \|A_t^{\xi\eta}\| \leq \|A_t\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|,$$

διότι ο A_t είναι unitary τελεστής, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση :

$$\ell^2(n) \times \ell^2(n) \to \mathbb{C} : (\xi, \eta) = \alpha_t^{\xi\eta}(x)$$

είναι προφανώς sesquilinear και μάλιστα φραγμένη, καθώς :

$$|\alpha_t^{\xi\eta}(x)| \leq \sup\{|a_t^{\xi\eta}(x)| : \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1\} \leq \|A_t\|$$

Ορίζεται λοιπόν φραγμένος τελεστής $\alpha_t(x) \in \mathbf{B}(\ell^2(n))$, ώστε για κάθε $\xi, \eta \in \ell^2(n)$ να ισχύει $\langle \alpha_t(x)\xi, \eta\rangle = \alpha_t^{\xi\eta}(x)$. Συνεπώς για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\xi, \eta \in \ell^2(n)$ ορίζεται η απεικόνιση

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \ : \ x \mapsto \langle \alpha_t(x)\xi, \eta\rangle,$$

η οποία είναι φραγμένη και μετρήσιμη.

Ισχυρισμός : Μπορούμε να επιλέξουμε συνάρτηση $\alpha_t^{\xi\eta} \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$, ώστε η απεικόνιση $\phi^{\xi,\eta} : (t, x) \mapsto \langle \alpha_t(x)\xi, \eta\rangle$ να είναι μετρήσιμη για κάθε ξ, η.
Για κάθε (t, x) ορίζουμε συνάρτηση

$$B^{\xi\eta} : R^2 \to \mathbb{C} : B^{\xi\eta}(t, x) \mapsto \int_{[0,x]} \langle \alpha_t(y)\xi, \eta\rangle dy.$$

Σταθεροποιώντας το t, η $B^{\xi\eta}$ είναι απόλυτα συνεχής ως προς x, καθώς η απεικόνιση $y \mapsto \langle \alpha_t(y)\xi, \eta\rangle$ είναι μετρήσιμη και φραγμένη στο $[0, x]$.

Μάλιστα αν $t \to t_0$, έχουμε :

$$\begin{aligned} B^{\xi\eta}(t,x) - B^{\xi\eta}(t_0,x) &= \int_{[0,x]} \langle \alpha_t(y)\xi,\eta\rangle dy - \int_{[0,x]} \langle \alpha_{t_0}(y)\xi,\eta\rangle dy = \\ &= \int_{[0,x]} (\langle \alpha_t(y)\xi,\eta\rangle - \langle \alpha_{t_0}(y)\xi,\eta\rangle) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\langle \alpha_t(y)\xi,\eta\rangle \chi_{[0,x]}(y) - \langle \alpha_{t_0}(y)\xi,\eta\rangle \chi_{[0,x]}(y)) \cdot \chi_{[0,x]}(y) dy = \\ &= \langle (\alpha_t^{\xi\eta} - \alpha_{t_0}^{\xi\eta})\chi_{[0,x]}, \chi_{[0,x]}\rangle \to 0 \end{aligned}$$

καθώς $A_t^{\xi\eta} \overset{WOT}{\to} A_{t_0}^{\xi\eta}$, όταν $t \to t_0$. Επομένως η $B^{\xi\eta}$ είναι συνεχής ως προς t.
Οι συναρτήσεις $f_n^{\xi\eta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (t,x) \mapsto n[B^{\xi\eta}(t, x+\frac{1}{n}) - B^{\xi\eta}(t,x)]$ είναι συνεχείς ως προς τις δύο μεταβλητές , οπότε είναι μετρήσιμες στο χώρο $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς υπάρχει Borel σύνολο $\Omega \in \mathbb{R}^2$, ώστε για κάθε $(t,x) \in \Omega$ να υπάρχει το όριο [3] $\lim_n f_n^{\xi\eta}(t,x)$.
Ορίζεται λοιπόν η μετρήσιμη συνάρτηση

$$f^{\xi\eta} : \Omega \to \mathbb{C} : (t,x) \mapsto \lim_n f_n^{\xi\eta}(t,x).$$

Ορίζουμε $f_t^{\xi,\eta} : x \mapsto f^{\xi\eta}(t,x)$, οπότε από το θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $f_t^{\xi\eta}, \alpha_t^{\xi\eta}$ είναι $\sigma.\pi$-παντού ίσες. Έπεται ότι οι τελεστές $A_t^{\xi\eta}$, $M_{f_t^{\xi\eta}}$ είναι ίσοι, οπότε ο ισχυρισμός μας αποδείχτηκε.

Η σχέση $A_{s+t} = A_s T_s^{(n)} A_t T_{-s}^{(n)}$ παρατηρούμε ότι $t,s \in \mathbb{R}$, υπάρχει $N_{t,s}$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με μηδενικό μέτρο Lebesgue, ώστε για κάθε $x \notin N_{t,s}$ να ισχύει ότι η ισότητα $\alpha_{s+t}(x) = \alpha_s(x)\alpha_t(x-s)$. Πράγματι, έστω $x \notin N_{t,s}$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in [-m,m]$, οπότε για την συνάρτηση $\chi_{[-m,m]} \otimes e_1 \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \ell^2(n)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a_{s+t}(x)e_1 &= a_{s+t}(x)(\chi_{[-m,m]} \otimes e_1)(x) = (A_{s+t}(\chi_{[-m,m]} \otimes e_1))(x) = \\ &= (A_s T_s^{(n)} A_t T_{-s}^{(n)}(\chi_{[-m,m]} \otimes e_1))(x) = a_s(x)[T_s^{(n)}(A_t T_{-s}^{(n)}(\chi_{[-m,m]} \otimes e_1))](x) = \\ &= a_s(x)a_t(x-s)(\chi_{[-m,m]} \otimes e_1)(x) = a_s(x)a_t(x-s)e_1. \end{aligned}$$

Έστω $\{e_i : i \in \mathbb{N}$, ώστε $i \leq n\}$ μια ορθοκανονική βάση στον $\ell^2(n)$. Θεωρούμε λοιπόν για κάθε i,j τη μετρήσιμη ως προς τις τρεις μεταβλητές συνάρτηση

[3] Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ ορίζονται στο χώρο X, έχουν πεδίο τιμών το $\overline{\mathbb{R}}$ και είναι μετρήσιμες. Το σύνολο

$$\Omega = \{x \in X : \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x) \neq \pm\infty\} = \{x \in X : \exists \lim f_n(x) \neq \pm\infty\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$, οπότε η απεικόνιση $f = \lim f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι επίσης μετρήσιμη.

$$g^{ij}(x,t,s) = |\langle(\alpha_{s+t}(x) - \alpha_s(x)\alpha_t(x-s))e_j, e_i\rangle|.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα Borel σύνολο $N_{t,s}$ με μηδενικό μέτρο, ώστε $g^{ij}(x,t,s) = 0$ για κάθε $x \notin N_{t,s}$, οπότε έχουμε $\int_{\mathbb{R}} g^{ij}(x,t,s)dx = 0$, $\forall t, s$. Έπεται λοιπόν ότι :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} g^{ij}(x,t,s)dxd(t,s) = 0 \overset{Fubini}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} g^{ij}(x,t,s)d(t,s)dx = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g^{ij}(x,t,s)d(t,s),\ \forall x \notin N^{ij},\ \text{όπου } m(N^{ij}) = 0$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $N = \bigcup_{i,j} N^{i,j}$ έχει μηδενικό μέτρο και πως για κάθε $x \notin \bigcup_{i,j} N^{i,j}$, υπάρχει Borel σύνολο M_x, επίσης μηδενικού μέτρου, ώστε $g^{ij}(x,t,s) = 0$, για κάθε $t, s \notin M_x$. Σταθεροποιώντας $x \notin N$, τότε για κάθε $t, s \notin M_x$ έχουμε ότι

$$\langle(\alpha_{s+t}(x) - \alpha_s(x)\alpha_t(x-s))e_j, e_i\rangle = 0,\ \forall i, j,$$

οπότε έπεται η σχέση

$$\alpha_{s+t}(x) - \alpha_s(x)\alpha_t(x-s) = 0,\ \forall t, s \notin M_x.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $q : \mathbb{R} \to \mathbf{B}(\ell^2(n)) : y \mapsto (\alpha_{x-y}(x))^{-1}$, και σχεδόν για κάθε t, y, έχουμε ότι :

$$\alpha_{x-y+t}(x) = \alpha_{x-y}(x)\alpha_t(x-(x-y)) = \alpha_{x-y}(x)\alpha_t(y) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha_{x-y}(x))^{-1} = \alpha_t(y)(\alpha_{x-y+t}(x))^{-1} \Leftrightarrow q(y) = \alpha_t(y)q(y-t)$$

Συνεπώς, για τον unitary τελεστή $Q : (Qf)(x) = q(x)f(x)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, m) \otimes \ell^2(n)$, έχουμε ότι $Q = A_t T_t^{(n)} Q T_{-t}^{(n)}$, σχεδόν για κάθε t. Όμως, επειδή οι ομάδες τελεστών $\{A_t\}_t$ και $\{T_t^{(n)}\}_t$ είναι SOT-συνεχείς, η προηγούμενη ισότητα ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως έχουμε ότι $V_t = A_t T_t^{(n)} = Q T_t^{(n)} Q^* T_{-t}^{(n)} T_t^{(n)} = Q T_t^{(n)} Q^*$. □

Θεώρημα 5.3 (Το θεώρημα μοναδικότητας των Stone και von Neumann). *Έστω $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δύο SOT-συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών σε έ-να διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, οι οποίες δεν έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο εκτός των τετριμμένων και πληρούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης του Weyl. Τότε υπάρχει unitary τελεστής $R : L^2(\mathbb{R}, m) \to \mathcal{H}$, ώστε $U_\lambda = RS_\lambda R^*$ και $V_t = RT_t R^*$, για κάθε $\lambda, t \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 5.1, υπάρχει unitary τελεστής $W : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, m) \otimes \ell^2(n)$, έτσι ώστε $U_\lambda = WS_\lambda^{(n)} W^*$. Έστω $n > 1$. Θεωρούμε την ομάδα $\{\widetilde{V}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, όπου

$\widetilde{V}_t = WV_tW^*$. Από την πρόταση 5.2, υπάρχει unitary τελεστής $Q \in (\mathcal{M}_m) \otimes \mathbf{B}(\ell^2(n))$, ώστε $\widetilde{V}_t = QT_t^{(n)}Q^*$. Επομένως έχουμε ότι $S_\lambda^{(n)}Q = QS_\lambda^{(n)}$, άρα $S_\lambda^{(n)} = QS_\lambda^{(n)}Q^*$.
Όμως τότε, εάν $\{e_i : i \in \mathbb{N}$ ώστε $i \leq n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\ell^2(n)$, οι ομάδες $\{\widetilde{V}_t\}, \{S_\lambda^{(n)}\}$ έχουν τον κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο $Q(L^2(\mathbb{R}, m) \otimes e_1)$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.
Συνεπώς, οι ομάδες δρουν στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{R}, m)$, και ο ζητούμενος unitary είναι ο τελεστής $QW : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, m)$. □

Παρατήρηση 5.2. *Στην απόδειξη του θεωρήματος δείξαμε το εξής :*
Έστω $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δύο SOT-συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες unitary τελεστών σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, οι οποίες πληρούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης του Weyl. Τότε υπάρχει $n \in \{+\infty, 1, 2, \dots\}$ και unitary τελεστής $R : L^2(\mathbb{R}, m) \otimes \ell^2(n) \to \mathcal{H}$, ώστε $U_\lambda = RS_\lambda^{(n)}R^*$ και $V_t = RT_t^{(n)}R^*$, για κάθε $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία

[1] H. Helson : *The Spectral Theorem*, Springer-Verlag, New York , (1986).

[2] H. Helson : *Lectures on Invariant Subspaces*, Academic Press, New York , (1964).

[3] K.R. Davidson : *Nest Algebras : Triangular Forms for Operator Algebras on Hilbert space* , Longman Scientific & Technical, (1988).

[4] G. J. Murphy : *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, (1990).

[5] R.V. Kadison, J.R.Ringrose : *Fundamentals of the theory of Operator Algebras*, Academic Press, New York, (1983).

[6] R.Beals : *Topics in Operator Theory*, University of Chicago Press, Chicago, (1971).

[7] U.Katznelson : *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

[8] M. Anoussis, A. Katavolos : *Unitary actions on nests and the Weyl relations*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 265-272.

[9] Α. Κατάβολος : *Σημειώσεις στο μεταπτυχιακό μάθημα : Θεωρία τελεστών*, (2010).

[10] Α. Κατάβολος : *Εισαγωγή στην Θεωρία Τελεστών*, Εκδόσεις Συμμετρία, (2008).

[11] Α. Κατάβολος : *Σημειώσεις στο μεταπτυχιακό μάθημα : Θεωρία τελεστών*, (2006).

[12] Α. Κατάβολος : *Άλγεβρες von Neumann και μη φραγμένοι τελεστές* στο *Άλγεβρες τελεστών - Κβαντική μηχανική*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, (1997), 147-199.

[13] Γ. Ελευθεράκης : *Μοναδιαία ισοδυναμία σε αβελιανές άλγεβρες von Neumann και nests*, (2000).

[14] Α. Γιαννόπουλος : *Σημειώσεις στο μεταπτυχιακό μάθημα : Ανάλυση 2*, (2009).

[15] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης : *Θεωρία μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, (2005).

[16] Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Σ. Νεγρεπόντης, Β. Φαρμάκη : *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, (1997).

Ευρετήριο